线性算子谱理论及其应用

王 忠 傅守忠 编著

科 学 出 版 社

线性算子谱理论及其应用

王　忠　傅守忠　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍线性算子及其谱的基本概念，无界对称算子、J-对称算子和 C-对称算子的扩张理论；主要讨论几类特殊算子(有界对称算子、有界正常算子、有界 C-对称算子、Hilbert-Schmidt 型算子、无界自伴算子、无界正常算子、无界 C-自伴算子)的谱理论及其在相关摄动下的谱分析；重点将上述相关的理论具体应用到微分方程边值问题形成的微分算子理论，特别地，关于自伴、非自伴微分算子的谱理论和谱分析，有效地解决了相应的微分方程边值问题.

本书适合于基础数学、应用数学以及相关专业的理工科研究生阅读，可供专门从事泛函分析、线性算子谱理论、微分算子理论研究的数学研究人员使用，也可供微分方程、非线性科学和量子力学等领域的科研及教学人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性算子谱理论及其应用/王忠，傅守忠编著. —北京：科学出版社，2013.3

ISBN 978-7-03-036942-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… ②傅… Ⅲ. ① 线性算子理论—谱(数学) Ⅳ. ① O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 042335 号

责任编辑：赵彦超 徐园园 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2013 年 3 月第一次印刷 印张：20
字数：388 000

定价：88.00 元

在曹之江先生80大寿之际，

学生谨以此书献给他！

前言

线性算子的谱理论, 是算子理论的主要组成部分, 是泛函分析的重要研究内容, 也是现代数学的基础理论. Hilbert 空间中关于有界对称算子和无界自伴 (自共轭) 算子的理论已有完备的理论体系, 将这些理论应用到其他数学分支, 如微分方程、积分方程等理论中, 很好地解决了现代数学中的许多重要问题. 利用线性算子的理论研究上述问题, 即产生了微分算子和积分算子. 数学物理和现代科技中的许多问题最终都归结为确定的微分算子和积分算子的特征值、特征函数及其相关函数的完备性, 以及将任意函数按特征函数及其相关的函数展开成级数 (或积分) 的问题. 特别地, 人们发现微分算子谱分析是解决许多量子力学问题的基本数学工具, 微分算子理论已成为量子力学的数学支柱, 所以, 微分算子理论一百多年来一直为人们所关注.

对于线性对称微分算式及其自伴边条件所生成的自伴微分算子, 利用完备的自伴算子理论, 可以定性地得到微分算子的谱分析. 由于微分算子的谱与其系数和边条件有着密切的联系, 所以, 定量分析微分算子的谱需要结合具体的分析方法. 在应用物理和工程力学中, 我们也经常碰到一些非对称或非自伴问题, 如在非自伴边条件下的对称微分算式, 以及在线性边条件下的非对称微分算式等所生成的微分算子. 对这些问题的定性定量分析, 不再有类似自伴算子那样完善的理论体系, 需要建立非自伴 (自共轭) 算子的谱理论作为其理论基础. 著名数学家 Naimark 认为只有有效地运用泛函分析的观点和方法, 才有可能深刻地了解微分算子理论并获得最一般的结果. 由于非对称和非自伴问题范围大且形式多种多样, 所以只能利用已有的算子理论, 并结合分析方法来研究相对应的微分算子的谱及其相关理论.

本书介绍线性算子及其谱的基本概念, 无界对称算子、J-对称算子和 C-对称算子的扩张理论; 主要讨论几类特殊算子 (有界对称算子、有界正常算子、有界 C-对称算子、Hilbert-Schmidt 算子、无界自伴算子、无界正常算子、无界 C-自伴算子) 的谱理论及其在相关摄动下的谱分析; 重点将上述相关的理论具体应用到微分方程边值问题形成的微分算子理论, 特别地, 关于自伴、非自伴微分算子的谱理论和谱分析, 有效地解决了相应的微分方程边值问题.

本书的主要结构: 第 1 章介绍线性算子及其谱的基本概念, 并给出线性算子谱的几种划分及其相互之间的关系; 第 2 章介绍有界对称算子、正常算子、无界自伴算子和无界正常算子的谱分解定理及其谱理论; 第 3 章介绍无界对称算子的扩张理论及其谱的变化, 以及自伴算子在相关摄动下的谱理论, 给出这些理论在对称微

分算子扩张理论中的具体应用; 第 4 章介绍有界 C-对称算子和无界 C-自伴算子谱理论及其应用; 第 5 章介绍无界 C-对称算子的扩张理论及其谱的变化, 以及这些理论在 J-对称微分算子的扩张理论和 J-自伴微分算子谱理论中的应用; 第 6 章介绍两类非自伴算子 ——Hilbert-Schmidt 算子和自伴算子加相关摄动所生成算子的谱理论及其在微分算子理论中的应用; 第 7 章利用第 4~6 章中非自伴算子的理论, 结合分析方法有效地解决了二阶非自伴微分算子谱的定性和定量分析.

本书是作者在为研究生开设算子理论及其在微分算子中的应用课程的基础上, 结合内蒙古大学微分算子讨论班成员和作者多年来从事微分算子理论研究的最新研究成果而形成的. 阅读本书需要有泛函分析和常微分算子理论的基础知识.

作者在写作过程中得到了研究生在文字录入和校对方面的帮助, 也得到了肇庆学院微分算子讨论班全体成员的帮助, 在此表示诚挚的谢意! 本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (项目编号: 11171295) 和广东省自然科学基金项目 (项目编号: 9251064101000015) 的资助, 作者在此表示深深的谢意! 由于作者的学识与能力有限, 书中难免会有偏颇和不当之处, 希望数学界的同仁不吝赐教.

作 者

2012 年 10 月

目　　录

第 1 章　线性算子及其谱

线性算子和线性泛函是线性空间之间的映射, 是泛函分析研究的主要对象. 本书主要研究几种类型特殊无界线性算子的扩张及其谱分解. 读者学习本书之前必须掌握线性空间、线性拓扑空间、线性赋范空间、Banach 空间、内积空间和 Hilbert 空间的相关知识及其基本性质.

1.1　线性算子的定义

算子是两个线性空间之间的映射, 是联系两个线性空间的桥梁, 通过算子的特性可以研究对应线性空间的结构, 也可以利用线性空间的结构研究算子的特性. 现代数学问题和现代物理学问题中的许多数学关系最终都归结为线性空间上的算子, 所以, 算子理论不仅是解决现代数学问题的有效工具, 而且也是现代物理学的数学支柱.

定义 1.1.1　设 X 和 Y 是两个线性空间, D 是 X 的一个线性流形,

$$T : D \to Y$$

是一个映射, D 称为 T 的定义域, 一般记为 $D(T)$; $R(T) = \mathrm{Ran}(T) = \{Tx | x \in D\} (\subset Y)$ 称为 T 的值域. 若

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \forall x, y \in D, \ \forall \alpha, \beta \in K \subset \mathbb{C},$$

那么称 T 是一个线性算子 (linear operator).

例 1.1.2　设 $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $T = (a_{ij})_{m\times n}$, 对于任意 $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$, 令

$$Tx = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)_{i=1}^m;$$

则 T 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个线性算子.

例 1.1.3　设 $X = Y = L^2[a, b]$, $P(D) = \sum\limits_{i=0}^n a_i(x) D^i$ 是一个微分多项式, 其中 $a_i(x) \in L^2[a, b]$. 若

$$T : u(x) \mapsto P(D)u(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) D^i u(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) u^{(i)}(x),$$

对于任意 $u(x) \in D(T) = \left\{u(x) \in C^{(n-1)}[a,b] \mid u^{(n)}(x) \in L^2[a,b]\right\}$, 则 T 是一个从 X 到 Y 的线性算子.

定义 1.1.4　设 X 和 Y 是线性赋范空间, $T: D(T) \to Y$ 是定义在 X 上并在 Y 中取值的线性算子. 如果对任意的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(T)$, 当 $x_n \to x_0 \in D(T)$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 那么, 称算子 T 在点 $x_0 \in D(T)$ 是连续的 (continuous). 如果 T 在 $D(T)$ 内的任意一点处连续, 则称线性算子 T 在 $D(T)$ 上连续.

命题 1.1.5　对于线性算子 T 而言, 下面三个条件等价:

(1) T 在 $D(T)$ 上连续;

(2) T 在 $x=\theta$ 处连续;

(3) T 在 $x_0 \in D(T)$ 处连续, 其中 x_0 是 $D(T)$ 中的某一固定点.

定义 1.1.6　设 X 和 Y 是线性赋范空间, 如果存在常数 $M>0$, 使得

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad \forall x \in D(T),$$

那么, 称算子 T 是有界的 (bounded), 其中, $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 分别表示空间 X 和 Y 上的范数.

命题 1.1.7　设 X,Y 是线性赋范空间, T 是 $D(T)$ 上连续线性算子当且仅当 T 是 $D(T)$ 上的有界线性算子.

定义 1.1.8　设 X 和 Y 是线性赋范空间, 用 $L(X,Y)$ 表示一切由 X 到 Y 的线性算子组成的集合, 用 $B(X,Y)$ 表示一切由 X 到 Y 的有界线性算子组成的集合, 称

$$\|T\| = \sup_{x \in X\setminus\{\theta\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

为算子 T 在 $L(X,Y)$ 上的范数 (norm).

容易验证: 在上述算子范数下, $L(X,Y)$ 是一个线性赋范空间.

显然, 例 1.1.2 中的线性算子 T 是一个有界线性算子, 而例 1.1.3 中的算子是无界算子.

定义 1.1.9　设 $D(T) \subset X$. 若 $T \in B(X,Y)$, 并且 T 将 $D(T)$ 中的任意有界集 M 映成 Y 中的预紧集 TM, 那么称线性算子 T 是紧线性算子(compact linear operator); 所有定义在 X 上 $(D(T)=X)$ 的紧线性算子组成的集合记为 $C(X,Y)$.

显然, $C(X,Y) \subset B(X,Y) \subset L(X,Y)$.

定义 1.1.10　设 X 和 Y 是 Banach 空间, T 是定义在 $D(T) \subset X$ 上、取值在 Y 中的一个线性算子, 其中, $D(T)$ 是 X 的一个线性子空间, $R(T) \subset Y$. 称乘积空间 $X \times Y$ 上的线性子空间:

$$\Gamma(T) = \{\langle x, Tx\rangle \in X \times Y \mid x \in D(T)\} \tag{1.1.1}$$

为线性算子 T 的图 (graph). 若图 $\Gamma(T)$ 在 $X \times Y$ 中是闭的, 就称算子 T 是闭线性算子, 或称 T 是闭的 (closed).

注 1 设 $D(T) \subset X$, $R(T) \subset Y$, 线性算子 T 是闭算子的充分必要条件: 若 $\{x_n\} \subset D(T)$, $x_n \to x \in X\ (n \to \infty)$ 且 $Tx_n \to y\ (n \to \infty)$, 则 $x \in D(T)$, 且 $y = Tx$.

注 2 $\|x\| = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ 称为线性算子 T 的图模. T 是闭算子当且仅当 $(D(T), \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间.

注 3 $X^* = B(X, \mathbb{R})$ 表示 X 上所有有界线性泛函组成的集合, 称为空间 X 的共轭空间 (对偶空间)(dual space).

定义 1.1.11 设 T 是 Banach 空间 X 到 Y 的稠定线性算子, 即 $D(T)$ 在 X 中稠密. 记

$$\begin{aligned} D(T^*) = \{y^* \in Y^* \big| \exists x^* \in X^*, \text{使得 } \forall x \in D(T), \text{都有} \\ (y^*, Tx) = (x^*, x), \text{即 } y^*(Tx) = x^*(x)\}, \end{aligned}$$

其中, X^* 和 Y^* 分别表示 X 和 Y 的共轭空间. 令

$$T^*:\ y^* \mapsto x^*, \quad \forall y^* \in D(T^*),$$

称 T^* 为 T 的共轭算子或伴随算子(adjoint operator), $D(T^*)$ 为 T^* 的定义域.

注 1 若 $D(T)$ 在 X 中稠密, 则 T^* 唯一确定, 而且也是线性算子.

$$\begin{array}{ccc} X \supset D(T) & \xrightarrow{T} & R(T) \subset Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^* \supset R(T^*) & \xleftarrow{T^*} & D(T^*) \subset Y^*. \end{array} \tag{1.1.2}$$

定理 1.1.12 任何稠定算子 T 的共轭算子 T^* 总是闭的, 而且当 $T_1 \subset T_2$ 时, $T_2^* \subset T_1^*$.

证明 令 V 是 $X \times Y$ 到 $Y \times X$ 上的映射,

$$V\langle x, y\rangle \mapsto \langle -y, x\rangle, \quad \forall \langle x, y\rangle \in X \times Y.$$

用 $Y^* \times X^*$ 表示空间 $Y \times X$ 的对偶, 则对 $\langle y^*, x^*\rangle \in Y^* \times X^*$,

$$(\langle y^*, x^*\rangle, \langle y, x\rangle) = (y^*, y) + (x^*, x) = y^*(y) + x^*(x).$$

设 $\Gamma(T^*) \subset Y^* \times X^*$ 是线性算子 T^* 的图, $\Gamma(T) \subset X \times Y$ 是 T 的图, 则 $\forall x \in D(T)$,

$$\langle y^*, x^*\rangle \in \Gamma(T^*) \Leftrightarrow (\langle y^*, x^*\rangle, V\langle x, Tx\rangle) = 0,$$

由此得 $\Gamma(T^*) = (V\Gamma(T))^{\perp}$, 故 T^* 总是闭的.

由共轭算子的定义可直接得到, 当 $T_1 \subset T_2$ 时, $T_2^* \subset T_1^*$. □

当 $X = Y$ 时, 若 T 是定义在 X 上并且取值在 X 上的稠定线性算子, 则 T^* 是定义在 X^* 上并取值在 X^* 上的稠定线性算子. 特别地, 若 X 是一个 Hilbert 空间, 则根据 Riesz 定理, X 与 X^* 是同构的, 即 $X = X^*$, 所以, T^* 也可以看成是定义在 X 上并且取值在 X 上的稠定线性算子.

定义 1.1.13 设 X 是一个 Hilbert 空间, T 是 X 到自身的一个稠定线性算子, 若 T^* 是 T 的扩张, 即 $T \subset T^*$, 则称 T 是对称算子 (symmetric operator); 若 $T^* = T$, 则称 T 是自伴 (自共轭) 算子 (self-adjoint operator); 若 T 可闭化, 且 $\overline{T}$ 是自伴的, 则称 T 是本质自伴算子 (essential self-adjoint operator).

注 1 根据共轭算子的定义以及 Riesz 定理, 对于 $\forall x \in D(T)$, $y \in D(T^*)$, 有

$$(Tx, y) = (x, T^*y).$$

注 2 稠定线性算子 T 是对称算子的充分必要条件是 $\forall x, y \in D(T)$, 都有

$$(Tx, y) = (x, Ty)\,. \tag{1.1.3}$$

注 3 对于有界算子而言, 自伴与对称是等价的. 对于无界算子则不然.

注 4 如果 T 和 S 都是对称的, 且 $T \subset S$, 则称 S 是 T 的对称扩张, 并且有

$$T \subset S \subset S^* \subset T^*. \tag{1.1.4}$$

如果 T 是自伴的, S 是对称的, 且 $T \subset S$, 则 $T \subset S \subset S^* \subset T^*$, 即有 $T = S$. 这说明自伴算子是其自身的极大对称扩张.

例 1.1.14 在 $L^2[0,1]$ 上的常微分算子

$$T_0' = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + p_0(t), \tag{1.1.5}$$

其中, $D(T_0') = C_0^\infty[0,1]$, $p_0 \in L^2[0,1]$ 是定义在 $[0,1]$ 上的非零实函数, 则

(1) T_0' 是稠定对称算子;

(2) T_0' 不是闭算子, 但可闭化; $T_0 = \overline{T_0'}$, 对 $\forall u \in D(T_0), T_0 u = T_0' u$, 其中,

$$D(T_0) = \{u \in L^2[0,1] \mid u''(t) \text{ 存在, 且 } T_0'u \in L^2[0,1], u(0) = u(1) = 0\};$$

(3) 共轭算子 $T_0^* = (T_0')^*$, $\forall u \in D(T_0^*)$,

$$T_0^* u = T_0'^* u = -u''(t) + p_0(t)\ u(t),$$

其中, $D(T_0^*) = \{u \in L^2[0,1] \mid u''(t)\text{存在, 且 } T_0'u \in L^2[0,1]\}$.

(4) 令

$$D(T) = \{u \in D(T_0^*) \mid u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0\},$$

其中, $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi/2$. $\forall u \in D(T)$,

$$Tu = -u''(t) + p_0(t)\, u(t),$$

容易验证 T_0 是对称算子, T 是自伴算子.

设 X 是复 Hilbert 空间, 若算子 $C : X \to X$ 满足 $C^2 = I$, 则称其为幂等的 (involutive); 算子 $C : X \to X$ 称为是反线性 (共轭线性) 的 (antilinear, conjugate-linear) 是指

$$C(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} Cx + \bar{\beta} Cy, \quad \forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \tag{1.1.6}$$

称算子 $C : X \to X$ 是等距的是指

$$(Cf, Cg) = (g, f), \quad \forall f, g \in X. \tag{1.1.7}$$

复 Hilbert 空间 X 上的一个幂等的、等距的反线性算子称为是 X 上的共轭算子 (conjugate operator), 记作 C.

显然, 如果 X 是一个复 Hilbert 空间, J 是 X 上取复共轭的映射, 即 $\forall y \in X$, $Jy = \overline{y}$, 则 J 是 X 上的共轭算子 (即 $Jf(x) = \overline{f(x)}$).

设 X 是一个复 Hilbert 空间, C 是 X 上的共轭算子, T 是 X 到自身的一个线性的、闭的稠定算子, 若 T^*C 是 CT 的扩张, 即 $CT \subset T^*C$(亦即 $T \subset CT^*C$), 或者等价于

$$(CTf, g) = (CTg, f), \quad \forall f, g \in D(T), \tag{1.1.8}$$

则称算子 T 是 X 上的 C-对称算子; 若

$$T = CT^*C \quad (\text{即 } CT = T^*C), \tag{1.1.9}$$

则称 T 是 X 上的 C-自伴(C-自共轭) 算子.

设 X 是一个复 Hilbert 空间, J 是 X 上取复共轭的算子, $\forall y \in X, Jy = \overline{y}$; T 是 X 到自身的一个稠定线性算子. 若 T^*J 是 JT 的扩张, 即 $JT \subset T^*J$(亦即 $JTJ \subset T^*$, 或 $T \subset JT^*J$), 则称 T 是 C-对称算子, 也称为 J-对称算子 (J-symmetric operator); 若 $JT = T^*J$(即 $T = JT^*J$), 则称 T 是 C-自伴 (C-自共轭) 算子, 也称为 J-自伴算子(J-self-adjoint operator).

我们将在第 4 章、第 5 章和第 7 章中对这类特殊算子重新给出定义, 并进行专门研究.

例 1.1.15 在例 1.1.14 中, 加入一个非零复项, 考虑 $L^2[0,1]$ 上的常微分算子

$$T_0' = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + p_1(t) + \mathrm{i}p_2(t), \tag{1.1.10}$$

其中, $p_1(t), p_2(t)$ 均为定义在 $[0,1]$ 上的非零实函数, $D(T_0') = C_0^\infty[0,1]$, 则

(1) T_0' 是稠定 J-对称算子;

(2) T_0' 不是闭算子, 但可闭化; $T_0 = \overline{T_0'}$, $\forall u \in D(T_0), T_0 u = T_0' u$, 其中,

$$D(T_0) = \{u \in L^2[0,1] \mid u''(t)\text{存在, 且}T_0'u \in L^2[0,1], u(0) = u(1) = 0\};$$

(3) 共轭算子 $T_0^* = (T_0')^*$ 为

$$T_0^* u = T_0'^* u = -u''(t) + (p_1(t) - \mathrm{i}p_2)\, u(t), \quad \forall u \in D(T_0^*),$$

$$D(T_0^*) = \{u \in L^2[0,1] | u''(t)\text{存在, 且}T_0'u \in L^2[0,1]\}.$$

(4) 令

$$D(T) = \{u \in D(T_0^*) \mid u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0\},$$

其中, $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi/2$, $\forall u \in D(T), Tu = -u''(t) + (p_1(t) + \mathrm{i}p_2(t))u(t)$, 容易验证 T_0 是 J-对称算子, T 是 J-自伴算子.

定理 1.1.16　设 T 是 Hilbert 空间 X 中的线性算子, 定义它的核

$$N(T) = \{x \in D(T) \mid Tx = 0\}, \tag{1.1.11}$$

(1) 若 $D(T)$ 在 X 中稠密, 则

$$N(T^*) = R(T)^\perp; \tag{1.1.12}$$

(2) 若 T 是闭算子, 则

$$N(T)^\perp = R(T^*). \tag{1.1.13}$$

证明　(1) 任取 $y \in N(T^*)$, 则 $T^*y = 0$, 于是对任意的 $x \in D(T)$,

$$0 = (x, 0) = (x, T^*y) = (Tx, y), \tag{1.1.14}$$

从而 $y \perp R(T)$, 即 $y \in R(T)^\perp$.

反之, 任取 $y \in R(T)^\perp$, 则对任意的 $x \in D(T)$,

$$0 = (Tx, y) = (x, T^*y), \tag{1.1.15}$$

又由于 $D(T)$ 在 X 中稠密, 所以 $T^*y = 0$. 从而 $y \in N(T^*)$. 故 $N(T^*) = R(T)^\perp$.

(2) 类似可证. □

定义 1.1.17　设 X 是 Hilbert 空间, U 和 N 是 X 到自身的有界线性算子, 若 $\|U\| = 1$(即 $U^*U = I$), 则称 U 为空间 X 上的酉算子 (或称为等距算子) (unitary operator); 若 $N^*N = NN^*$, 则称 N 为空间 X 上的正常算子 (normal operator).

注　自伴算子和酉算子均为正常算子.

1.2 预 解 算 子

为了方便研究算子的谱, 引入预解算子和预解算式及其性质.

定义 1.2.1 设 X 是 Banach 空间, $A: D(A) \subset X \to X$ 是闭线性算子, 称集合

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)\right\} = \{\lambda \in \mathbb{C} | (\lambda I - A)^{-1}\text{存在, 且} R(\lambda I - A) = X\}$$

为算子 A 的预解集(正则集)(resolvent set, regular point set), $\rho(A)$ 中的任何一点 λ 称为算子 A 的正则点 (regular point).

定义 1.2.2 算子值函数 $R_\lambda(A): \rho(A) \to B(X)$ 定义为

$$\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}, \quad \forall \lambda \in \rho(A), \tag{1.2.1}$$

称为 A 关于 λ 的预解算子函数, $(\lambda I - A)^{-1}$ 称为算子 A 的预解算式; 对某 $\lambda_0 \in \rho(A)$, 称 $R_{\lambda_0}(A)$ 为算子 A 对应正则点λ_0 的预解算子 (resolvent operator).

引理 1.2.3 设 A 是定义在 Banach 空间上的有界线性算子, 即 $A \in B(X)$, 且 $\|A\| < 1$, 则 $(I - A)^{-1} \in B(X)$, 并且

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{1.2.2}$$

证明 方法一: 由于 $\|A\| < 1$, 所以, $\|I - A\| \geqslant 1 - \|A\| > 0$, 因此 $(I - A)^{-1}$ 存在, 且

$$\|I\| = \|(I - A)(I - A)^{-1}\| \geqslant (1 - \|A\|)\|(I - A)^{-1}\|, \tag{1.2.3}$$

故

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

方法二: 由 Neumann 级数 $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 可得

$$\begin{aligned}\|(I - A)^{-1}\| &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right\| \leqslant 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \cdots + \|A\|^n + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \|A\|}.\end{aligned}$$

□

定理 1.2.4 如果 A 是定义在 Banach 空间 X 上的闭线性算子, 则 $\rho(A)$ 是开集.

证明 设 $\lambda_0 \in \rho(A)$, 则