经济管理类数学基础

线性代数

殷先军　付小芹 主编

清华大学出版社

经济管理类数学基础

线性代数

殷先军　付小芹　主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书涵盖了教育部非数学专业教学指导委员会最新制定的经济管理类本科数学基础课程教学基本要求。全书共6章，内容包括行列式、矩阵、向量的线性相关性与秩、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。每章分若干节，章末配有习题，书末附有习题参考答案。

本书可作为高等学校经济管理类、理工类、农学类等专业教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/殷先军，付小芹主编. --北京：清华大学出版社，2012.12

(经济管理类数学基础)

ISBN 978-7-302-30877-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①殷… ②付… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第291404号

责任编辑：石 磊
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：13.5　　**字　　数**：296千字
版　　次：2012年12月第1版　　**印　　次**：2012年12月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：23.00元

产品编号：043047-01

丛书序

随着我国经济与管理学科的迅速发展，数学作为经济与管理学科的重要基础课受到越来越广泛的关注和重视．数学课的教学目的在于培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力、科学的定量分析能力等基本数学素质，特别是培养学生在研究经济理论和经济管理的实践中综合运用数学思想方法去分析问题和解决问题的能力．数学课的教学质量，直接影响后续专业课的教学和相关专业学生的培养质量．

经济管理类数学基础系列课程主要有微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程．长期以来，中央财经大学应用数学学院一直非常重视这些基础课程的建设与改革．学院曾于1998年组织骨干教师编写出版了这三门课程的教材．该教材被评为中央财经大学重点系列教材，自出版发行以来，深受广大教师及学生的好评，还在一定程度上满足了兄弟院校教学的需要．

近年来，随着我校教育教学改革的不断深入，我们进一步对数学课的教学内容、教学手段等方面进行了一系列改革，力求使之更加适应新形势下财经应用型创新人才培养的要求．依据新的培养目标和培养方案，参考2009年教育部最新颁布的研究生入学数学考试大纲，我们重新修订了这三门课的教学大纲，组织教学小组积极探索提高公共数学课教学质量的途径、方法和有效手段．经过几年的努力，我们在课程建设方面取得了一定的成绩．目前，三门经济管理类数学课程均已成为校级精品课，其中微积分于2008年被评为北京市精品课程．

2010年5月，教育部为贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020年）》，扎实有序地推进教育改革，决定在全国范围分区域、有步骤地开展改革试点工作．中央财经大学的“财经应用型创新人才培养模式改革”成为首批国家教育体制改革试点项目．基于此，我们在课程建设中进一步突出了学生创新意识和创新能力的培养，成立教学改革课题组，开展“数学课程与教材一体化建设的研究”．

在上述工作的基础上，我们编写了这套“经济管理类数学基础”系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及配套的习题课教材和电子教案．教材内容涵盖了教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会最新制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，并且满足经济类、管理类各专业对数学越来越高的要求．在我们原有教材的基础上，该系列教材凝聚了作者近年来在大学数学教学改革方面的一些新成果，借鉴了近几年国内外一批优秀教材的有益经验．教材在内容上注重基本概念、基本理论和基本技

能的讲解，突出理论联系实际，努力体现实用性. 根据经济管理类专业学生的实际情况，尽量以直观的、通俗的方法重点阐述数学方法的思想、应用背景及其在金融、保险、统计等领域应用中应该注意的问题. 选择与当今社会经济生活和现代科技密切相关的实例，避免那种远离实际而只讲数学的抽象定义、定理、证明的模式，尽量突出数学建模的思想和方法. 通过加强对经济学、管理学具体问题的数学表述和数学理论问题的经济学含义解释，使得数学的能力培养功能与应用功能有机结合，培养学生在经济学中的数学思维方式和数学应用能力，实现经济、管理类数学基础教育的"培养素质、提高能力特别是专业素质"的目标. 我们希望系列教材与精品课程互为依托，进一步促进课程与专业建设水平全面提高.

在本系列教材的编写和出版过程中，得到中央财经大学教务处、应用数学学院以及清华大学出版社的大力支持，在此一并致谢.

尽管作者都有良好的愿望和多年的教学经验，但由于受经验和水平的限制，加之时间仓促，书中难免存在作者未发现的错漏，恳请使用本书的读者不吝指正，以便进一步完善.

编　者

2012 年 5 月

前言

本书是根据教育部非数学专业教学指导委员会发布的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》而编写的系列教材之一。全书内容结构合理，联系紧密，例题、习题丰富，既符合数学的逻辑性，又考虑到学生的思维模式，力求语言简洁，通俗易懂。本书可作为高等学校经济管理类专业的教材，也可作为理工类和其他非数学类专业的教材或教学参考书。

本书在内容的编排上考虑到下面几点：

1. 主要内容以矩阵为主线，以向量和线性方程组为纽带，以矩阵的初等变换为基本方法，将线性代数的主要内容紧密地结合起来，形成一个有机的整体。

2. 结合多年的教学实践，将向量与线性方程组两部分内容分为两章介绍，而非按传统将两部分内容穿插安排。这样做更能明确主题，便于教学。

3. 在内容的选择上，注意高中数学基础与大学数学知识的衔接，做到由浅入深，由具体到抽象，循序渐进，符合学生的认知规律。

4. 在内容的安排上，既满足本科数学教学基本要求，也适当参考了 2011 年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，如将与向量空间有关的内容安排在第 5 章介绍，教师可根据专业和学时的不同，适当选取这部分内容。

5. 在习题的选择和编排上，增强习题的目的性，对不同专业和不同层次的学生提出不同的要求，难易题适当搭配，让学生能按照自己的能力和目标受到科学的训练，达到理想的效果，为此习题分 A、B 两类配备。

本书共分为 6 章。第 1 章以解线性方程组引出行列式的概念，进而介绍行列式的性质和计算方法；第 2 章主要介绍矩阵的概念、矩阵的运算、矩阵的初等变换和矩阵的逆，为后面的章节打下基础；第 3 章主要介绍向量的线性运算、线性相关性、极大线性无关组、向量组和矩阵的秩；第 4 章的主要内容为线性方程组的一般理论和求解线性方程组的方法；第 5 章主要介绍向量空间和子空间的一般概念、向量的内积与正交、矩阵的特征值与特征向量、矩阵的对角化；第 6 章主要介绍二次型。

本书第 1、2、6 章和第 5 章中 5.3～5.5 节由付小芹副教授编写，第 3、4 章和第 5 章中 5.1～5.2 节由殷先军教授编写。

在本书的编写过程中，参阅了国内外许多现有的教材、参考书和网络资料，恕不一一列

出，在此编者一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之成书时间仓促，难免有不妥之处。衷心希望专家、同行和读者不吝赐教，以求使本书得到不断完善。

编　者

2012 年 5 月

目录

第 1 章

行 列 式

行列式是研究矩阵和线性方程组的重要工具，而矩阵和线性方程组又是线性代数的重要组成部分. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及用行列式解线性方程组的克莱姆法则. 在后面章节关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中，行列式都是必不可少的研究工具.

1.1 排列与逆序数

为了给出 n 阶行列式的概念，我们首先引入排列与逆序的概念.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 个不同数字的全排列，称为一个 n 级排列，记作 $j_1j_2\cdots j_n$. 例如 321，213 都是三级排列，2413 是一个四级排列.

由定义知，n 级排列共有 $n!$ 个. 例如由 1，2，3 所组成的三级排列共有 $3!=6$ 个. 它们是 123，132，231，213，312，321. 在以上所有的三级排列中，除排列 123 是按从小到大顺序排列(称此排列为自然排列)以外，其余的排列中，都有较大的数排在较小的数前面.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面 $(j_t>j_s)$，则称 j_t 与 j_s 构成一个逆序，记作 j_tj_s；一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

如果排列的逆序数是奇数，则称为奇排列，排列的逆序数是偶数，则称为偶排列，规定逆序数为零的排列为偶排列. 如三级排列 123，231，312 是偶排列，132，213，321 是奇排列.

定义 1.3 在一个 n 级排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，如果将其中两个数 j_s 和 j_t 的位置互换，其余数位置不变，就得到另一个排列 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，这样的变换，称为一次对换，记为 (j_s,j_t). 相邻两个数的对换称为相邻对换.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_sj_tj_{t+1}\cdots j_n$，对换 j_s 与 j_t 后，变为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_tj_sj_{t+1}\cdots j_n$，显然 $j_1,j_2,\cdots,j_{s-1},j_{t+1},\cdots,j_n$ 这些数构成的逆序及它们与 j_s 或 j_t 构成的逆序经过对换并不改变，只是 j_s 与 j_t 是否构成逆序在对换前后不同. 如果 $j_s<j_t$，则经过对换后逆序就增加一个；如

果 $j_s>j_t$，则经过对换后逆序就减少一个，因此原排列与新排列的奇偶性恰好相反，即一次相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_sj_{s+1}\cdots j_{s+m}j_tj_{t+1}\cdots j_n$. 对换 j_s 与 j_t，可看成是：先将 j_t 做 m 次相邻对换变为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_sj_tj_{s+1}\cdots j_{s+m}j_{t+1}\cdots j_n$，再将 j_s 做 $m+1$ 次相邻对换变为 $j_1j_2\cdots j_{s-1}j_tj_{s+1}\cdots j_{s+m}j_sj_{t+1}\cdots j_n$. 故完成 j_s 与 j_t 的对换总共需经过 $2m+1$ 次相邻对换，因此两排列的奇偶性相反.

定理 1.2 在所有的 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中，奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

证 设在所有的 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个.

对这 p 个奇排列施以同一个对换(j_s,j_t)，则由定理 1.1 可知 p 个奇排列全部变成偶排列，于是得到 p 个偶排列，由于偶排列总共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理，如果将全部的偶排列都施以同一个对换(j_s,j_t)，则 q 个偶排列全部变成奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $p=q$，即奇排列与偶排列的个数相等.

又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，即 $p+q=n!$，所以 $p=q=\frac{n!}{2}$.

1.2 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先来介绍二阶、三阶行列式.

在中学代数中，用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为便于记忆，我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

称为二阶行列式，则(1.2)式中两个分子可分别表示为二阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

二阶行列式含有两行、两列，横排称为行，纵排称为列，行列式中的数又称为行列式的元素. 二阶行列式代表的是一个数，它是两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线(称为行列式的主对角线)上两元素的乘积，取正号；一项是从右上角到左下角的对角线(称为行

列式的次对角线）上两元素的乘积，取负号. 若将上述三个二阶行列式分别记为 D, D_1, D_2，则(1.2)式可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.4}$$

例 1.1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解　由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 2, x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -3$.

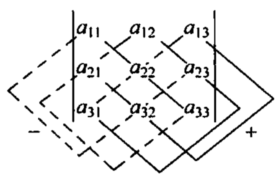
同样，用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$ 时，方程组(1.5)有唯一解. 引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.6}$$

三阶行列式代表的数值可通过下面图示（又称为对角线法则）加以记忆：实线上三个元素的乘积取正号；虚线上三个元素的乘积取负号. 但需要注意，对角线法则只适用于二阶和三阶行列式的计算.



按上述规则，有

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}$$

若将上述四个三阶行列式分别记为 D,D_1,D_2,D_3，则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.5)的唯一解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1.7}$$

显然，用行列式表示方程组的解，形状简便，容易记忆.

例 1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

解 按上述三阶行列式的计算法则，有

$$\begin{aligned} D &= 2\times(-4)\times 3 + 1\times 1\times 8 + 0\times(-1)\times(-1) - 1\times(-4) \\ &\quad \times(-1) - 0\times 1\times 3 - 2\times(-1)\times 8 \\ &= -4 \end{aligned}$$

从(1.3)式和(1.6)式可知，二阶、三阶行列式都是一些乘积项的代数和；而每一乘积项都是由行列式中位于不同行、不同列的元素构成的；并且等号右端恰好就是由所有这种可能的乘积项组成.另外，每一项还带有一定的符号，如在三阶行列式中，右端的每一项均可写成如下的一般形式：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

当这一项中各元素的行标按自然排列时，则该项的符号由其列标构成的排列的奇偶性来决定.若 $j_1j_2j_3$ 为偶排列，则该项的符号取正号；若 $j_1j_2j_3$ 为奇排列，则该项的符号取负号.因此三阶行列式也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的三级排列求和.

仿照三阶行列式的特点，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行、n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示一个数,这个数是 $n!$ 项的代数和,每一项都是取自行列式中不同行不同列的 n 个元素的乘积,各项的符号是:当这一项中各元素的行标构成自然排列时,若列标构成的排列为偶排列则取正号,若列标构成的排列为奇排列则取负号. 所以 n 阶行列式中的一般项可写成

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.8}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时,则得到 n 阶行列式所表示的代数和中的所有项. 因此 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和. (1.9) 式称为 n 阶行列式按行标自然排列的展开式.

当 $n=1$ 时,规定 $|a|=a$,即由一个元素 a 构成的一阶行列式就是元素 a 本身.

例 1.3　计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　根据行列式定义,n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,但由于该行列式中有许多元素为零,含零元素的乘积项等于零,因此只需计算那些不等于零的项. 而 D 的一般项(1.8)式中,只有当 $j_1=1,j_2=2,\cdots,j_n=n$ 时,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才可能不为零. 所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

仿照例 1.3 可得,上三角形行列式的值也等于主对角线上所有元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对角形行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由于数的乘法满足交换律，所以行列式的一般项中各元素的位置可以任意交换，行列式的值是不变的. 因此有下面定理.

定理 1.3 n 阶行列式又可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{1.10}$$

(1.10)式称为 n 阶行列式按列标自然排列的展开式.

证 对于行列式的一般项(行标为自然排列)

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n) = \tau(1 \cdots s \cdots t \cdots n) + \tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)$. 若对换 a_{sj_s} 与 a_{tj_t} 的位置，则行标排列和列标排列各作了一次对换，故新行标排列和新列标排列的逆序数的奇偶性都发生了改变，但两排列逆序数之和的奇偶性不变. 因此经过若干次对换后，行标排列和列标排列逆序数之和的奇偶性也不变，即当列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 变成自然排列，行标排列相应变成某个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 时，有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(12\cdots n)},$$

即

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$$

此时 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$，得证.

更一般地，n 阶行列式的一般项也可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 及 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列.

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 根据(1.10)式，行列式中的一般项只有当 $i_1=n,i_2=n-1,\cdots,i_{n-1}=2,i_n=1$ 时，才可能不等于零，所以

$$D=(-1)^{\tau(n\cdots21)}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}$$

注意，在以后的行列式计算中，例1.3、例1.4常作为重要结果直接应用.

1.3 行列式的性质

利用行列式的定义计算较高阶的行列式时，其计算量是相当大的，因此为了简化行列式的计算，有必要研究行列式的性质.

将行列式 D 的行、列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的转置行列式，简称转置，记作 D^{T}.

性质1 行列式转置，其值不变，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 若将行列式 D 及其转置 D^{T} 分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

根据转置的定义，有 $a_{ij}=b_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 因此将 D^{T} 按行标自然排列展开，得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \end{aligned}$$

此即为行列式 D 按列标自然排列的展开式，所以 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质1表明，行列式的行和列的地位是相同的，因此对于行成立的性质，对于列也一定成立.

性质2 互换行列式 D 的某两行(列)的位置，行列式的值变号.

证 若将行列式 D 及互换 D 的第 s 行、第 t 行后得到的新行列式分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则根据行列式定义，有