X I A N X I N G D A I S H U

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数（第2版）

唐晓文　王昆仑　陈　翠　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

(第2版)

唐晓文　王昆仑　陈　翠　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”要求精神及第1版的基础上，按照工科类及经济管理类“本科数学基础课程教学基本要求”并结合当前大多数本专科院校在教学改革中出现的新的形势和特点而编写的. 全书以通俗易懂的语言，系统地讲解行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间等内容. 全书每章都配有习题和复习题，书末附有习题的参考答案. 重要的章节还附有实际应用题，附录有数学模型举例等.

本书结构严谨、理论系统、举例丰富、实用性强. 可作为普通高等院校（尤其是少学时院校）工科类、理科类（非数学专业）、经济管理类各专业“线性代数”课程的教材，也可供有专升本的专科院校或继续教育学院选用，还可供相关专业人员和广大自学者学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/唐晓文，王昆仑，陈翠编著. —2版.
—上海：同济大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5608-4879-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①唐…②王…③陈… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第097020号

普通高等教育“十二五”规划教材
线性代数(第2版)
唐晓文 王昆仑 陈 翠 编著
责任编辑 曹 建 张 莉 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021－65985622)
经　销 全国各地新华书店
印　刷 同济大学印刷厂
开　本 787mm×960mm 1/16
印　张 11.25
印　数 4101—8200
字　数 225000
版　次 2012年7月第2版 2012年7月第2次印刷
书　号 ISBN 978-7-5608-4879-2

定　价 20.00元

前　　言

本教材自2009年7月出版以来，由于在取材、体系、讲法及可读性等方面较为切合当前新建本科院校的改革形势和教学实际，所以被国内多所院校采用，深受广大师生的欢迎，也得到了广大读者的肯定，故先后重印了三次.

几年来，许多专家、学者和广大师生对本教材给出了许多有益的建议，对教材提出了许多宝贵的改进意见. 在此特向他们表示感谢. 为了使教材更好地反映现代教育思想，体现先进性、科学性与实用性，有利于提高学生的综合素质与创新能力，同时也为了更好地方便广大读者学习使用，我们对国内外优秀的同类教材进行了比较研究，在保持第1版的优点、特色的基础上，对一些内容进行了修订、调整和优化，对文字、符号及排版疏漏等方面做了全面修订，对定理、例题与习题进行了合理适当的调整，教材内容的由浅入深方面作了进一步的精雕细刻.

在教材的修订过程中，得到了作者单位领导和线性代数教学团队的大力支持，他们的关心和帮助对我们的教材修订工作起到了很大的促进作用，在此谨向他们表示衷心的感谢！

参加第2版修订工作的有唐晓文、王昆仑、陈翠、项景华. 全书由唐晓文负责统稿、定稿. 尽管本教材经过了修订，但限于作者的水平，书中若有不当之处，敬请广大专家、同行和读者多提宝贵意见.

编　者

2012年7月

第 1 版前言

“线性代数”是普通高等院校理工类与经管类各专业必修的一门公共基础课程. 它的理论和方法已广泛地向各个学科领域渗透,在国民经济与科学技术中的地位与作用已被越来越多的人们所认识. 本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”要求精神的基础上,按照教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新修订的本科数学基础课程(线性代数部分)教学基本要求,同时根据高等院校教学改革中出现的新的形式和特点而编写的.

在编写过程中,我们总结了多年的教学经验,广泛听取了任课教师提出的宝贵意见,从教学的实际情况出发进行仔细推敲,以简明、实用为原则,在结构上做了精心的安排,分五章系统地讲解行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间等内容. 每章分若干节,每节都配有习题,同时每章还配有复习题,书末附有习题和复习题的参考答案. 重要的章节还附有实际应用题,附录有数学模型举例. 本书内容安排合理,逻辑清晰,通俗易懂,简明流畅,实用性强.

由于全书的学时数为 30～40 学时,带有一定的伸缩性,使用本书时,带“*”号的内容可根据教学需要和学时安排酌情增删. 附录是学习线性代数的辅助内容,可供教学时参考.

本书具有以下几方面的特点:

(1) 结构设计科学合理,突出重点消除难点. 很多线性代数教材都把向量组的线性相关性这一难点作为一章来讲述,之后再讲述线性方程组理论. 本书把向量组的线性相关性和线性方程组整合在一章,先用消元法及矩阵的秩给出线性方程组解的理论,然后利用解的理论研究向量组的线性相关性. 这样,不但突出了消元法在线性代数中的重要作用,而且也消除了教学中的难点问题.

(2) 淡化理论推导过程,加强训练夯实基础. 在第 1 章行列式中没有介绍排列及逆序数的内容,而是直接从三阶行列式的定义类推出 n 阶行列式的定义,而且还淡化了行列式性质的证明推导过程,既简明易懂,又解决了课时少、内容多的矛盾. 同时,本书配备了相当丰富的习题(每节都配有相应的习题,每章还配有综合复习题),目的是使学生深刻理解基本概念和基本定理的实质,熟练掌握重要的解题方法和证明技巧.

(3) 渗透数学建模思想,注重理论联系实际. 在重要的章节都附有实际应用题,例如,在讲了矩阵可对角化的条件后,用矩阵可对角化理论研究色盲遗传问题. 附录中还给出了数学模型举例,以此培养学生学习数学的兴趣,调动学生学习数学

的积极性，提高学生分析问题和解决问题的能力.

本书的编写大纲由唐晓文提出，并经过编者充分讨论而确定. 具体分工如下：第 1 章、第 2 章及附录由王昆仑编写，第 3 章、第 4 章、第 5 章由唐晓文编写，全书的习题以及参考答案由陈翠编写. 全书最后由陈翠统稿，唐晓文定稿.

本书由王家宝教授主审. 王家宝教授对本书作了认真的审查，提出了许多宝贵的修改意见和建议，对王家宝教授的热心指导，在此表示诚挚的谢意！

在编写过程中，我们参考了书后所列的参考文献，谨此对参考文献的作者表示衷心的感谢. 本书的出版还得到编者单位领导及同事的大力支持，在此一并表示感谢.

虽然编者力求本书通俗易懂、简明流畅、便于教学，但由于水平所限，能否达到这一目的，还期待大家在使用的过程中不断提出宝贵意见，以便再版时修改.

编　者

2009 年 7 月

目　　录

前　言

第 1 版前言

1　行列式 …… 1
1.1　行列式的概念 …… 1
1.1.1　二阶和三阶行列式 …… 1
1.1.2　n 阶行列式 …… 3
习题 1.1 …… 4
1.2　行列式的性质与计算 …… 5
1.2.1　行列式的性质 …… 5
1.2.2　行列式的计算 …… 10
习题 1.2 …… 13
1.3　克拉默法则 …… 14
*实际应用题 …… 17
习题 1.3 …… 18
复习题 1 …… 19

2　矩　阵 …… 22
2.1　矩阵的概念与运算 …… 22
2.1.1　矩阵的概念 …… 22
2.1.2　矩阵的运算 …… 25
2.1.3　分块矩阵 …… 32
习题 2.1 …… 34
2.2　逆矩阵 …… 35
2.2.1　逆矩阵的定义 …… 35
2.2.2　矩阵可逆的条件 …… 36
2.2.3　逆矩阵的性质 …… 40
习题 2.2 …… 40
2.3　矩阵的初等变换与秩 …… 41
2.3.1　矩阵的初等变换 …… 41

2.3.2 初等矩阵 …… 45
2.3.3 矩阵的秩 …… 49
*实际应用题 …… 51
习题 2.3 …… 55
复习题 2 …… 56

3 线性方程组 …… 59
3.1 消元法 …… 59
3.1.1 n维向量空间 …… 59
3.1.2 消元法 …… 61
3.1.3 线性方程组有解的充要条件 …… 65
习题 3.1 …… 67
3.2 向量组的线性相关性 …… 68
3.2.1 线性组合与线性表示 …… 68
3.2.2 线性相关与线性无关 …… 70
习题 3.2 …… 74
3.3 向量组的秩 …… 75
3.3.1 极大线性无关组 …… 75
3.3.2 向量组的秩 …… 76
习题 3.3 …… 79
3.4 线性方程组解的结构 …… 79
3.4.1 齐次线性方程组解的结构 …… 79
3.4.2 非齐次线性方程组解的结构 …… 83
*实际应用题 …… 86
习题 3.4 …… 90
复习题 3 …… 91

4 相似矩阵及二次型 …… 94
4.1 向量的内积 …… 94
4.1.1 内积的概念和性质 …… 94
4.1.2 线性无关向量组的正交化方法 …… 97
习题 4.1 …… 99
4.2 方阵的特征值与特征向量 …… 100
4.2.1 定义与性质 …… 100
4.2.2 方阵的特征值与特征向量的求法 …… 101
习题 4.2 …… 104

4.3 相似矩阵及对角化 105
4.3.1 相似矩阵及其性质 105
4.3.2 矩阵与对角阵相似的条件 106
4.3.3 实对称矩阵的对角化 109
习题 4.3 113
4.4 二次型及其正定性 114
4.4.1 二次型及其矩阵表示形式 114
4.4.2 化二次型为标准形的方法 116
4.4.3 正定二次型 119
* 实际应用题 122
习题 4.4 126
复习题 4 127

*5 线性空间介绍 129
5.1 线性空间的概念 129
5.1.1 线性空间的定义 129
5.1.2 线性空间的性质 131
5.1.3 维数、基与坐标 131
5.1.4 基变换与坐标变换 133
5.1.5 子空间 135
习题 5.1 136
5.2 线性变换 137
5.2.1 线性变换的定义 137
5.2.2 线性变换的基本性质 138
5.2.3 线性变换的运算 139
5.2.4 线性变换的矩阵表示 141
习题 5.2 144
5.3 线性空间的同构 145
习题 5.3 147
复习题 5 147

附录 A 数学模型举例 149
参考答案 159
参考文献 170

1 行 列 式

行列式是一个重要概念，它在线性代数和后继课程中有着广泛应用，是一个有力的数学工具.本章主要介绍行列式的定义、性质与计算方法.

1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶和三阶行列式

1. 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$ (1.1)

第 1 个方程 $\times a_{22}$ $-$ 第 2 个方程 $\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

第 2 个方程 $\times a_{11}$ $-$ 第 1 个方程 $\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

若定义二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

并记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

例 1.1.1 求解二元线性方程组$\begin{cases}3x_1-2x_2=12,\\ 2x_1+\ x_2=1.\end{cases}$

解 由于$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0$,

$$D_1=\begin{vmatrix}12 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此,得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

2. 三元线性方程组与三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}$$

同样可用消元法求出它的解. 为了便于表示它的解,我们引进**三阶行列式**:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.3)$$

可见,三阶行列式是由 9 个元素排成 3 行 3 列,两端加以竖线组成的,其结果是一个值. 每个元素 a_{ij} 的下标 ij 确定该元素的位置,其中,i 称为行标,j 称为列标.

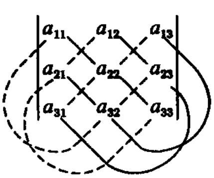

图 1-1

以上三阶行列式的展开式(1.3)也可用对角线法则来帮助记忆. 如图 1-1 所示,每条实线上的 3 个元素的乘积带正号,每条虚线上的 3 个元素的乘积带负号,所得六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

利用二阶行列式的定义，式(1.3)还可以写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\
&= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

我们分析一下式(1.4). 首先，式(1.4)右端的三项是三阶行列式第1行的3个元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 分别乘一个二阶行列式，而所乘的二阶行列式是划去该元素所在的行与列后，由剩下的4个元素按原来的相对位置组成的；其次，每一项之前都要乘以 $(-1)^{1+j}$，1和 j 恰好是 a_{1j} 的行标和列标. 式(1.4)说明三阶行列式可用二阶行列式表示.

按照这一规律，我们可以用三阶行列式定义四阶行列式，用四阶行列式定义五阶行列式. 以此类推，可以给出 n 阶行列式的定义.

1.1.2 n 阶行列式

定义 1.1.1 n **阶行列式**是由 n^2 个元素排成 n 行 n 列组成的，它的形式如下：

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

n 阶行列式是按如下递归规则确定的一个值：

当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

当 $n>1$ 时，

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

其中，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$. 而 M_{1j} 是划去元素 a_{1j} 所在的行与列后，由剩下的 $(n-1)^2$

个元素按原来的相对位置组成的$(n-1)$阶行列式：

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称M_{1j}为元素a_{1j}的**余子式**，A_{1j}为元素a_{1j}的**代数余子式**. 式(1.5)也称为行列式D按第1行展开式.

定义 1.1.2 在n阶行列式中，划去元素a_{ij}所在的行与列后，由剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的相对位置组成的$(n-1)$阶行列式称为元素a_{ij}的**余子式**，记为M_{ij}. 而$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的**代数余子式**.

例 1.1.2 计算下三角行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的值.

解 由n阶行列式的定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

n阶行列式的定义给出了用递归方法计算n阶行列式的值的方法. 但在实际中，用这种方法计算三阶以上的行列式，计算量很大. 下面将要介绍的行列式性质，可以用来简化行列式的计算.

习 题 1.1

1. 设行列式$D=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}$，求$D$中第3行第2列元素2的余子式$M_{32}$和代数余子式$A_{32}$的值.

2. 计算下列各行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3. 求下列方程的根.

(1) $f(x)=\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0$； (2) $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=0$.

4. 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2=9, \\ 3x_1-7x_2=-11. \end{cases}$$

1.2 行列式的性质与计算

1.2.1 行列式的性质

性质 1 行列式的某一行中每一个元素都乘以同一数 k，等于数 k 乘行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD.$$

证明 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，性质 1 显然成立. 设性质 1 对所有 $(n-1)$ 阶行列式成立，现考虑 n 阶行列式. 若是第 1 行元素乘以 k，由 n 阶行列式的定义，按第 1 行展开，易证性质成立. 若是第 $i(2\leqslant i\leqslant n)$ 行元素则都乘以 k，从而

$$G=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}B_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}kM_{1j}$$

$$= k\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} = kD.$$

式中，B_{1j}是G中元素a_{1j}的余子式，M_{1j}是D中元素a_{1j}的余子式.（$n-1$）阶行列式M_{1j}的第$i-1$行每一个元素乘以k就是B_{1j}，由归纳法假设，有

$$B_{1j}=kM_{1j}.$$

证毕

推论 1 行列式中某一行的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2 行列式中某一行的所有元素都为零，则行列式等于零.

性质 2 若行列式D第i行的元素都是两数之和，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 用数学归纳法. 当$n=1$时，性质 2 显然成立. 设性质 2 对所有（$n-1$）阶行列式成立. 对n阶行列式，若$i=1$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+b_{1j})(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}+\sum_{j=1}^{n}b_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若$2\leqslant i\leqslant n$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}(M_{1j}' + M_{1j}'')$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}' + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}''$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中，$(n-1)$阶行列式M_{1j}'和M_{1j}''分别是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

关于a_{1j}的余子式，由归纳法假设，

$$M_{1j} = M_{1j}' + M_{1j}''.$$

证毕

性质 3　互换行列式的两行，行列式变号.

证明略.

性质 4　若行列式D有两行元素完全相同，则此行列式等于零.

证明　将D中相同的两行互换后所得的行列式还是D，根据性质 3 有$D=-D$，故$D=0$.　　证毕

性质 5　行列式中若有两行元素对应成比例，则行列式等于零.

性质 5 可根据性质 1 和性质 4 加以证明，请读者证明之.

性质 6 将行列式 D 的某一行的各个元素乘以同一个数然后加到另一行对应的元素上去,行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明

$$\text{上式左边} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= D + 0 = D.$$

证毕

性质 7 行列式 D 可按第 1 列展开,即

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}.$$

证明略.

定义 1.2.1 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 8 行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 相等.

证明 当 $n=2$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$