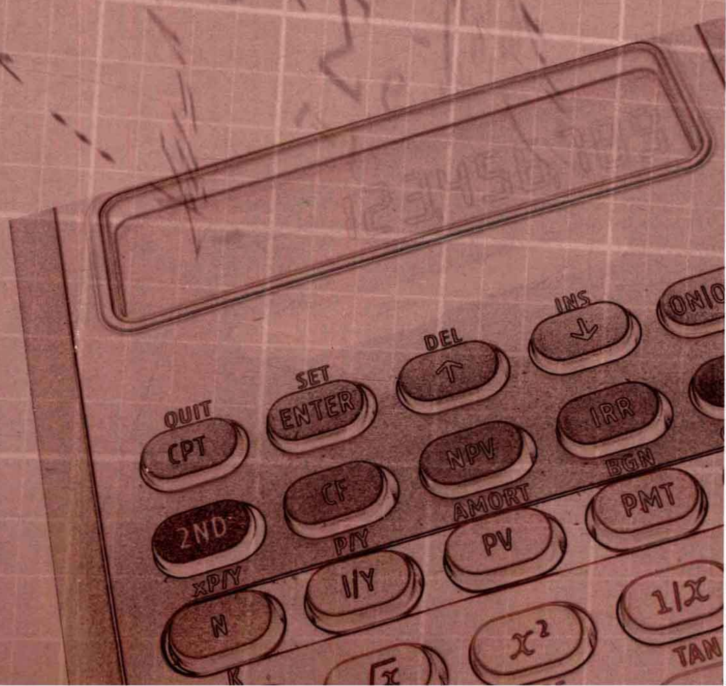
財務數學

◉ 林玉雲 編著

Financial Mathematics



滄海書局
Tsang Hai Book Publishing Co.

財務數學

◎ 林玉雲 編著

Financial Mathematics

滄海書局
Tsang Hai Book Publishing Co.

國家圖書館出版品預行編目資料

財務數學 / 林玉雲編著. -- 初版. -- 臺中市 :
滄海, 民 100. 09
面 ; 公分

ISBN 978-986-6184-57-4 (平裝)

1. 商業數學

493.1 100011533

滄海書碼 FI0118

財務數學

編著者 / 林玉雲

發行人 / 張麗紅
出版者 / 滄海書局
總經銷 / 滄海書局
地 址：40757 台中市西屯區台中港路二段 122-19 號 11 樓
電 話：(04) 2708-8787
傳 真：(04) 2708-7799
網 址：http://www.tsanghai.com.tw
E-mail：thbook@tsanghai.com.tw
中華民國 100 年 9 月初版一刷

ISBN 978-986-6184-57-4

Preface 序言

在 2001～2002 年間，美國因經濟成長衰退，資金銀根寬鬆，物價不斷下滑，美國聯邦準備理事會 (Fed) 為因應通貨緊縮，將利率降至 1%。直至 2004 年全球景氣開始復甦擴張，物價上漲，美國就業人口增加，國際油價走高，美國政府擔心物價會影響經濟的穩定，因此美國聯邦準備理事會 (Fed) 調升利率來抑制通貨膨脹。截至 2006 年 6 月底，升息至 5.25%，但是從 2007 年 9 月 18 日又開始降息，接著全球金融海嘯，至 2009 年 1 月降至利率約 1% 直到現在。

我國在 2000 年因國內利率在美國產生連動的壓力，加上有通貨緊縮現象，因此自 2000 年 12 月 29 日降息至 2003 年底，五大銀行 (台銀、合庫、一銀、華銀、彰銀) 一年期定存機動利率，從平均 5% 水準一路下降至 1.4%，2004 年 10 月 1 日首度升息，至 2008 年 6 月 26 日，一年期定存固定利率升至 2.7%，但於同年 9 月 26 日央行為大幅寬鬆國內資金供給，調降貼放利率各半碼 (0.125%)，接著全球金融海嘯至 2009 年 2 月 19 日，以台銀為例，一年定存只有 0.795%，在 2010 年 6 月 24 日首次升息半碼，至目前一年定存只有 1.35%。

由上述可知經濟成長快速與衰退，資金銀根寬鬆與緊縮，物價上漲或下跌，通貨緊縮或膨脹等等均與利率的升降有關。而在現今社會，信用卡、現金卡、房貸、車貸、學貸、公司投資貸款等多種貸款與現代人的經濟生活息息相關，無論個人、家庭、或企業公司都有財務交易活動，因此利息、收益率的計算在財務交易活動中顯得特別重要。又坊間許多理財儲蓄保險商品，理財專家獻策，「買基金」、「買債券」，但是該如何理財，才能使獲利最高，風險最小呢？

本書介紹複利、財務、金融最基本的數學知識和計算方法，內容包括利息、年金、分期攤還、債券、現金流量、投資收益率、貸款等。為使讀者更理解式子應用與計算，每節有多題實務例題配合說明，並且有習題供讀者練習演算。部分例題除了利用一般計算機或複利表計算外，亦以財務計算機計算，本書所使用財

務計算機是 TEXAS INSTRUMENTS 產品 BA II PLUSPROFESSIONAL。書中內容是本人多年在逢甲大學應用數學系教授複利數學與財務數學的講義，同學們對於以由淺入深實務例題瞭解各種財務計算和應用，反應非常好。本書主要參考美國 Society of Actuaries (精算協會) 和 Casualty Actuarial Society (事故精算協會) 的指定教科書 Stephen G. Kellison 所著之 *The Theory of Interest* 而編寫。

證照是就業市場護身符，中國時報 92 年 3 月 16 日報導考取美國保險精算師，月薪加 5 萬。隨著我國加入 WTO，取得國際金融證照更成為中高階主管晉升要件之一。本書將是金融、財務、精算證照考試的良好參考書之一。教育部於 98 年 7 月 28 日宣布預計 100 學年將「個人理財」融入教材，103 年納入國中基測試題，因此讀者與同學們宜加油，以跟上時代潮流。且善於理財亦勿忘幫助他人，美國前兩大富豪比爾．蓋茲 (Bill Gates) 與巴菲特 (Warren Buffett) 均是善於理財且樂於捐款，有施才能常保財富。

本書能順利出版，要感謝滄海書局編輯部一字一句辛苦詳細校對，以及余柏璁先生的幫忙，非常感恩。同時亦要感謝逢甲大學敦煌書局劉貴熒小姐推薦使用財務計算機，最後更要感謝應用數學系同仁和學生們，多年來讓本人在系裡教授複利數學與財務數學，而能不斷學習與精進。因才疏學淺，錯誤難免，尚祈專家學者指正，不勝感恩。

林玉雲 謹識

Contents

目錄

CHAPTER 3

基本年金的介紹與計算 73

CHAPTER 4

General Annuities

一般年金

CHAPTER 5

Amortization and Sinking Funds

分期攤還與償債基金

利息與利率

Interest and Interest Rate

本·章·大·綱 Chapter Outline

1

CHAPTER

1-1

介紹 (Introduction)

利息是投資利潤也是租金。最簡單的財物交易是將一筆款項投資一段時間，稱一段時間後的款額為**本利和** (amount)，原先投資款額稱為**本金** (principal)，而**利息** (interest) 是在這段期間所增加款額，因此是投資利潤；利息亦是租金的一種形式，因此貸款人借本金給借款人使用，借款人支付利息給貸款人以補償貸款人因本金無法使用的損失。

儲存、車貸 、房貸、信用卡、現金卡等基本理財於現代經濟生活裡是非常平常的事，借款人通常支付利息給貸款人。同時大多數人及企業公司認為能使用今天的金錢勝過於使用明天同額的金錢，因此每個人對利息觀念不但要有正確觀念，對利息計算亦要有概念，以免成為卡債族或信用破產。本章除了以簡易清楚方式進行各種利息量測分析外，亦以實例說明。

1-2

累積函數與本利和函數 (The Accumulation and Amount Function)

一般人處理財物的方法是將一筆款存入銀行或郵局滋生利息。

最初存入的金額稱為**本金** (principal)，某段時間後所獲得的總和稱為本利和或**累積值** (accumulated value)，本利和與本金的差值稱為**利息** (interest)。假設 t 代表從投資日起算至終止的時間稱為投資期 (measurement period)，在理論上單位時間可以有不同單位如日、月、季、年等 (如每年、每月、或每日)，所付利息與本金的比率稱為**利率** (rate of interest)。我們定義**累積函數** (accumulated function) $a(t)$，表示投資 1 單位，投資期為 t，$t \geq 0$ 的累積值。

函數 $a(t)$ 的性質如下：

1. $a(0) = 1$。
2. 在一般情況下 $a(t)$ 是遞增函數。如果投資資金於投資某時期後，資金反而減少，此時 $a(t)$ 將是遞減函數，例如近年日本銀行利率銳減至零利率，如果又需付銀行保管費時，$a(t)$ 即是遞減函數。
3. 若兩計息日之間利息不斷產生，此時 $a(t)$ 是連續函數，否則是非連續函數。

假設投資 K 單位 $(K > 0)$，定義**本利和函數** $A(t)$ (amount function) 為

$$A(t) = K \cdot a(t),\ \ t \geq 0 \tag{1.1}$$

$$A(0) = K$$

$A(0)$ 即是本金，當 $K = 1$ 時，本利和函數即是累積函數，因此我們常以累積函數來討論各種情況。

利息函數 $I(t)$ 為

$$I(t) = A(t) - A(0) = K(a(t) - 1) \tag{1.2}$$

在第 n 投資期所滋生利息 I_n

$$I_n = A(n) - A(n-1) \qquad n \geq 1, n \in Z$$

由定義可以知道 $A(t)$ 有函數 $a(t)$ 的第 2、3 性質。一般本利和函數有下列四種：

1. **線性本利和函數**：此函數表示每年獲得利息是一個固定常數 (如圖 1.1)。
2. **指數本利和函數**：此函數表示每年獲得利息隨著時間增加而增加 (如圖 1.2)。
3. **常數本利和函數**：此函數發生於零利率 (如圖 1.3)。
4. **階梯本利和函數**：此函數發生於兩計息日之間的利息是不連續產生 (如圖 1.4)。

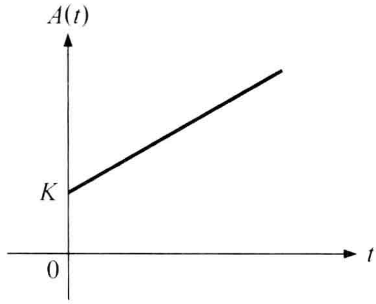


圖 1.1

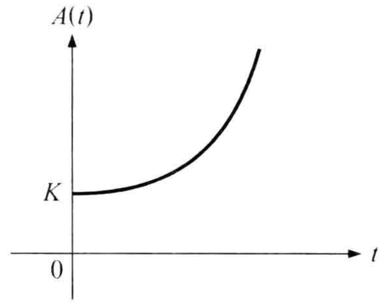


圖 1.2

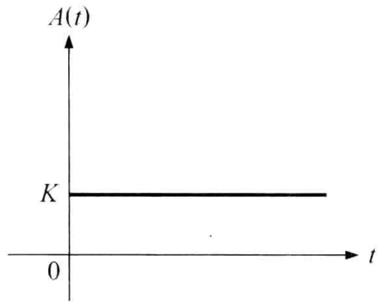


圖 1.3

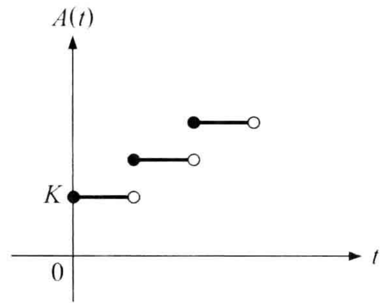


圖 1.4

實利率 (the effective rate of interest) 是在一投資期初投資 1 單位，於投資期末所獲得利息，即

$$i = a(1) - a(0) = a(1) - 1 \tag{1.3}$$

因此

$$a(1) = 1 + i$$

又

$$i = \frac{a(1) - a(0)}{1} = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)} \tag{1.4}$$

所以實利率又可以解釋為於投資期滋生的利息與投資期初投資金的比值。在第 n 投資期的實利率我們用 i_n 表示。

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \quad n \ge 1\ (n\ \text{是整數}) \tag{1.5}$$

注意

1. 實利率是在每一投資期間只計息一次 (在 1-5 節將討論在一投資期計息多次的情形)。
2. 在投資期間，投資金保持固定數額。
3. 常以百分數表示實利率。
4. 在利率變動時，一般媒體常使用名詞有基點和碼，100 個基點等於 1%，1 碼等於 0.25%。

例題 1.1

假設本利和函數 $A(t)=t^2+3t+2$。

(a) 試求所對應的累積函數 $a(t)$。

(b) $a(0)=1$ 嗎？

(c) $a(t)$ 是遞增函數嗎？$\forall t \geq 0$

(d) $a(t)$ 是連續函數嗎？

(e) 試求實利率。

(f) 試求 i_n。

解答

(a) 因為 $A(t)=t^2+3t+2$，所以 $A(0)=2, K=2$。又 $A(t)=Ka(t)=2a(t)$，因此

$$a(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}t+1$$

(b) 由 (a) 知 $a(0)=1$。

(c) 因 $a'(t)=t+\frac{3}{2}>0, t\geq 0$，由初等微積分可以知道累積函數 $a(t)$ 是遞增函數。

(d) $a(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}t+1$ 是多項式函數，由初等微積分知道 $a(t)$ 是連續函數。

(e) 實利率 $i=a(1)-1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+1-1=2$。

(f) $i_n = \dfrac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \dfrac{n^2 + 3n + 2 - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 2]}{(n-1)^2 + 3(n-1) + 2} = \dfrac{2n+2}{n^2+n}$

例題 1.2

試證明 $A(n) - A(0) = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$。

證明

因為

$$I_n = A(n) - A(n-1)$$

所以

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + \cdots + I_n &= A(1) - A(0) + A(2) - A(1) + \cdots + A(n) - A(n-1) \\ &= A(n) - A(0) \end{aligned}$$

即 $A(n) - A(0) = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$。

例題 1.3

在時間 $t = 0$ 時投資 10 萬元於投資基金 5 年，每年基金的結餘額如下表：

t	$A(t)$
0	100,000
1	106,000
2	111,350
3	116,425
4	121,925
5	127,625

(a) 如果於同一投資環境下在時間 $t = 2$ 時投資 5 萬元，試求在時間 $t = 5$ 時的累積值。

(b) 試求第 3 投資期的實利率，即 i_3。

解答

(a) 假設在時間 $t=2$ 時投資 5 萬，在時間 $t=5$ 的累積值為 S，則：

$$\frac{S}{50{,}000}=\frac{A(5)}{A(2)}=\frac{127{,}625}{111{,}350}$$

$$S=57{,}308.04\ (\text{元})$$

(b)
$$i_3=\frac{A(3)-A(2)}{A(2)}=\frac{116{,}425-111{,}350}{111{,}350}$$

$$=\frac{5{,}075}{111{,}350}\approx 0.0456=4.56\%$$

1-2 習題 Exercises

1. 假設累積函數 $a(t)=t^2+t+1$。
   (a) 試證 $a(0)=1$。
   (b) 試證 $a(t)$ 滿足其三個性質。
   (c) 試求實利率 i。
   (d) 試求 i_n。
2. 假設累積函數 $a(t)=\sqrt{1+(i^2+2i)t^2}, i>0, t\geq 0$。
   (a) 試證 $a(0)=1$ 且 $a(1)=1+i$。
   (b) 試證 $a(t)$ 遞增且是連續函數。
   (c) 試證 $a(t)<1+it, 0<t<1$，但是 $a(t)>1+it, t>1$。
   (d) 在 t 是夠大情況下，試證 $a(t)<(1+i)^t$。
3. 假設累積函數 $a(t)$，$a(0)=1$，且 i_n 是常數 $\forall n$。試證 $a(t)=(1+i)^t, \forall t\geq 0$，$t$ 是整數。
4. 已知累積函數 $a(t)=at^2+b$。如果在 $t=0$ 時投資 1,000 元，在時間 $t=3$ 時累積值是 1,450 元。試求在 $t=10$ 時的累積值。
5. 假設 $A(t)=100+5t^2$。
   (a) 試求所對應的累積函數。
   (b) 試求 i_5。