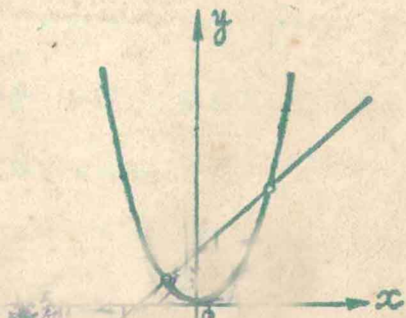
初中数学复习

（上 册）



合肥市教育局编

为了帮助初中毕业生进行全面、系统地复习，我室根据中央教育部制订的《中学数学教学大纲（初中部分）》的精神，编写了这本初中数学复习资料，供初中毕业生复习参考。

本资料分内容提要、例题、习题（分A·B两类）、综合题四部分，习题和综合题均给予提示和解答。

参加编写的人员有袁晓春、张家富、李载慈、李共桢、曹庆国、袁德伟、陶存瀛、俞蝶芳、赵世友。后由张家富、李载慈、袁晓春、赵世友等审阅定稿及校对工作。

由于我们的水平有限，时间仓促，缺点和错误在所难免，恳切希望广大师生批评指正。

合肥市教育局教研室

一九七九年八月

目　　录

代　数

第一单元　数 与 式 …………………………… 1

第二单元　方程与方程组 ……………………… 50

第三单元　不 等 式 …………………………… 82

第四单元　指数和对数 ………………………… 102

第五单元　函　　数 …………………………… 115

综 合 题 ……………………………………… 136

习题提示或答案 ……………………………… 143

代　　数

第一单元　数　与　式

复　习　要　点

一、数的拓展——实数

1.有理数：

（1）整数（正整数、负整数和零）和分数（正分数、负分数）总称为有理数。

（2）任何有理数都可以表示为$\frac{n}{m}$的形式，这里m是正整数，n为整数。

整数和可以化成十进分数的分数，都可以写成有限小数的形式。（例如：$0=0.0$，$-2=-2.0$，$\frac{4}{5}=0.8$）

不能化成十进分数的分数，可以写成无限循环小数的形式。（例如：$\frac{1}{3}=0.333\cdots\cdots$）所以任何一个有理数总可以写成有限小数或无限循环小数的形式。

反过来，任何一个有限小数或无限循环小数也都可以化成$\frac{n}{m}$的形式。所以有限小数和无限循环小数都是有理数。

2、无理数：

（1）无限不循环小数，叫无理数。

（2）用无限不循环小数表示的无理数，如果取它的小数

位数到有限数位，就得到它精确到这一小数位的不足近似值。如果在不足近似值最后的一位加上一个单位就得到精确度相同的过剩近似值。

（3）有效数字：在一个由四舍五入得到的近似数中，从左边第一个非零的数字起，到右边最末一位上，所有的数字，都叫做这个数的有效数字。

3·实　　数：

(1)有理数和无理数总称为实数。

(2)实数的系统表

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数……………………………………有限小数
      - 零……………………………………有限小数
      - 负整数……………………………………有限小数
    - 分数（正分数、负分数）—
      - 可以化成十进分数的　有限小数
      - 不可化成十进分数的无限循环小数　无限小数
  - 无理数（正无理数、负无理数）……………无限不循环小数　无限小数

4、实数与数轴：

(1)规定了原点、方向和长度单位的直线，叫数轴。

(2)实数和数轴上的点是一一对应的关系。实数的这种性质叫做实数的连续性。

5、实数大小的比较

实数充满了整个实数轴，因而，可以根据数轴上表示不同实数的点顺序不同，比较它们的大小。一般地说，数轴右边的数总比左边大。

(1) 正数都大于零和负数，负数都小于零。

(2) 两个正数，绝对值大的较大，绝对值小的较小。

(3) 两个负数，绝对值小的反而大。

二、几个重要概念：

1．绝对值：

在数轴上表示一个数的点与原点的距离，叫做这个数的绝对值；绝对值是一个非负数。

$$|X|\geqslant 0,\quad \therefore |X|=\begin{cases} X & (X\geqslant 0)\\ -X & (X<0)\end{cases}$$

即：正数和零的绝对值仍然是这个数。

负数的绝对值是它的相反数。

2．互为相反数

在数轴原点的两边与原点距离相等的两个点所表示的两个数，叫做互为相反数，其代数和为零。零的相反数仍是零。

若 $a+b=0$ 则 a、b互为相反数。

3．互为倒数

若 $ab=1$ 则 a、b 互为倒数。即 $a=\frac{1}{b}$。

4．互为负倒数

若 $ab=-1$ 则 ab 互为负倒数。即 $a=-\frac{1}{b}$。

三·实数的运算

1．正负数运算法则

（1） 加 法

A．两数同号相加，和的符号同于原加数的符号，和的绝对值等于两加数的绝对值和。

B．两数异号相加，和的符号同于绝对值较大加数的符号，和的绝对值等于绝对值较大的数减去绝对值较小的数。

（2） 减 法

一般转化为加法。 即 $a-b=a+(-b)$

（3） 乘除法

求两数的积或商，若两数同号，其积为正，等于两数绝对值的积或商。

（4） 乘　方

A．求相同因数的积的运算叫做乘方。

B．正数的任何次幂都是正数，负数的偶次幂是一个正数，负数的奇次幂是一个负数，零的任何次幂都是零。

（5） 开　方

A．如果$X^n=b$，那么x叫做b的n次方根，求一个数(b)的n次方根的运算，叫做开方。记作$x=\sqrt[n]{b}$（n为大于1的自然数）。

"$\sqrt[n]{b}$"：如果$b\geqslant 0$在实数集合中，$\sqrt[n]{b}$永远有意义。

如果$b<0$在实数集合中，n为奇数时，$\sqrt[n]{b}$有意义，n为偶数时，$\sqrt[n]{b}$无意义。

B．算术根：正数的正的方根，叫做这个数的算术根。零的算术根是零。在$a\geqslant 0$时，符号"$\sqrt[n]{a}$"都表示算术根。

2．实数的运算定律

(1) 交换律：$a+b=b+a$　$a\cdot b=b\cdot a$

(2) 结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

(3) 分配律：$a(b+c)=ab+ac$

3．实数的运算顺序

(1)运算的顺序：在实数的加、减、乘，除、乘方、开方六种运算中，加减是第一级运算，乘除是第二级运算，乘方和开方是第三级运算。在运算时，先算第三级再算第二级，最后算第一级。一个算式里，只有同级运算的，就依次运算；如果

有括号、就先解括号里的数。

（2）去括号和添括号

添上或去掉前面带"+"号的括号时、括号里各项的符号不变。

添上或去掉前面带"－"号的括号时，括号里的各项都要改变符号。

四、代 数 式

1．代数式的意义：一个用数字或字母表示数，并且用指明运算的种类（加、减、乘、除、乘方开方）和顺序的符号把它们连结起来的式子，叫做代数式。

在代数式中，应注意：

（1）用字母表示数的意义。

（2）代数式中变数字母的允许值范围。

2．代数式的分类：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式（根式）}\end{cases}$$

3．求代数式的值：用变数字母的允许值范围内的数代替代数式里的字母，计算所得的结果，叫做代数式的值。

计算代数式的值时，一般都是先化简再求值。

五、整式及其运算

1．整式：没有除法运算，或虽有除法运算，但除式分母中不含有变数字母的有理式，叫做整式。整式中的变数字母可以取一切实数。

2、单项式和多项式的次数：

（1）单项式的次数：在一个单项式中，各个字母的指数和叫做这个单项式的次数。

（2）多项式的次数：在多项式中，最高次项的次数，叫做这个多项式的次数。

3、整式运算：

（1）整式加减

A．同类项：多项式里的某些项如果所含的字母相同，并且相同字母的指数也分别相同，那么这些项叫做同类项。

B．合并同类项：把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母和字母的指数不变。

C．整式加减：首先根据去括号法则去掉括号，然后再合并同类项。

（2）整式的乘法：

A．正整数指数幂的运算法则：同底幂相乘，底数不变，指数相加 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$。它是整个整式乘法运算的基础。

B．单项式乘以单项式：应用乘法交换律、结合律以及幂的运算法则进行计算。

C．单项式乘以多项式：应用乘法对加法的分配律转化为单项式乘以单项式进行计算。

D．多项式乘以多项式：把其中的一个多项式的各项分别乘以另一个多项式的每一项，并将其所得的积相加。

E．乘法公式：在整式乘法运算中，往往可以直接使用乘法公式，从而使其运算简化。

① $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

③ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

⑤ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⑦ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑧ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

⑨ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

⑩ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$

（3）整式的除法：

A．正整数指数同底幂的除法运算：同底数幂相除，底数不变，指数相减。

$a^m \div a^n=a^{m-n}$

B．单项式除以单项式：把系数，同底数幂分别相除，作为商的因式，被除数单独有的字母，连同它的指数也作为商的一个因式。

C．多项式除以单项式：先把多项式的每一项除以这个单项式，再求商的代数和。

D．多项式除以多项式：一般可用竖式演算，方法同多位数除法相似，特别注意必须按其主要字母的降幂或升幂排列。

（4）整式的乘方：应用积的乘方和幂的乘方运算法则进行计算。　$(ab)^n=a^n \cdot b^n$　$(a^m)^n=a^{mn}$。

4、多项式的因式分解：

（1）因式分解的意义：把一个多项式化成几个整式的连乘积的形式，叫做多项式的因式分解。

（2）因式分解的一般方法：

A．提取公因式法。

B. 应用乘法公式分解法。

C. 分组分解法。分组分解法必须予见到下一步分解的可能性，（下一步可用提取公因式或用公式等）。把一个多项式进行分组时，有时可用拆项或添项减项的方法。即把某一项拆成几项或添减相同的项。

D. 二次三项式的因式分解。

① 十字相乘法

② 配方法

③ 用一元二次方程求根公式分解

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中$x_1$，$x_2$分别为二次三项式的两个根，用求根公式分解就是省去配方的过程，而直接写出结果。两者并无本质差别。

（3）因式分解的一般步骤：

a. 首先提取公因式。

b. 再看能否应用乘法公式或十字相乘法。

c. 公式或十字相乘法无法进行的，就用配方的方法来进行分解。

d. 以上方法无法使用时，就应全力考虑分组分解法。

e. 分解后的因式如能继续分解应继续分解。一直分解到指定的数的范围为止，如无特别指明，一般分解到有理数范围内。

（4）因式分解的检验：

a. 根据因式分解是乘法的逆运算的道理，可将各因式相乘，看其结果是否可以还原和多项式相等。

b. 根据多项式因式分解是一种恒等变形的道理，可用适当数字分别代入原多项式和分解后的结果中，看其值是否相等。如果相等则一般是正确的，否则一定是错了。

六、分式及其运算

1、分式：分母中含有字母的有理式，叫分式。

2、变数字母允许值：分式变数字母的允许值应是除式分母为零以外的一切数，分子可以是任何实数，在进行分式运算时应首先予以考虑取值范围。

3、分式的基本性质：分式的分子和分母都乘以或除以不等于零的同一个代数式，分式的值不变。

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{a\div m}{b\div m}$$（a、b、m为代数整式或实数 $m\neq o$）

4、约分、通分、最简分式

（1）约分：应用分式的基本性质，把分式的分子和分母的公因式约去，叫分式约分。

（2）通分：和分数的通分类似，根据分式的基本性质，把异分母的分式化成和原来的分式分别相等的同分母的分式，叫做分式的通分。

（3）最简分式：一个分式的分子，分母如果没有"I"以外的公因式，就叫做最简分式（既约分式）。

5、分式运算：

(1)分式加减法：

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c},\quad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

(2)分式乘法：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

(3)分式除法：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

(4)分式乘方：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

(5)分式开方：$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\left(\begin{array}{l}\text{当 } n \text{ 为偶数时 } a\geq 0,\ b>0\\ \text{当 } n \text{ 为奇数时 } b\neq 0\end{array}\right)$

(6)繁分式化简：

a. 和繁分数的化简类似，可以把繁分式写成分子除以分母的形式，利用除法法则进行化简。

例如：

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\div\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{b+a}{ab}\div\frac{b-a}{ab}=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}$$

$$=\frac{b+a}{b-a}$$

b. 可以利用分式的基本性质化简繁分式

例如：

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot ab}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot ab}=\frac{b+a}{b-a}$$

七·根式及其运算：

1. 根式的基本知识：

1. 根式和其中字母的允许值：当$\sqrt[n]{a}$ [illegible] 时[illegible]式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式。以后如果没有特别说明，根号下的文字都表示正数。

式子$\sqrt[n]{a}\left(\begin{array}{ll}\text{当}n\text{为偶数时} & a\geqslant 0\\ \text{当}n\text{为奇数时} & a\text{为一切实数}\end{array}\right)$

(2) 根式与分数指数幂：

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},\quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

(3) 算术根、算术平方根：

a. 正数的正的方根叫算术根(见前所述)。

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (a\text{为奇数，}a\text{为一切实数}) \\ |a|\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases} & (n\text{为偶数}) \end{cases}$$

当n为奇数，$a>0$时为算术根

b. 正数的正的平方根。叫算术平方根

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

(4) 根式的基本性质：

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}\qquad (a\geqslant 0)$$

2. 根式的基本公式

(1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

(2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

3. 几个重要概念：

(1)异次根式：根指数不相同的根式，叫异次根式。

(2)同次根式：被开方数不同而根指数相同的根式，叫做同次根式。

(3)同类根式：根指数和被开方数都相同的根式，叫做同类根式。

（4）最简根式：凡符合以下几个条件的根式，叫做最简根式。

a.被开方数的指数和根指数是互质数。

b.被开方数的每个因式的指数都小于根指数。

c.被开方数不含有分母；

根式演算结果，都应化成最简根式。

（5）分母有理化：将分母中的根式化去，叫做分母有理化。分母有理化的关键在寻找分母的有理化因式（两个含有根式的代数式相乘，如果它们的积不含有根式，那么这两个代数式相互叫做有理化因式）。

常见的有理因式有：

a。 $\sqrt[m]{A}$ $(m>n)$的有理化因式是$\sqrt[m]{a^{m-n}}$，

b。 $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$的有理化因式是$\sqrt{A}\mp\sqrt{B}$

c。 $A\pm\sqrt{B}$的有理化因式是$A\mp\sqrt{B}$

d。 $\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B}$的有理化因式是$\sqrt[3]{A^2}\mp\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$

e。 $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$的有理化因式是先取$(\sqrt{A}+\sqrt{B})-\sqrt{C}$，再取$(A+B+C)-2\sqrt{AB}$，两次进行，类似的分母有理化可以分多次进行。

4．根式化简：

根式化简就是将根式化成最简根式。

（1） 约简被开方数的指数和根指数$\sqrt[mp]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$

（2） 移根号内的因式到根号外面$\sqrt[m]{a^m b}=a\sqrt[m]{b}$

（3） 分母有理化

5．根式运算：

（1）根式的加减法：先把各个根式化成最简根式，再合并同类根式。

(2) 根式的乘除法：先把各个根式化成同次根式，然后再进行被开方数的乘除运算。

(3) 根式乘方：应用公式 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$、

(4) 根式开方：应用公式 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\quad\sqrt[m]{a}$

说明：

(1) 根号内的被开方数若为小数，带分数均应化为分数和假分数。

(2) 根号前面的系数可用假分数表示。

(3) 形如$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$的根式运算，是先将被开方数转化为某多项式的完全平方，然后开方。即令

$$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}$$

由此得到：$a+b=A$， $a\cdot b=B$联立成方程组，求出a、b。

例　　题

例1 计 算

(1) $-2^2+(-2)^2-(-3)^2-(-3)^3+(-1)^n$

(n为整数)

(2) $\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\div5+\frac{3}{7}\div(-2)-(-\frac{2}{5})\times(\frac{5}{7})$

(3) $\frac{1}{7}\times\left|-7^3\right|\div\left|3-10\right|-\frac{2}{21}\times\left|3-\left|2-4\right|+6\right|^2+\frac{11}{3}$

解 (1) 原式 $=-4+4-9-(-27)+(-1)^n$

$=-9+27+(-1)^n$

$=18+(-1)^n$

$=\begin{cases}19 & (n为偶数)\\ 17 & (n为奇数)\end{cases}$

(2) 原式 $=\frac{3}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{10}+\frac{3}{14}-\frac{2}{7}$

$$=-\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{5}{10}-\frac{7}{14}$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

(3) 原式 $=\frac{1}{7}\times 343\div 7-\frac{1}{21}\times\left|3-2-6\right|^{2}+\frac{11}{3}$

$$=\frac{1}{7}\times 343\times\frac{1}{7}-\frac{2}{21}\times 49+\frac{11}{3}$$

$$=\frac{1}{7}\times 49-\frac{14}{3}+\frac{11}{3}$$

$$=7-1$$

$$=6$$

例 2 指出下列各数哪些是有理数？哪些是无理数？

π，$\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{4}$，$\sqrt{2}$，0,020202……，0,020020002……，

解 π，$\sqrt{2}$，0，020020002……是无理数，

$\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{4}$，0，020202……是有理数

例3 将下列各数在数轴上表示出来，并按从小到大的顺序用"<"符号连结起来

2，-3，$-\frac{1}{2}$，$3\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{3}$，1,5，2,6