工業叢書

基礎科学〔3〕

三角

工業專门学校編

1948

工業叢書

基礎科學

三角

關東工業專門學校編

工業叢書1948年出版預告

1. 代　　　　　數
2. 幾　　　　　何
3. 三　　　　　角
4. 普　通　物　理
5. 普　通　化　學
6. 機　　械　　畫

工業叢書 基礎科學〔3〕 三 角

版權所有　不許翻印

1948年10月 初版

編輯者　關東工業專門學校 工業叢書編輯委員會
出版者　大連市廣和街 關東工業專門學校
印刷者　新生印刷廠

工業叢書卷頭語

舊中國是一個半殖民地半封建的社會。因此，舊中國的科學技術教育與科學技術工作也帶着濃厚的殖民地性買辦性，科學教材與參考書籍多係外國文原版或中文譯本，眞正根據中國實際需要並聯系中國實際的科學技術出版物則爲數不多。至於關東地區在日寇統治時代則從未出版中文科學技術書籍，現在被封鎖情況，內地出版的一些中文科學技術書籍，亦難於購到以作教材或供參考。本校爲此，特計劃編輯工業叢書，分別出版基礎科學，專門技術科學與其他科學技術參考書籍，以作本校或其他工業學校教材，並供生產技術工作者學習參考之用。編輯方針力求切合實際需要與聯系中國實際，俾有助於新中國科學技術事業的發展。

屈伯川

一九四八年三月於大連關東工專

前　言

本書是本校平面三角講義，由本校機械系教師張世鈞先生所編，在教學過程中曾經過刪補，內容較精練，易於理解，可作中學及工業學校教材之用。

關東工業專門學校工業叢書編輯委員會

1948年10月於大連

目　　次

第一章　銳角的三角函數

§ 1.　銳角的三角函數

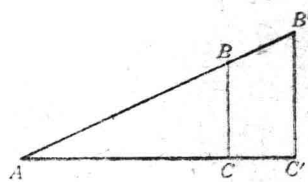
在任意的銳角 BAC 的一邊上，取任意的兩點 B，B′，由 B，B′向 AC 作垂線BC，B′C′時，則BC∥B′C′。

因此，　$\triangle BAC \backsim \triangle B'A'C'$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'},$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'},$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'},$$



就是說只要銳角 BAC 的大小不變，則上列各比的值也不能變，它們和 B，B′點的位置並無任何關係。因此，對於一個銳角 A的下列各量可下定義。

(i)　角 A的垂線對斜邊的比稱爲角 A 的**正弦**（sine）以符號sinA表示

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\cdots\cdots$$

(ii)　角A的底邊對斜邊的比稱爲角A的**餘弦**（cosine）以符號cosA表示，

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\cdots\cdots$$

(iii)　角 A的垂線對底邊的比稱爲角 A 的**正切**（tangent）以符號 tanA 表示

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\cdots\cdots$$

(IV) 角A的底邊對垂線的比稱爲角A的**餘切**(cotangent)以符號cotA表示，

$$\cot A=\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'}=\cdots\cdots$$

(V) 角A的斜邊對底邊的比稱爲角A的**正割**（secant）以符號secA表示，

$$\sec A=\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\cdots\cdots$$

(VI) 角A的斜邊對垂線的比稱爲角A的**餘割**（cosecant）

$$\operatorname{cosec}A=\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}=\cdots\cdots$$

根據以上的定義，就能得出下列各式：

$$\left.\begin{aligned}\cot A&=\frac{1}{\tan A}\quad\text{或}\quad \tan A\cdot\cot A=1,\\ \sec A&=\frac{1}{\cos A}\quad\text{或}\quad \cos A\cdot\sec A=1,\\ \operatorname{cosec}A&=\frac{1}{\sin A}\quad\text{或}\quad \sin A\cdot\operatorname{cosec}A=1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

以上所定義的sinA，cosA，tanA，cotA，secA，cosecA 等六個量就稱爲銳角A的三角函數。

其次，再把三角函數和實際問題聯系起來。我們常常聽到「某某電車路的坡度爲1/40」，這就是說：「這個電車路線在相隔40m 之間有 1 m 的高度差」，也就是說「這個電

車路線的坡的角度之正弦爲1/40」。再是光線從直上直下射來的時候，物體的影長對實長的比爲物體與水平面構成的角的餘弦。因此，物體的影長等於實長乘此角的餘弦。但假如光線要從斜面射來，而和水平面構成角度θ時，則直立於地面的物體的實長對其影長的比爲 $\tan\theta$。因此，物體的實長等於影長乘 $\tan\theta$。

習　　題

1. 於三角形ABC，設$\angle C=90^\circ$，$AC=12cm$，$BC=5cm$時，試求$\angle A$的正弦，餘弦，正切。
2. 於三角形ABC，設$\angle C=90^\circ$，$AC : BC=\sqrt{3} : 1$時，試求$\angle A$的三角函數。
3. 直角三角形三邊的比爲25 : 24 : 7時，試求其最小角的三角函數。
4. $\sin A=0.5$時，試求$\cos A$，$\tan A$的值。
5. $\cos A=\frac{5}{13}$時，試求$\sin A$，$\tan A$的值。
6. $\tan A=\frac{3}{5}$時，試求$\sin A$，$\cos A$的值。
7. $\sin\alpha=\frac{2mn}{m^2+n^2}$，且$m>n$時，求$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的值。
8. 有斷面爲等腰梯形的壕溝，其深爲h m，溝底寬爲a m，傾斜角爲α度時，求此溝的上寬。
9. 等腰三角形的相等邊及底邊的長短各爲10cm，7cm時，求底角及頂角的正弦與餘弦。
10. 設半徑各爲a，b $(a>b)$的二圓互相外切時，試求其外

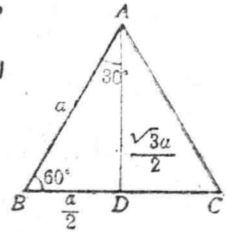
公切線與中心線所構成的角度的正弦，餘弦，正切。

§2. 30°，45°，60°角的三角函數

現在我們要研究幾個特殊的角的三角函數。首先從正三角形ABC的頂點A向底邊BC作垂線AD。設AB，BC，CA之長爲a，則於直角三角形ABD：

$\angle ADB=90°$，$\angle B=60°$，$\angle BAD=30°$，

而$AB=a$，$BD=a/2$。因此由幾何學的畢氏定理



$$AD=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

因此

$$\sin 60°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin 30°=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 60°=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2},\qquad \cos 30°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3},\qquad \tan 30°=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

其次於等腰直角三角形ABC，設 $AC=BC=a$，$\angle ACB=90°$時，由幾何學的畢氏定理

$$AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$$

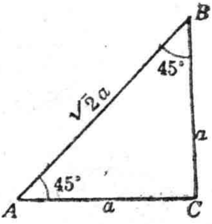
因此

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ$$

$$= \frac{a}{a} = 1$$



把以上的結果綜合起來就能得到下列的各式：

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots (2)$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^\circ = 1 \cdots\cdots (3)$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3} \cdots (4)$$

習　　題

1. 有一個煙筒，於距其基底100m處仰視其頂，得仰角30°。問此煙筒有多高？
2. 有30呎長的梯子，在距牆15呎遠的地面上放其下端而架之於牆上時，試求梯子和水平面構成的角度。
3. 在河岸上，有相距 100m 的二點 A，B。自 A，B 望對岸的一點 P，得 ∠PAB=60°，∠PBA=45°。試求兩岸的垂直距離。
4. 有一個10m高的大樓，從大樓的基底仰望某塔頂時，得仰角45°，而從樓頂仰望時，則得仰角30°，試求塔高。
5. 有大小二塔，大塔之高為36m，從大塔頂尖俯視小塔頂

尖及基底時，各得俯角30°及60°。試求小塔之高。

6. 從35m高的塔上，俯視在地面上位於正東的二亭，得俯角各為45°，60°。問二亭間的距離為若干？

7. 試求下列三角函數的和。

(i) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ + \tan 60^\circ$

(ii) $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ + \tan 30^\circ$

(iii) $\cos 60^\circ + \sin 45^\circ + \tan 45^\circ$

(iv) $\tan 30^\circ + \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$

8. 試證下列等式，

(i) $\tan 30^\circ\ (\tan 45^\circ + \cos 30^\circ) = \cot 60^\circ + \cos 60^\circ$

(ii) $\dfrac{\sin 60^\circ + \cot 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 45^\circ + \sec 30^\circ$

§ 3. 三角函數的眞數表

特殊角的三角函數在前節已經求出。但是其他角的三角函數是不能像那樣簡單求出來的。以往的數學家，曾利用微分積分學把各種角的三角函數計算出來，作成了一個表。所以現在我們只要利用這個表就能求出任意角的三角函數的值。這個表稱為**三角函數的眞數表**。在本書卷末列有正弦表，餘弦表，正切表。

例1：$\sin 32^\circ 48' = 0.5417$

先在正弦表左端上下欄裡找出32°，由此水平地往右看，再在上邊的示分欄裡找出48′，由此鉛直地往下看，在這個水平線和鉛直線的交點處得5417，

例2: 求$\sin 57^\circ 28'$的值。

用例 1 的方法，先查出 $\sin 57^\circ 24' = 0.8425$，再順着 57° 的水平線往右看，就可以找到比例部分表。在上邊的示分欄裡找出 $4'$，由此鉛直的往下看，和 57° 的水平線相交處得6,把 6 加到8425裡得8431。即

$$\begin{array}{l} \sin 57^\circ 24' = 0.8425 \\ \underline{\qquad 4' \qquad\qquad 6} \;(+ \\ \sin 57^\circ 28' = 0.8431 \end{array}$$

在這裡應當注意「比例部分的數字，併不限於加，也有應當減去這個數的時候」。例如先查出 $\sin 57^\circ 30' = 0.8434$

$$\begin{array}{l} \sin 57^\circ 30' = 0.8434 \\ \underline{\qquad 2' \qquad\qquad 3} \;(- \\ \sin 57^\circ 28' = 0.8431 \end{array}$$

因爲 $\sin 57^\circ 24' = 0.8425$，$\sin 57^\circ 30' = 0.8434$，而所求的 $\sin 57^\circ 28'$ 是在此二數之間。我們要根據這些具體情況來判斷是應當加還是應當減。

例 3: 求 $\cos 78^\circ 35'$ 的值。

由餘弦表

$$\begin{array}{l} \cos 78^\circ 30' = 0.1994 \\ \underline{\qquad 5' \qquad -14} \;(+ \\ \cos 78^\circ 35' = 0.1980 \end{array}$$

例 4: 求滿足 $\cos x = 0.6423$ 的 x 的值。

由餘弦表中找出和0.6423最接近的數，得

$$0.6428 > 0.6423 > 0.6414$$

而

$$\cos 50^\circ 0' = 0.6428$$

$$\cos 50^\circ 6' = 0.6414$$

$$0.6423 - 0.6414 = 0.0009$$

$$\begin{array}{rl} \cos 50^\circ 6' = 0.6414 & \\ -4' \qquad\quad 9 & (+ \\ \hline \cos 50^\circ 2' = 0.6423 & \end{array} \qquad \therefore \quad x = 50^\circ 2'$$

例 5: 求滿足$\tan x=0.9211$的x的值。

由正切表

$$\begin{array}{rl} \tan 42^\circ 36' = 0.9195 & \\ 3' \qquad\quad 16 & (+ \\ \hline \tan 42^\circ 39' = 0.9211 & \end{array} \qquad \therefore \quad x = 42^\circ 39'$$

習　　題

1. 爲什麼不需要餘切表，正割表，餘割表？
2. 在幾何講義上的三角函數表只取到45°，够不够用？爲什麼？
3. 試求下列各三角函數的值。

(i) $\sin 18^\circ 52'$　(ii) $\cos 38^\circ 48'$　(iii) $\sin 73^\circ 36'$

(iv) $\sin 27^\circ 42'$　(v) $\cot 65^\circ 23'$　(vi) $\cos 81^\circ 28'$

4. 試求滿足下列各式的x的值，但設x爲銳角。

(i) $\sin x=0.7282$　(ii) $\cos x=0.5165$

(iii) $\tan x=2.2709$　(iv) $\cot x=0.3225$

5. 設$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，試求$a=42$，$b=78$，$c=6$時，A是多少度？
6. 於距某樹 25m處仰視樹尖，得仰角 $25^\circ 30'$時，問樹多高？
7. 某道路的坡度爲1/60。求其傾斜角是多少度？
8. 日光與地面所構成的角爲55°時，某塔的影長是28m。求塔高。
9. 有一圓錐形的薄洋鐵桶，其含軸斷面的頂角爲54°。現在

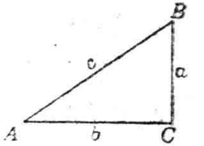
把半徑 2.6cm 的球裝入桶內，試求球的最下點和圓錐頂點之間的距離。

§ 4. 直角三角形的解法

三角形是由三個邊和三個角所構成的。在這六個要素中若知道三個要素（但必包含一個邊），則其餘的三個要素就能計算出來，這就是所謂「三角形的解法」。但於直角三角形，一角爲直角，因此，只要知其一邊和另一個要素，就能解這個三角形。

(I) **知其斜邊與一銳角時**：

例如，知其斜邊 c 及一銳角 A，



因 $\sin A=\frac{a}{c}$， $\cos A=\frac{b}{c}$

$$\therefore\quad a=c\sin A\ ,\ b=c\cos A\ ,\ B=90^\circ-A \cdots\cdots(5)$$

(II) **知其直角的一邊及一銳角時**：

例如，知其一邊b及一銳角A，

因 $\tan A=\frac{a}{b}$， $\cos A=\frac{b}{c}$

$$\therefore\quad a=b\tan A, c=\frac{b}{\cos A}\ ,\ B=90^\circ-A \cdots\cdots\cdots(6)$$

(III) **知其斜邊及另外一邊時**：

例如，知其斜邊 c 及另外一邊 a，

因 $\sin A=\frac{a}{c}$， $\cos A=\frac{b}{c}$，

設以符號 $\sin^{-1}k$表示滿足$\sin\theta=k$的角度θ時，則

$$A=\sin^{-1}\frac{a}{c}\ ,\ b=c\ \cos A\ ,\ B=90^{\circ}-A\cdots\cdots\cdots(7)$$

(IV) **知其直角的二邊時：**

因 $\tan A=\dfrac{a}{b}$， $\sin A=\dfrac{a}{c}$

$$\therefore\quad A=\tan^{-1}\frac{a}{b}\ ,\ c=\frac{a}{\sin A}\ ,\ B=90^{\circ}-A\cdots\cdots\cdots(8)$$

習　　題

1. 試解下列各直角三角形，但設$\angle C=90^{\circ}$。
   (i) $c=10m$，$\angle A=36^{\circ}$
   (ii) $a=20m$，$\angle B=35^{\circ}12'$
   (iii) $c=50m$， $b=40m$
   (iv) $a=4\,m$， $b=3m$
2. 於前圖，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$， 求證。
3. 有1英里長的坡路，某物體以等速度順此坡路下降，費時1小時，試求此物體的鉛直速度是多少呎/秒？但坡路的坡度爲1/100，1英里＝5280呎。
4. 在距塔120呎處仰視塔頂，得仰角25°。求塔高？
5. 某登山電車路的最大坡度爲1/7，試求此時坡路和水平面成多少度角？
6. 有一條坡路，直達某山頂，其長爲100m，而和水平面構成30°的傾斜角。今擬舖設一環道，使其傾斜角爲15°。試求新環道有多長？
7. 沿某河岸取40m長的基線AB，遙望對岸的一點P，測