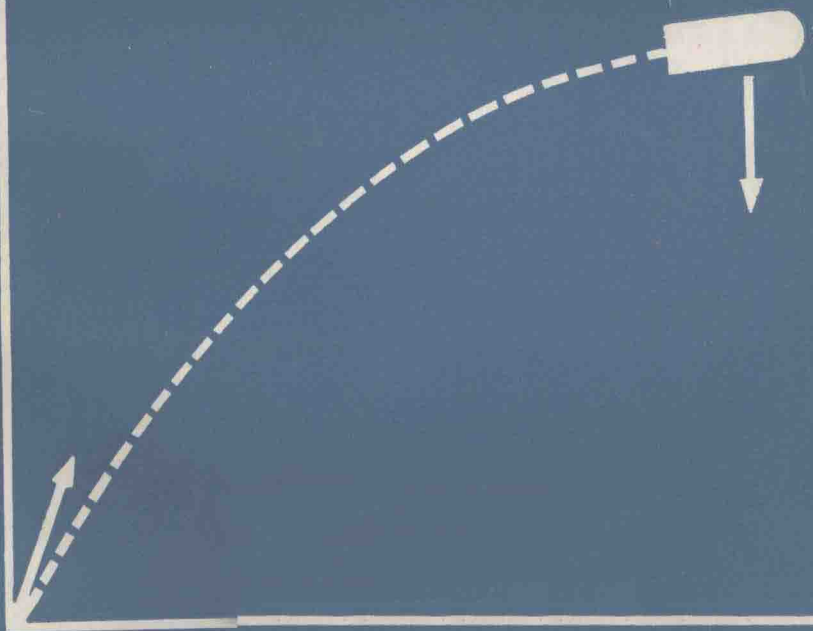


高等学校教学参考书

# 力学

下册

梁昆森 编



高等教育出版社

高等学校教学参考书

# 力 学

下 册

梁 昆 森 编

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书第一版是作者根据南京大学物理系1959年以来的授课讲义编写而成的。它对现行讲授体系作了一些改革试验, 试行解决“普通物理学力学部分”和“理论力学”两门课程部分内容的重复问题。上册内容主要是质点力学、质点组力学、刚体力学和振动与波等。下册内容包括: 上册复习提要, 刚体的定点运动, 达朗伯原理, 拉格朗日动力学, 哈密顿动力学, 力学变分原理, 正则变换, 弹性体, 流体运动学, 流体动力学, 并附有习题。本版除作必要修改外, 并附上全部答案。

本书的特点是注意通过图象及数学运算使学生掌握物理概念; 通过理论分析及例题示范, 训练学生的思考方法与运算能力。下册对分析力学及连续介质力学的一些重点与难点, 作了不少深入浅出、联系实际的阐述, 并注意了加强与其他理论课程的联系。

本书可作为综合大学, 高等师范院校物理系及其他高等学校相近专业的教学参考书, 也可供中学教师进修时参考。

本书责任编辑: 邹延肃

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日, 上级同意恢复“高等教育出版社”; 本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教学参考书

力 学

下 册

梁昆森 编

\*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 11.125 字数 267,000

1980年11月第1版 1982年9月第2版 1986年2月第4次印刷

印数 29,301—36,800

书号 13010·0539 定价 2.05 元

## 序 言

本书上册大致对应于综合大学物理系普通物理学力学部分，但对质点、质点组、刚体(除定点运动外)的处理，与普通物理力学相比，要深入详尽一些。下册大致对应于综合大学物理系的理论力学课程。它以“上册复习提要”作为开始，然后讲述刚体定点运动、分析力学和连续介质力学三部分。“上册复习提要”对于读过上册以后间断了不少时间才读下册的读者来说是一种复习，对于那些单独阅读下册的读者，也可以使学习过程比较顺利地开始。

总的说来，本书是一次探索(见上册序言)的记录，欢迎同志们提出意见。

梁昆森 1980年10月

这次再版时补入了本书习题答案，并作了一些必要的订正与修改。陈必武、陈冬保两同志协助作出本书习题答案，窦敖川同志也参加了此项工作，谨此致谢。

梁昆森 1982年7月

# 目 录

## 序言

§ 0. 上册复习提要	1
-------------	---

## 第一编 刚体的定点运动

第一章 刚体的定点运动	19
§ 1. 刚体运动学	19
(1) 刚体的运动 (2) 刚体内各点的运动 (3) 基点的选取 (4) 角速度矢量	
§ 2. 刚体的运动方程	24
(1) 运动定律 (2) 动量矩的分量表达式 (3) 惯量张量 (4) 欧勒方程 (5) 动能定理	
§ 3. 无外力矩的定点运动(欧勒-班锁情况)	35
(1) 对称刚体 (2) 非对称刚体 (3) 动平衡的稳定性	
§ 4. 欧勒角	43
§ 5. 对称重刚体的定点运动(拉格朗日-泊松情况)	45
(1) 欧勒方程及其第一次积分 (2) 解算和阐释 (3) 简明的解释	
§ 6. 带电的旋转物体在磁场中的进动(拉摩进动)	52

## 第二编 分析力学

第二章 达朗伯原理	55
§ 7. 约束	55
(1) 约束与自由度 (2) 约束反力 (3) 约束使问题复杂	
§ 8. 广义坐标	62
§ 9. 虚功原理 达朗伯原理	64
(1) 虚位移 (2) 虚功原理 (3) 引用广义虚位移 (4) 主动力全是势力的情况 (5) 拉格朗日乘法 (6) 达朗伯原理	
第三章 拉格朗日动力学	78

§ 10. 拉格朗日方程	78
(1) 广义坐标的引入 (2) 拉格朗日方程 (3) 主动力全是势力的情况 (4) 广义动量守恒原理 (5) 哈密顿函数守恒原理	
§ 11. 有心力 散射问题	94
(1) 拉格朗日方程 (2) 平方反比引力 (3) 平方反比斥力·散射问题	
§ 12. 多自由度系统的微振动	106
(1) 分子的振动 (2) 拉格朗日函数 (3) 简正振动 (4) 非简正坐标 (5) 证明 $\lambda^2 < 0$	
* § 13. 两种情况中的推广	118
(1) 狭义相对论中的拉格朗日函数 (2) 电磁场中的带电质点	
§ 14. 拉格朗日乘子法	120
<b>第四章 哈密顿动力学</b>	126
§ 15. 哈密顿正则方程	126
(1) 哈密顿正则方程 (2) 勒让德变换 (3) 守恒原理 (4) 例题	
§ 16. 刘维定理	141
§ 17. 维里定理	144
§ 18. 泊松括号	149
(1) 力学量的时间变化率 (2) 泊松括号 (3) 雅可俾恒等式 (4) 量子力学中的泊松括号	
<b>第五章 力学变分原理</b>	156
§ 19. 变分法初步	156
(1) 泛函 (2) 变分问题 (3) 欧勒方程 (4) 附加条件下的变分问题	
<b>题</b>	
§ 20. 哈密顿原理	163
§ 21. 最小作用量原理	167
(1) 循环坐标与哈密顿原理 (2) 雅可俾最小作用量原理	
<b>第六章 正则变换</b>	173
§ 22. 正则变换	173
(1) 正则变换的条件 (2) 母函数 (3) 正则变换举例 (4) 泊松括号的不变性 (5) 无限小正则变换	
§ 23. 哈密顿-雅可俾方程	186

(1) 哈密顿主函数 (2) 哈密顿特征函数 (3) 例题	
§ 24. 作用量变数与角变数	194
§ 25. 从“几何力学”到波动力学	200
(1) 从波动光学到几何光学 (2) 从“几何力学”到波动力学	

### 第三编 连续介质力学

第七章 弹性体	208
§ 26. 张变(或长变)	208
(1) 胡克定律·杨氏模量 (2) 泊松比·一般情况下的胡克定律 (3) 体积的改变·容积弹性模量 (4) 弹性限度·极限强度	
§ 27. 切变(或剪变)	215
(1) 切变 (2) 纯切变 (3) 切变模量与杨氏模量的关系 (4) 切变弹性势能密度	
§ 28. 圆杆的扭转	221
§ 29. 杆的弯曲	224
(1) 单纯弯曲 (2) 关于截面的形状 (3) 带有切变的弯曲	
§ 30. 胁变的一般分析	231
(1) 胁变张量 (2) 胁变主轴 (3) 体胀系数 (4) 相容条件	
§ 31. 胁强的一般分析	240
(1) 胁强张量 (2) 胁强主轴 (3) 胁强与胁变之间的关系 (4) 相容条件	
§ 32. 弹性体静力学	246
§ 33. 弹性体动力学	253
(1) 动力学基本方程 (2) 哈密顿原理·拉格朗日方程 (3) 弹性体中的波动	
第八章 流体运动学	257
§ 34. 流体运动学的特点	257
(1) 着重研究速度场 (2) 迹线与流线 (3) 当地变化率与实体变化率	
§ 35. 速度场的分析	262
(1) 速度场的一般分析 (2) 有旋流动与无旋流动 (3) 连续性方程	

第九章 流体动力学 .....	275
§ 36. 流体动力学的特点 .....	275
§ 37. 流体静力学 .....	277
(1) 流体的平衡方程 (2) 静止液体的自由表面 (3) 不可压缩流体中的静压强分布 (4) 可压缩流体中的静压强分布	
§ 38. 理想流体稳恒流动的运动定理 .....	282
(1) 动量定理 (2) 柏努利定理	
§ 39. 无粘滞流体动力学 .....	289
(1) 欧勒方程 (2) 欧勒方程的第一次积分 (3) 涡旋动力学 (4) 绕流对物体的作用力 (5) 欧勒方程的线性近似	
§ 40. 粘滞流体 .....	297
(1) 粘滞系数 (2) 直圆管的流量公式 (3) 运动定理 (4) 纳维尔-斯托克斯方程 (5) 雷诺数 (6) 边界层 [附]球体所受粘滞阻力	

附录 习题 答案



## § 0. 上册复习提要

### (1) 关于方法论

本书上册在方法论方面提出了以下注意点:

1. 区分主要因素与次要因素 任一物理现象总要牵涉到众多因素, 我们必须把起决定性作用、主要作用、次要作用、微不足道作用的各种因素加以区分, 否则即使对最简单的物理现象也不可能进行分析研究. 针对某一特定问题所涉及的实际对象, 应当只保留那些起决定性作用、主要作用的性质, 必要时最多再考虑某些起次要作用的性质, 坚决抛弃那些只起偶然作用或微不足道作用的因素, 这样就把实际对象抽象为模型. 例如, “质点”和“刚体”都是力学中常用的模型.

2. 掌握与运用变量与常量之间的辩证关系 初等物理学一般只考虑常量, 例如匀速、匀加速、常力. 但在客观世界中经常出现变速、变加速、变力. 因此, 首先需要学会在小区间上把变量作为常量处理再令小区间 $\rightarrow 0$ . 具体说, 就是用微分和积分处理变量. 例如, 对于  $x$  轴上的直线运动,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}, \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v};$$

$$x = x_0 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v(\tau) d\tau = x_0 + \int^t v(\tau) d\tau,$$

$$v = v_0 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum a(\tau) d\tau = v_0 + \int^t a(\tau) d\tau.$$

3. 建立“代数式”思考方法 初等物理所研究的问题虽然计算有繁有简, 但性质上都是比较单纯的. 人们往往可以从已知数直接算出某个未知数, 接着又可利用已求数依次推算出第二个、第三个未知数, 如此等等, 即沿着一条“链”推算下去. 但是, 在客观

世界的绝大多数现象中，各种物理量之间往往交织为错综复杂的“网”，“链”式推算法难以奏效。因此，应当通过具体分析，把已知、未知的各物理量间的错综复杂关系尽可能如实地表为“代数”方程，例如动力学中的运动方程。当然，这些方程很可能是微分方程，并不真的是代数方程。

## (2) 质点运动学基础

为描述物体的机械运动，首先要选定参考系统作为标准物体，运动就是相对于参考系统来描写的。

在参考系统上选定一点作为原点，质点的位置可用从原点到质点的矢径  $\mathbf{r}$  表示，质点的运动则由矢径随时间  $t$  的变化  $\mathbf{r}(t)$  描述。

在一段时间  $\Delta t = t_2 - t_1$  上，质点矢径的改变  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  叫做质点的位移。矢径对时间的平均变化率  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  叫做这段时间内的平均速度。令  $\Delta t \rightarrow 0$ ，平均速度  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  的极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

叫做质点在该时刻的(即时)速度  $\mathbf{v}(t)$ 。速度是矢量，它的大小  $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \mathbf{r}| / \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = ds/dt$  即速率  $v$ ，它的指向就是  $\Delta \mathbf{r}$  的极限指向即轨道的切向，以  $\mathbf{t}$  为切向单位矢量，则  $\mathbf{v} = vt$ 。

速度  $\mathbf{v}(t)$  的时间变化率  $d\mathbf{v}/dt$  即  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  叫做质点的(即时)加速度  $\mathbf{a}(t)$ 。作为速度的变化率，既要考虑速度大小的变化，也要考虑速度指向的变化。即

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} (vt) = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \dot{v} \mathbf{t} + v \dot{\theta} \mathbf{n},$$

式中  $\mathbf{n}$  是法向单位矢量，指向轨道凹侧。这样，切向加速度是  $\dot{v}$  即  $\dot{s}$ ，法向加速度是  $v\dot{\theta}$ 。  $v\dot{\theta}$  还可改写为

$$v\dot{\theta} = v \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d\theta}{ds} = \frac{v^2}{R}$$

以上矢量式适合于进行一般的理论探讨，而在具体问题的计算中却以使用坐标系较为简便。

古典力学认为空间是欧几里德的，即平直而无弯曲的。在欧几里德空间中可以建立**直角坐标系**，而任一矢量  $\mathbf{A}$  可用直角坐标分量表示为  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ ，其中

$$\begin{cases} A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A \cos \alpha, \\ A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A \cos \beta, \\ A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A \cos \gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \\ \cos \alpha = A_x / A, \\ \cos \beta = A_y / A, \\ \cos \gamma = A_z / A. \end{cases}$$

这样，在直角坐标系中，

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

对于平面问题，还可以建立**平面极坐标系**。任一矢量  $\mathbf{A}$  可用径向分量  $A_\rho$  与横向分量  $A_\varphi$  表示为  $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{i} + A_\varphi \mathbf{j}$ ，其中  $\mathbf{i}$  和  $\mathbf{j}$  分别是径向和横向单位矢量。注意  $\mathbf{i}$  和  $\mathbf{j}$  的指向随地点而异。这样，

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho \mathbf{i}, \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{i}) = \dot{\rho} \mathbf{i} + \rho \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\rho} \mathbf{i} + \rho \dot{\varphi} \mathbf{j}, \\ \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(v_\rho \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j}) = \dot{v}_\rho \mathbf{i} + v_\rho \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{v}_\varphi \mathbf{j} + v_\varphi \frac{d\mathbf{j}}{dt} \\ &= \dot{v}_\rho \mathbf{i} + v_\rho \dot{\varphi} \mathbf{j} + \dot{v}_\varphi \mathbf{j} + v_\varphi (-\dot{\varphi} \mathbf{i}) = (\dot{v}_\rho - v_\varphi \dot{\varphi}) \mathbf{i} + (\dot{v}_\varphi + v_\rho \dot{\varphi}) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

注意，径向加速度  $\dot{v}_\rho - v_\varphi \dot{\varphi}$  不仅来自径向速度的大小变化（即  $\dot{v}_\rho$ ），而且也来自横向速度的方向变化（即  $-v_\varphi \dot{\varphi}$ ）；横向加速度不仅来自横向速度的大小变化（即  $\dot{v}_\varphi$ ），而且也来自径向速度的方向变化（即

$v_p, \dot{\phi}$ ). 以  $v_p = \dot{\rho}$ ,  $v_p = \rho \dot{\phi}$  代入  $a$  的式子, 即得

$$a = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{i} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \mathbf{j}.$$

在轨道给定的情况下, 常用自然“坐标系”, 就是说用切向和法向分量表示矢量, 例如  $\mathbf{v} = vt$ ,  $\mathbf{a} = \dot{v}t + v\dot{\theta}\mathbf{n} = \dot{v}t + (v^2/R)\mathbf{n}$ .

### (3) 质点动力学基本定律

质点动力学问题可用一句话来概括: 通过具体分析而“代数式”地写出牛顿运动定律在具体问题中的表示式——运动方程. 中心问题在于写出运动方程. 通常运动方程是在适当的坐标系中用分量形式写出. 一旦写出运动方程, 问题就转化为数学问题. 正确写出运动方程的关键在于具体分析, 为具体分析创造条件还需要隔离物体. 归纳为十六字诀: 隔离物体, 具体分析, 选定坐标, 运动方程.

具体分析包括受力情况与运动情况的分析, 在运动情况中特别着重加速度.

不应只取特定时刻或将物体只取在特定位置来分析, 因为物体在特定时刻或特定位置的受力情况或其加速度, 并不足以确定物体的全盘运动情况. [参阅上册 § 19 例 7.]

每说到一个力, 应明确指出是哪一物体对哪一物体的作用, 以防止误列入一些并不存在的力 [参阅上册 § 19 例 4], 或把作用于甲物体的力误认为作用于乙物体 [参阅上册关于图 31 的讨论].

考虑某一物体受哪些力作用, 要注意它与哪些物体接触, 以防止遗漏某些力.

力学中常遇到的力有万有引力、弹性力和摩擦力.

弹性力取决于物体的形变程度, 后者又往往与物体的运动情况有关. 例如悬挂物体的绳或弹簧中的张力不一定等于所悬物体的重量, 张力大小视物体运动情况而定.

弹簧中张力可表为  $F = -kx$ , 原点  $x=0$  必须对应于弹簧既不

伸长也不压缩的情况。

静摩擦力的指向与接触处的相对滑动趋势相反。例如汽车启动时，主动轮与地面接触处的滑动趋势是向后的，所以主动轮所受静摩擦力向前，这正是推动汽车加速的牵引力！

静摩擦力的大小一般应作为未知数从运动方程解出。但静摩擦力的大小不可能超过静摩擦系数与正压力的乘积。

滑动摩擦力的指向与接触处的滑动方向相反，大小则等于滑动摩擦系数与正压力的乘积。

在约束运动中还有约束反力，它所体现的约束作用表现为实体的弹性力。约束反力一般应作为未知数从运动方程解出。有时，约束是单侧的，它允许质点在某种情况下从另一侧自由地脱离。如果解算出来的约束反力指向错误的一侧，这就意味着脱离了约束。

求解约束运动常用自然“坐标系”。对于光滑约束，通常先解切向运动方程  $m\ddot{s}=F_t$ ，解这方程的方法是改写  $\ddot{s}$  为  $\dot{s}d\dot{s}/ds$ ，这是以  $s$  为自变数的一阶导数，方程中出现的  $\cos\theta$  和  $\sin\theta$  ( $\theta$  是切向与  $x$  轴的夹角) 也改写为  $\cos\theta=dx/ds$ ， $\sin\theta=dy/ds$ ，统一用  $s$  为自变数然后积分。切向运动方程的第一次积分往往就是机械能守恒。解出切向方程后就可从法向方程解出约束反力。[参阅上册 § 14 例和 § 24 例 2。] 对于粗糙约束，可从切向方程和法向方程消去约束反力，再改写  $\ddot{s}=\dot{s}d\dot{s}/ds$ ，化方程为一阶微分方程，由此解出运动情况，然后即可用切向或法向方程计算约束反力。[参看上册习题 7.5 和 7.6。]

#### (4) 非惯性参考系统

质点相对于“静止”参考系统的“绝对”速度  $\boldsymbol{v}$  同它相对于运动参考系统的相对速度  $\boldsymbol{v}'$  之间的关系是

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

式中  $\mathbf{v}_0$  是运动参考系统的原点的速度,  $\boldsymbol{\omega}$  是参考系统相对于原点转动的角速度.  $\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  叫作牵连速度.

“绝对”加速度  $\mathbf{a}$  与相对加速度  $\mathbf{a}'$  之间的关系是

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

上式右边第二、三、四项是牵连加速度, 其中  $\mathbf{a}_0$  是运动参考系统的原点的加速度,  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  是质点随参考系统转动的向心加速度,  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  则叫作柯里奥利加速度.

由牛顿运动定律  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  知

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{a}_0 + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}',$$

$$\text{即} \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}',$$

其中  $\mathbf{F}'$  是惯性力,

$$\mathbf{F}' = -m\mathbf{a}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

上式右边的一  $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  是惯性离心力,  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  是柯里奥利力.

## (5) 质点动力学运动定理

从牛顿运动定律可以作出一些带有普遍意义的推论即所谓运动定理. 某些问题可以跳过运动定律直接从运动定理出发而简捷地得到解决.

$\mathbf{K} = m\mathbf{v}$  叫作质点的动量. 微分与积分形式的动量定理是

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{K}, \quad \int \mathbf{F} dt = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1,$$

其中  $\int \mathbf{F} dt$  称为力  $\mathbf{F}$  的冲量. 积分形式的动量定理特别适合研究冲击作用. 在冲击作用下, 质点速度改变  $\left( \int \mathbf{F} dt \right) / m$ .

如  $\mathbf{F} = 0$ , 动量定理成为动量守恒原理  $d\mathbf{K}/dt = 0$ ,  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1$ . 如

$\mathbf{F} \neq 0$ , 但  $F_x = 0$ , 则  $\mathbf{K}$  不守恒, 但  $K_x$  守恒.

取某一轴线, 称之为  $z$  轴. 微分与积分形式的动量矩定理是

$$M_z = \frac{d}{dt} J_z, \quad \int M_z dt = J_z|_{t_2} - J_z|_{t_1}.$$

式中力矩  $M_z$  和动量矩  $J_z$  按定义分别是

$$M_z = xF_y - yF_x, \quad J_z = xK_y - yK_x = mx\dot{y} - m\dot{x}y;$$

如果在  $xy$  平面中改用极坐标, 则

$$M_z = \rho F_\varphi, \quad J_z = \rho K_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi}.$$

如  $M_z = 0$  则动量矩  $J_z$  守恒.

对于点  $O$  的力矩  $\mathbf{M}$  和动量矩  $\mathbf{J}$  可以分别定义为  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{K}$ , 这里  $\mathbf{r}$  是从点  $O$  算起的. 它们在某一轴线上的投影恰好是对于该轴线的力矩和动量矩. 微分与积分形式的动量矩定理是

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \mathbf{J}, \quad \int \mathbf{M} dt = \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1.$$

如力矩  $\mathbf{M} = 0$ , 则动量矩  $\mathbf{J}$  守恒.

$T = \frac{1}{2} m v^2$  叫作质点的动能. 质点的动能定理是

$$W = T_2 - T_1,$$

式中  $W$  是作用于质点的合力  $\mathbf{F}$  所作的功  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

满足条件  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  (或记作  $\text{curl} \mathbf{F} = 0$  或  $\text{rot} \mathbf{F} = 0$ ) 的力所作的功, 只取决于起点和终点而与路径无关, 这种力叫作势力 (或保守力). 对于势力, 可引入势能  $V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + V_0$  而用势能的减少  $-(V_2 - V_1)$  表示力所作的功  $W$ . 势能可以加减任意的常数. 当质点高度变动不大时, 重力势能为  $mgh$ ; 当质点与地心的距离  $\rho$  变动较大时, 重力势能为  $-mgR^2/\rho$ . 弹簧系统的弹性势能为  $Ex^2/2$ , 这里  $x=0$  处必须对应于弹簧既不伸长也不压缩.

如果对质点作功的力全是势力, 动能定理成为机械能守恒原

$$\text{总 } T_2 + V_2 = T_1 + V_1.$$

一般说来,对质点作的功 $W$ 可以表示为两部分:一部分 $W_c$ 用势能的减少来表示,其余部分 $W_d$ 不能用(或虽能用而未用)势能的减少来表示,这时动能定理就成为**功能原理** $(T_2 + V_2) - (T_1 + V_1) = W_d$ .

功完成的快慢称为**功率**,功率可表为 $F \cdot v$ .

在转动情况下,功往往可用力矩表出为 $\int M d\varphi$ ,功率也用力矩表出为 $M\omega$ .

### (6) 质点组动力学

两质点彼此相互作用,但不受外力作用,这叫作**两体问题**.两体问题可归结为质点动力学.其实,即使两质点受外力作用,只要外力方向一致且正比于各自的质量,也可归结为质点动力学.这是因为,一方面有质心运动定理

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F}^{(e)},$$

式中质心的质量 $m_0$ 为两质点的质量之和 $m_1 + m_2$ ,质心的矢径 $\mathbf{r}_0$ 为两质点矢径的带权平均 $(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2)$ ;另一方面有相对运动的运动方程

$$m' \ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F},$$

式中折合质量 $m' = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , $\mathbf{r}'$ 是相对矢径, $\mathbf{F}$ 是相互作用力.

除两体问题以外,质点组动力学问题的运动微分方程的解算在数学上困难很大.因此,通过运动定理了解质点组运动的总趋向及其某些特征,具有很重要的意义.

质点组的动量、动量矩、动能指的是各质点的动量、动量矩、动能的总和,

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{J} = \sum_i \mathbf{J}_i, \quad T = \sum_i T_i.$$



这些物理量还可以用质心的相应物理量表示出来。质心是一个设想的质点，其质量  $m_0$  定义为各质点的质量之和，其矢径  $\mathbf{r}_0$  定义为各质点的矢径之带权平均，

$$m_0 = \sum_i m_i, \quad \mathbf{r}_0 = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / m_0.$$

质点组的动量  $\mathbf{K}$ 、动量矩  $\mathbf{J}$ 、动能  $T$  可以用质心的动量  $\mathbf{K}_0$ 、动量矩  $\mathbf{J}_0$ 、动能  $T_0$  表为

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}', \quad T = T_0 + T',$$

其中  $\mathbf{J}'$  和  $T'$  分别是质点组相对于质心的动量矩和动能。  $T = T_0 + T'$  又叫作柯尼希定理。

质点组的动量定理、动量矩定理、动能定理是

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(外)}, \quad \text{即} \quad m_0 \dot{\mathbf{r}}_0 = \sum_i \mathbf{F}_i^{(外)},$$

$$\frac{d}{dt} J_z = \sum_i M_{iz}^{(外)}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{J} = \sum_i \mathbf{M}_i^{(外)},$$

$$T_2 - T_1 = W^{(外)} + W^{(内)}.$$

动量定理也就是质心运动定理。由于牛顿第三定律，动量定理和动量矩定理不考虑内力。但内力的功不必为零，所以在动能定理中仍要考虑内力。不过，如果这质点组是刚体，则内力的功为零，这时动能定理可不考虑内力。

如果采用非惯性参考系统，这些运动定理仍然成立，但必须计及惯性力。如非惯性参考系统是随质心平动的质心参考系统，则惯性力系的力矩为零，惯性力系所作功也为零。

相应的守恒原理是

$$\mathbf{K} \text{ 守恒 (如 } \sum_i \mathbf{F}_i^{(外)} = 0), \quad K_x \text{ 守恒 (如 } \sum_i F_{ix}^{(外)} = 0),$$

$$J_z \text{ 守恒 (如 } \sum_i M_{iz}^{(外)} = 0), \quad \mathbf{J} \text{ 守恒 (如 } \sum_i \mathbf{M}_i^{(外)} = 0),$$

$$T + V \text{ 守恒 (如外力和内力全是势力).}$$