普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学
（上册）

主 编 何满喜 丁春梅

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高 等 数 学

（上册）

主　编　何满喜　丁春梅

副主编　丁　胜　杨　艳　张书陶

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是根据普通高等理工科院校高等数学课程的基本要求，结合研究生入学考试的需求，汲取国内外优秀教材的优点编写而成. 全书分上、下两册. 上册内容包括函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，一元积分学，常微分方程. 本书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述简练，并从较典型的实际问题着手，引入概念和突出应用. 内容与中学数学相衔接，由浅入深，循序渐进，便于教学与自学. 书中各章节的主要内容都配有适量的例题和习题，着重训练读者对定义与概念的理解和对定理与方法的应用能力，培养读者解决问题的逻辑思维方法和创新能力. 而每章都配有适量的总习题，便于读者掌握重要的基本概念与数学思想，有利于巩固重点内容.

本书可用作普通高等学校非数学专业的本科生高等数学课程的教材，若不讲部分带星号的内容，也可作为少学时高等数学课程的教材. 还可供从事高等数学课程教学的教师和科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上下册)/何满喜，丁春梅主编. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-034878-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①何…②丁… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 128466 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京九天志诚印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2012 年 7 月第一次印刷 印张：26 3/4
字数：524 000

定价：49.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

前言 …… 1
第 1 章　极限与连续 …… 1
1.1　函数 …… 1
1.2　数列的极限 …… 11
1.3　函数的极限 …… 20
1.4　函数的连续性 …… 35
总习题 1 …… 45
第 2 章　导数与微分 …… 48
2.1　导数的概念 …… 48
2.2　函数的求导法则 …… 55
2.3　高阶导数 …… 60
2.4　隐函数及参数方程所确定的函数的求导方法 …… 63
2.5　函数的微分 …… 67
总习题 2 …… 72
第 3 章　微分中值定理与导数的应用 …… 74
3.1　微分中值定理 …… 74
3.2　洛必达法则 …… 80
3.3　泰勒公式及应用 …… 83
3.4　函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 89
3.5　函数的极值与应用 …… 94
3.6　函数图形的描绘 …… 99
3.7　曲线的曲率 …… 101
总习题 3 …… 106
第 4 章　一元积分学 …… 108
4.1　定积分的概念与性质 …… 108
4.2　原函数与不定积分 …… 116
4.3　微积分基本定理与基本公式 …… 120
4.4　两种基本积分法 …… 125
4.5　几种特殊类型的积分 …… 144

4.6 定积分的应用 …… 147
4.7 反常积分 …… 162
总习题 4 …… 167
第 5 章 常微分方程 …… 170
5.1 常微分方程的基本概念 …… 170
5.2 一阶常微分方程 …… 173
5.3 可降阶的高阶微分方程 …… 181
5.4 高阶线性微分方程 …… 185
5.5 高阶常系数线性微分方程 …… 188
总习题 5 …… 195
习题参考答案 …… 198
附 录 …… 213
A1 三角函数的部分公式 …… 213
A2 积分公式 …… 214

第1章

极限与连续

高等数学是变量数学，它的研究对象、研究方法与初等数学相比都有相当大的差异：它的主要研究对象是函数；它的主要内容是微积分学，即微分学与积分学．而微积分的主要课题在于研究变量的变化性态．为了利用变量的变化趋势、变化速度以及变化的累积效应等要素刻画变化过程的特征，人们提出并发展了极限的理论和方法．实际上，微分学中的重要概念——导数就是一类特殊的极限，而积分学中的重要概念——定积分又是另一类特殊的极限，极限的理论和方法构成了整个微积分的基础．本章主要介绍极限的基本概念、基本性质、基本运算，并且利用极限描述函数的连续性．连续函数是最常见的一类函数，它具有一系列很好的性质．本章内容是学习微积分必须具备的理论基础．

1.1 函　　数

1.1.1 预备知识

1.1.1.1 常量与变量

在日常生活或生产实践中，观察某一个事件的结果往往是用一个量的形式来表现的，在某一个观察的过程中始终保持不变的量称为**常量**，有的量在观察过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，这样的量称为**变量**．例如圆周率 π 是永远不变的量，它是一个常量；某商品的价格在一定的时间段内是不变的，所以在这段时间内它也是常量；又如一天中的气温、工厂在生产过程中的产量都是不断变化的量，这些量都是变量．

必须注意，常量和变量的概念是相对的，它们依赖于所考察的过程．在不同的过程中常量和变量是可以转化的，如商品的价格某段时间是常量，另一段时间就有可能是变量了．

1.1.1.2 集合、区间和邻域

一般地，我们把研究对象统称为**元素**，把一些具有同一种属性的元素组成的总体称为**集合**（简称**集**）．例如，某班的全体学生组成一个集合；长虹集团 2005 年度的所有产品组成一个集合；所有正有理数组成一个集合；等等．

集合具有**确定性**（给定集合的元素必须是确定的）和**互异性**（给定集合中的元素是互不相同的）．比如“身材较高的人”不能构成集合，因为它的元素不是确定的．

如无特别声明，可用如下符号表示一些常用数集：

R—实数集；**Q**—有理数集；**Z**—整数集；**N**—自然数集．

有关集合的表示、集合的运算符、集合的运算等方面的基本知识，中学数学已有介绍，这里就不一一赘述了.

如果变量的变化是连续的，则用区间来表示其变化范围. 在数轴上，**区间**是指介于某两点之间的线段上点的全体. 常用的区间有以下几种：

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

半开区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$或$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$

以上这些区间都是**有限区间**，其中，a,b 称为区间的**端点**，$b-a$ 称为区间的**长度**. 除此之外，还有**无限区间**，例如：

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$ 表示大于 a 的实数的全体；

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$ 表示不小于 a 的实数的全体；

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$ 表示小于 b 的实数的全体；

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$ 表示不大于 b 的实数的全体；

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$ 表示全体实数，

其中$-\infty$和$+\infty$分别读作"负无穷大"和"正无穷大"，它们不是数，仅仅是记号.

为了方便讨论数轴上某点附近的性质，我们引入邻域的概念.

定义 1 设 a 是一个实数，δ 是正数，数轴上到点 a 的距离小于δ 的点的全体，称为**点a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\},$$

其中，点 a 称为此邻域的**中心**，δ 称为此邻域的**半径**. 若不需要指明半径时，可记作 $U(a)$.

有时用到的邻域需要把中心去掉，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便，我们可以引入下面的记号：

$[a,a+\delta)=U_+(a,\delta)$称为点 a 的δ 右邻域；

$(a,a+\delta)=\mathring{U}_+(a,\delta)$称为点 a 的去心δ 右邻域；

$(a-\delta,a]=U_-(a,\delta)$称为点 a 的δ 左邻域；

$(a-\delta,a)=\mathring{U}_-(a,\delta)$称为点 a 的去心δ 左邻域.

1.1.2 函数概念

变量、运动与曲线的数学描述，催生了函数的思想，并把函数概念和方法置于整个数学的中心地位. 微积分的研究对象是函数，几何图形则成为函数的图像. 世界万物之间的联系与变化都有可能以各种不同的函数作为它们的数学模型.

函数的概念在历史上经过多次的扩展演化，其间经历了漫长的过程. 在 16 世纪，变化着的量之间的依赖关系成为科学研究的重要方面，反映到数学里，就产生变量和函数的概念. 在科学史上意大利物理学家伽利略·伽利雷(Galileo Galilei，1564～1642)首

先研究了变量间相互依存的关系，在他的名著《两门新科学》中就指出诸如“从静止状态自由下落的物体所经过的距离与所用的时间成正比”，即 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 渗透着函数的思想. “变量”的概念最先是由法国数学家笛卡儿(Descartes Rene，1596～1650)提出的，他在《几何学》中引入坐标同时也引入了变量，他在指出 x,y 是变量的同时，还注意到数 y 依赖于 x 的变化而变化，这正是函数思想的萌芽，从此数学由只研究常量进而开始研究变量. 英国科学家牛顿(Sir Isaac Newton，1643～1727)在伽利略、笛卡儿的研究背景下，意识到“曲线是由于点的连续运动”，即曲线是动点的轨迹，动点的位置(x,y)是时间的函数 $x=x(t)$，$y=y(t)$. 牛顿创立微积分时以流数(fluent)一词表示变量间的关系.

最早提出函数概念是莱布尼茨(Gottfried Wilhelm von Leibnitz，1646～1716). 1673 年莱布尼茨使用函数(function)一词，用来表示一个随着曲线上的点变动而变动的量，他把变动的量称 x，与 x 同时变动的变数称为 x 的函数. 其后，他的学生瑞士数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli，1667～1748)又把函数看作一个变量和一些常数组成的表达式. 伯努利的学生瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler，1707～1783)则把这一定义又推进一步，在 1748 年他指出：一个变量的函数，是由该变量和一些数或常量以任何一种方式构成的解析式. 欧拉使伯努利所强调的函数要用公式表示变得更加的明朗化，他将解析式定义为函数. 清代数学家李善兰(1811～1882)与英国传教士伟列亚历山大合译的《代微积拾级》中，将“function”译作了“函数”，意即“凡此变数中函彼变数，则此为彼之函数”. 瑞士数学家欧拉于 1724 年首先使用函数的记号 $f(x)$，一直沿用至今.

函数概念的发展演进是社会的需求和数学内部发展的需要共同促进的结果，它伴随着数学的发展在不断的改进和完善，其历程充分体现出了人们对真理孜孜不倦的追求. 下面我们给出函数的定义.

定义 2　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的一个非空子集，对 D 中的每一个数 x，按某一确定的法则 f，均有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是以 D 为定义域的(一元)**函数**(也称为定义在 D 上的函数)，记作

$$f:D\to\mathbf{R},\quad x\to y,$$

简记作

$$y=f(x),$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**(或 x **的函数**)，x 的取值范围称为函数的**定义域**(就是本定义中的 D)，通常用 D_f 表示. 数集$\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$称为函数的**值域**，通常用 R_f 表示.

需要指出的是：

(1)以上函数定义基本上是按照初等数学中所描述的方式给出的，它指的是**单值函数**；

(2)当一个函数没有指出自变量的范围时，该函数的定义域就是使该函数有意义的点的全体，即该函数的**自然定义域**；

(3)函数之间可以定义加、减、乘、除等运算，但是运算必须在所有函数公共定义域内进行.

函数定义的精髓是"确定的对应法则及函数的定义域"，即函数的两大要素，至于自变量与因变量各用什么字母并不重要. 如函数 $y=f(x),x\in D$ 与函数 $u=f(v),v\in D$，有相同的对应法则 f 和相同的定义域 D，因而这两个函数相同，可以看作是同一个函数. 而函数 $y=\frac{x}{x}$ 与函数 $y=1$，前者定义域为 $\{x\mid x\neq 0,x\in \mathbf{R}\}$，后者为 $\mathbf{R}$，定义域不同，因此不是同一个函数.

不同的对应法则可用不同的符号表示，如 $y=f(x)$ 或 $y=g(x)$，有时也用 $y=y(x)$ 表示 y 是 x 的函数.

下面我们来看几个具体的例子.

例 1 由关系式 $x^2+y^2=1$ 能确定两个变量 x 与 y 之间的一种对应关系，可以说是一个函数关系，但它不是我们通常所指的单值函数. 比如 $x=0$ 时，相应的 y 可以等于 1，也可以等于 -1. 其实它们是 $y=+\sqrt{1-x^2}$，$y=-\sqrt{1-x^2}$ 这样两段函数，这类函数我们称为**多值函数**.

例 2 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0,+\infty)$，称它为**绝对值函数**，其图像如图 1-1 所示. 通常这类函数称为**分段函数**.

所谓分段函数是指：函数在定义域的不同范围内的函数表达式不同，它实质上是一个函数，不能理解为两个或多个函数.

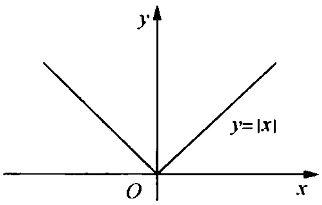


图 1-1 $y=|x|$ 的图像

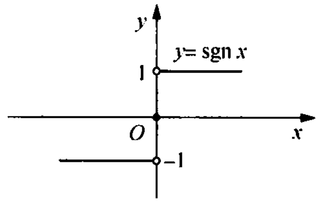


图 1-2 $y=\mathrm{sgn}x$ 的图像

例 3 函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为**符号函数**，这也是分段函数，它的定义域为 $\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图

1-2 所示.

对任何实数 x 都有关系式 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$,所以符号函数起着一个符号的作用.

例 4 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{0,1\}$.

例 5 取整函数 $y=[x]$,其中$[x]$是不超过 x 的最大整数,如图 1-3 所示.

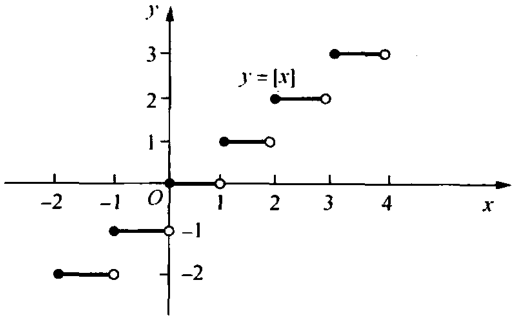


图 1-3 取整函数 $y=[x]$的图像

例 6 求函数 $y=\ln_{(x-1)}(16-x^2)$的定义域.

解 该函数的定义域,就是使函数有意义的点的全体,即要满足

$$\begin{cases}16-x^2>0,\\ x-1>0,\\ x-1\neq 1,\end{cases}$$

由此可解得 $1<x<2$ 及 $2<x<4$,即该函数的定义域为$(1,2)\cup(2,4)$.

例 7 判断下列每组的两个函数是否表示同一个函数.

(1)$f(x)=x^3$, $g(x)=(x^{\frac{3}{2}})^2$;

(2)$f(t)=1$, $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$.

解 (1)$f(x)=x^3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)=(x^{\frac{3}{2}})^2$ 的定义域为$[0,+\infty)$,因此不是同一个函数.

(2)$f(t)=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)=\sin^2x+\cos^2x=1$,其定义域也为 $\mathbf{R}$,因此两个函数定义域和对应关系完全相同,尽管两个函数的自变量所用字母不同,但两个函数表示的是同一个函数.

1.1.3 函数的表示法

我们在日常生活中,可以根据需要,将函数用不同的方法来表示:

(1)**解析法(公式法)** 把两个变量之间的关系直接用数学式子表示出来,必要的时候还可以注明函数的定义域、值域,这种表示函数的方法称为解析法,如例 2,例 3. 这在高等数学中是最常见的函数表示法,它便于我们进行理论研究.

(2)**表格法** 把自变量和因变量的对应值用表格形式列出,如三角函数表、常用对数表等.这种表示法有较强的实用价值.

(3)**图示法** 是用坐标系下的一条曲线反映自变量与因变量的对应关系.比如,气象台自动温度计记录了某地区的一昼夜气温的变化情况,这条曲线在直角坐标系下反映出来的就是一个函数关系.这种方法,几何直观性强,函数的基本性态一目了然,看图就基本上都知道了,但它不利于理论研究.

1.1.4 函数的初等性质

微积分学的主要研究对象是函数,既然要对函数进行研究,自然要对函数有哪些基本几何性质有一定的了解,下面我们将逐一进行介绍.

定义 3(函数的单调性) 设 $f(x)$在区间 I 上有定义,若对任意的 $x,y\in I$,当 $x<y$ 时,恒有 $f(x)\leqslant f(y)$(或 $f(x)\geqslant f(y)$),则称 $f(x)$在区间 I 上为**单调增加函数**(或**单调减少函数**);若对任意的 $x,y\in I$,当 $x<y$ 时,恒有 $f(x)<f(y)$(或 $f(x)>f(y)$),则称 $f(x)$在区间 I 上为**严格单调增加函数**(或**严格单调减少函数**).

单调增加函数(或单调减少函数)、严格单调增加函数(或严格单调减少函数)统称为**单调函数**(也称**函数具有单调性**).

在几何上,单调增加(减少)函数的图形是沿 x 轴的正向渐升的(渐降的).单调函数的图形如图 1-4 和图 1-5 所示.

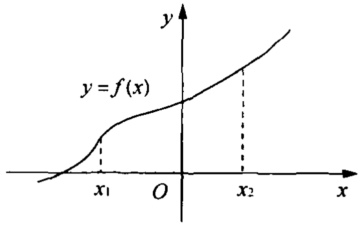


图 1-4 单调增加函数图像

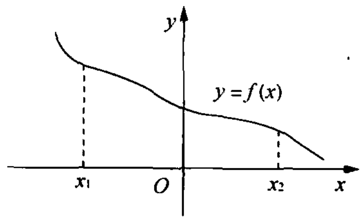


图 1-5 单调减少函数图像

例 8 证明函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上严格单调递减,在区间$[0,+\infty)$上严格单调递增.

证 对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,0]$,设 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0,$$

即

$$f(x_1)>f(x_2),$$

所以函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上严格单调递减.同理可证 $y=x^2$在区间$[0,+\infty)$上严格单调递增.

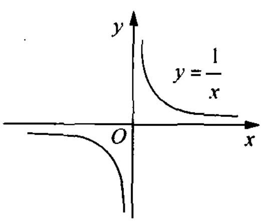
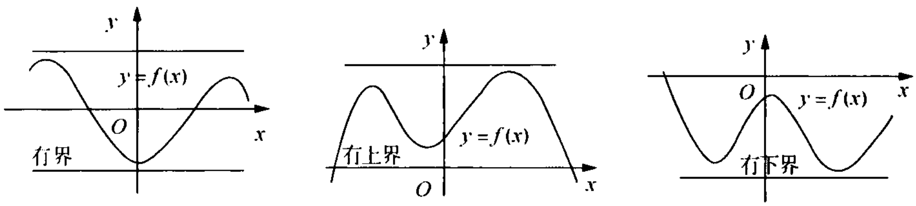


图 1-6 $y=\dfrac{1}{x}$的图像

函数的单调性是函数在定义区间内的几何特征,在不同的区间上可能有不同的单调性.即便在各个不同的区间内单调性相同,但在整个定义域内仍有可能不单调.比如,函数

$y=\frac{1}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，函数如图 1-6 所示，它不是单调函数，但它在$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$上分别单调递减.

定义 4(函数的有界性)　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上**有界**，否则称为**无界**. 如果存在常数 M，使得对任意 $x\in I$，恒有 $f(x)\leqslant M$(或者 $f(x)\geqslant M$)，那么称函数 $f(x)$在区间 I 上有**上界**(或**下界**)，其几何特征如图 1-7 中(a)，(b)，(c)所示.



(a)　(b)　(c)

图 1-7　函数的有界性

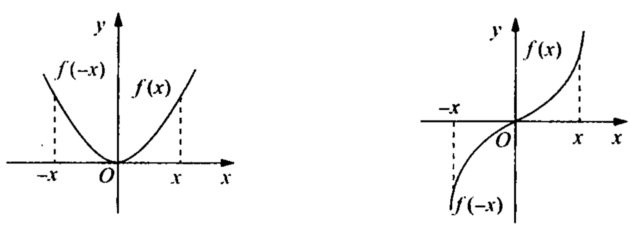
显然，$f(x)$在区间 I 上有界等价于它在区间 I 上既有上界又有下界. 例如，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是有界函数；函数 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无上界，但有下界(0 为一个下界)；而在$(-\infty,0)$内无下界，但有上界(0 为一个上界). 它在定义域内是无界的. 但是它在任何不包含原点的闭区间上是有界的.

定义 5(函数的奇偶性)　设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，即$\forall x\in D$，有$-x\in D$(图 1-8).

(1)若$\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**；

(2)若$\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**.

以上符号"$\forall$"表示"对任意的(或对任意给定的)". 从几何特征来说，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 例如，$y=x^2$，$y=x^4$，$y=\cos x$ 都是偶函数；而 $y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数.



(a)　(b)

图 1-8　函数的奇偶性

对于定义域相同的函数来说，有如下结论：

偶(奇)函数的和仍为偶(奇)函数;

两个偶(奇)函数的积为偶函数;

一偶一奇两个函数的积为奇函数.

但是,不是任何函数都有奇偶性的,如 $y=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

定义 6(函数的周期性) 若对函数 $y=f(x)$,$D_f=\mathbf{R}$,存在非零常数 T,使得对 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $f(x\pm T)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,并称 T 是函数 $f(x)$ 的**一个周期**.

由定义可知,一个函数如果是周期函数的话,它就有无穷多个周期. 周期函数的几何特征是:以一个周期为跨度,把曲线划断,各段曲线再移到一起,它们完全重合. 可是,周期函数不一定存在最小正周期. 比如,$y=2$ 就是一个以任意正实数为一个周期的周期函数,由于不存在最小正实数,所以 $y=2$ 不存在最小正周期.

1.1.5 复合函数

在日常生活或生产实践中,事物之间的关系往往是错综复杂的,因此在数学中描述自然规律、生产规律的函数结构也是复杂的. 有时我们需要利用两个或两个以上的函数组合成另一个新的函数.

定义 7 设函数 $y=f(u)$,$u\in D_f$,函数 $u=\varphi(x)$,$x\in D_\varphi$,当 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$ 时,y 通过 u 构成 x 的函数,称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称为**复合函数**. 记作

$$y=f(\varphi(x))=fog(x),\quad D_{fog}=\{x\mid x\in D_\varphi,\varphi(x)\in D_f\},$$

其中 y 称为**因变量**,u 称为**中间变量**,x 称为**自变量**,$\varphi(x)$ 称为**内层函数**,$f(x)$ 称为**外层函数**.

由定义可知,构建复合函数的前提条件就是:内层函数的值域与外层函数的定义域的交集不空. 也就是说,内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内,否则就会成为无意义的函数.

比如 $y=\sqrt{u}$,$u=\sin x-2$,复合起来 $y=\sqrt{\sin x-2}$ 在实函数范围内无意义.

例 9 设 $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$,求 $f(f(x))$.

解 $f(f(x))=\dfrac{2}{2-f(x)}=\dfrac{2}{2-\dfrac{2}{2-x}}=\dfrac{2-x}{1-x}$,其中 x 满足

$$\begin{cases}x\neq 2,\\ \dfrac{2}{2-x}\neq 2,\end{cases}$$

即 $f(f(x))$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

有时在实际应用中既需要把几个简单函数复合成一个复合函数,同时也需要把一个复合函数分解成几个简单函数的复合.

1.1.6　反函数

函数反映的是因变量随着自变量的变化而变化的规律，但是变量之间的制约是相互的，在我们研究的不同领域里，经常需要更换这两个变量的主次关系. 若这种主次关系对换后，仍然能构成函数关系，就是我们所要介绍的反函数.

定义 8　设函数 $y=f(x)$，$x\in D_f$，若对 $\forall y\in R_f$，都有唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D_f$ 与之相对应，则按此对应法则就能得到一个定义在 R_f 上的函数，此函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R_f$.

由反函数的定义不难发现，$y=f(x)$ 存在反函数当且仅当 f 是 D_f 到 R_f 的一一对应关系，且反函数的定义域是原来函数的值域，反函数的值域是原来函数的定义域.

当我们把反函数与原来函数的图像描绘在同一直角坐标系下的时候，我们就发现，两个函数的图像经过旋转是完全重合的.

在数学上，我们总习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了满足这种习惯记法的需要，常把反函数改写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R_f$. 也正因为如此，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在同一直角坐标系下图像是关于直线 $y=x$ 对称的. 例如，图 1-9 中的两个函数

$$y=f(x)=x^2,\qquad x\in[0,+\infty)$$

和

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,+\infty)$$

是互为反函数，所以其图像关于直线 $y=x$ 是对称的.

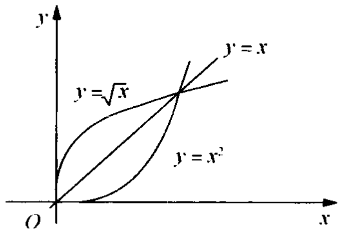


图 1-9　$y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 的图像

1.1.7　初等函数

在中学数学课程中，我们已经很熟悉以下几类函数：

常值函数　$y=C$（其中 C 是常数）；

幂函数　$y=x^\alpha(\alpha\neq 0)$；

指数函数　$y=a^x(0<a\neq 1)$；

对数函数　$y=\log_a x(0<a\neq 1)$；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，

$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，

$$y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x.$$

以上六类函数我们统称为**基本初等函数**.但在实际问题中我们遇到的不仅是基本初等函数,还有很多更为复杂的函数.

定义 9 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的,并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

凡不是初等函数的函数皆称为**非初等函数**.

例如 $y=\sqrt[3]{x^2-1}+\log_{10}(1+x)-\sin(\ln(x^3-2))$ 是初等函数,分段函数通常是非初等函数.在高等数学中讨论的函数主要是初等函数.

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\ln(x^2-4)$; (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+5x-3}}$;

(3) $y=\sqrt{\ln_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$; (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x+20}}$.

2. 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$,其中 $x\neq0, x\neq1$,求 $f(x)$.

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{2+x}{2-x}, x\neq\pm2$,求 $f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4. 试判断下列各组中的两个函数是否表示同一函数:

(1) $f(x)=1, g(x)=x^0$;

(2) $f(x)=x, g(t)=\sin(\arcsin t)$;

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$;

(4) $f(x)=|x|, g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

5. 试判断下列函数在指定区间内是否为有界函数:

(1) $y=e^{x^2}, \quad x\in(-\infty,+\infty)$; (2) $y=e^{x^2}, \quad x\in(0,10)$;

(3) $y=\ln x, \quad x\in(0,1)$; (4) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2+\sin x}+\cos(2^x), \quad x\in(-\infty,+\infty)$.

6. 试判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (2) $y=\begin{cases} x^3+1, & x\geqslant0, \\ -x^3+1, & x<0; \end{cases}$

(3) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; (4) $y=x^2\cos x$.

7. 证明定义在 $(-l,l)(l>0)$ 上的任一函数都能表示为一个偶函数和奇函数之和,且表示方式是唯一的.

8. 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数，证明 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数 $(a>0)$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\frac{1}{x}$，求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$.

10. 设 $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}(0<x<+\infty)$，$\phi(x)=\begin{cases}x+2, x<0,\\ x^2-1, x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(\phi(x))$.

11. 设 $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f(x)}_{n个}$，若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

12. 设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 都是单调增加的函数，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，证明 $f(f(x))\leqslant g[g(x)]\leqslant h(h(x))$.

13. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}(0<x<+\infty)$；

(2) $y=2\arcsin\sqrt{1-x^2}$，　$x\in[-1,0]$.

14. 找出下列函数中的初等函数，并指出这些函数分别由哪些基本初等函数复合而成的：

(1) $y=\begin{cases}1, & x 是有理数,\\ -1, & x 是无理数;\end{cases}$　　(2) $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$；

(3) $y=\ln^2\ln x$；　　(4) $y=|x|$.

1.2　数列的极限

在人们的日常生活中，经常碰到这样的情况：用市场变化趋势来研究产品需求量的状况；用学校发展的趋势来分析学校未来的前途；等等，这种趋势应用在数学上就是极限. 极限是微积分学中的一个基本概念，微分学与积分学的许多概念都是由极限引入，并且最终由极限知识来解决的. 因此极限在微积分学中占有非常重要的地位.

我国春秋战国时期的《庄子・天下篇》中说："一尺之棰，日取其半，万世不竭"，这就是极限的最朴素思想. 可以试想一下，一根棒子，每天取其一半，尽管永远取不完，可到了一定的时候，还能看得见吗？看不见意味着什么？不就是没了吗？终极的时候，就彻底地没有了. 它的终极状态就是零. 那么我们如何去理解这个终极状态和零呢？

公元 3 世纪，中国数学家刘徽的割圆术，就是用圆内接正多边形的周长逼近圆的周长的极限思想来近似计算圆周率 π 的. 他说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可再割，则与圆合体而无所失矣！"

17 世纪 60 年代～18 世纪初，牛顿和莱布尼茨两人分别从力学问题和几何学问题入手，在前人工作的基础上，利用还不严密的极限方法各自独立地建立了微积分学，最后由柯西(Cauchy，1789～1857)和维尔斯特拉斯(Weierstrass，1815～1897)完善了微

积分的基础概念——极限理论.

1.2.1 数列极限的概念

定义 1 若按照一定的法则,由第 1 个数 u_1,第 2 个数 u_2,……,依次排列下去,使得任何一个正整数 n 对应着一个确定的数 u_n,则把这列有次序的数 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 称为**数列**,简记作 $\{u_n\}$. 数列中的每一个数称为**数列的项**,其中 u_n 称为数列的**一般项**或**通项**. 例如

$\{(-1)^{n+1}\}:1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;$

$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}:\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;$

$\{n\}:1,2,3,4,\cdots,n,\cdots;$

$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}:2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots.$

数列分为有穷数列和无穷数列. 有穷数列是指只含有限项的数列,无穷数列是指含无穷多项的数列. 本书所讨论的数列都是无穷数列.

若存在正数 M,对所有的 n,都满足 $|u_n|\leqslant M$,则称数列 $\{u_n\}$ 为**有界数列**,否则称为**无界数列**.

数列也是函数,它可以看作定义在自然数集 N 上的函数,即 $u_n=f(n)$,$n=1,2,3,\cdots$,因此,数列也称为**整标函数**.

对前面给出的 4 个数列,我们发现当 n 无限增大时,以上数列相应项的值的变化情况各不相同,在变化过程中:

数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 的一般项在 1 与 -1 之间交替变化,它没有一个确定的终极趋势;

数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的一般项的值无限趋近于 0;

数列 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 的一般项的值无限趋近于 1;

数列 $\{n\}$ 的一般项的值无限增大.

可以看出,有的数列在 n 无限增大的过程中无限趋近于一个确定的常数. 根据这些现象,我们给出数列极限的描述性定义:

定义 2 设 $\{u_n\}$ 是一个数列,A 是一个确定的常数,若当 n 无限增大时,u_n 无限趋近于常数 A,则称当 n 趋于无穷时数列 $\{u_n\}$ 的极限为 A,或称数列 $\{u_n\}$ 收敛到 A.

一个数列若有极限则称为**收敛数列**,否则称为**发散数列**.

如上例中数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的极限为 0;数列 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 的极限为 1,均为收敛数列;而数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 与 $\{n\}$ 没有极限,为发散数列.

但是,如何才能更好、更准确地用数学的语言来描述上述定义中的“无限增大”、“无限趋近”这样的状态呢? 下面我们以数列 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 为例来分析.