

財務數學

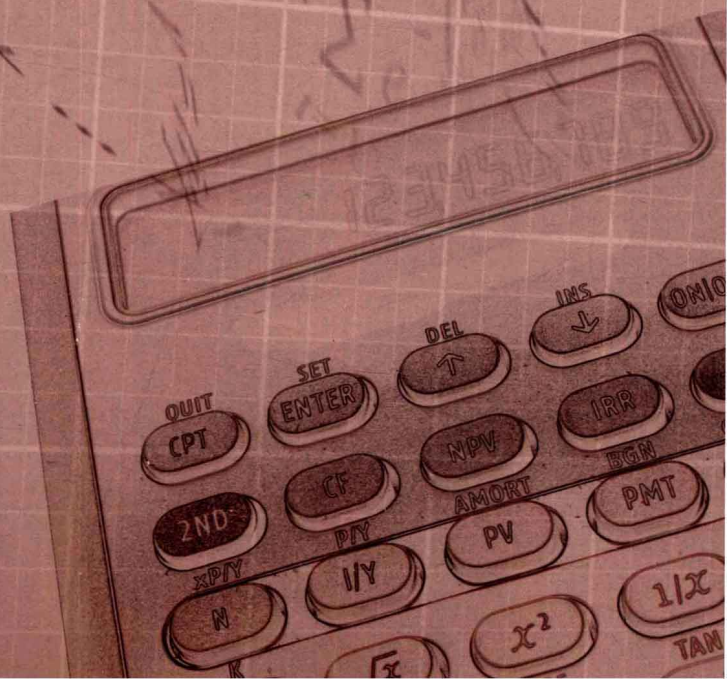
◎ 林玉雲 編著

Financial Mathematics



滄海書局

Tsang Hai Book Publishing Co.



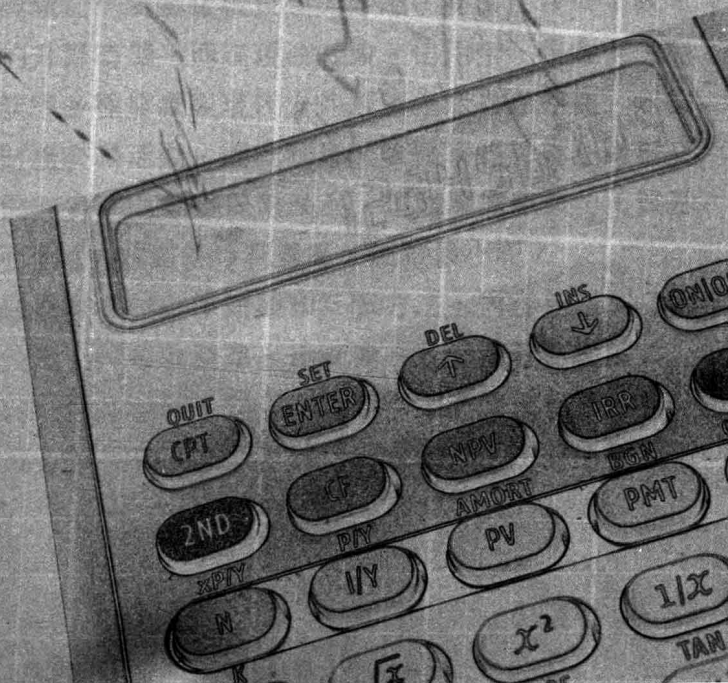
財務數學

◎ 林玉雲 編著

Financial Mathematics



滄海書局
Tsang Hai Book Publishing Co.



國家圖書館出版品預行編目資料

財務數學 / 林玉雲編著. -- 初版. -- 臺中市 :

滄海, 民 100. 09

面 ; 公分

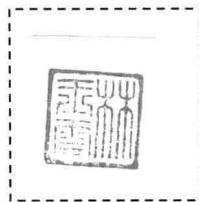
ISBN 978-986-6184-57-4 (平裝)

1. 商業數學

493.1

100011533

版權所有



翻印必究

滄海書碼 FI0118

財務數學

編著者 / 林玉雲

發行人 / 張麗紅

出版者 / 滄海書局

總經銷 / 滄海書局

地 址 : 40757 台中市西屯區台中港路二段 122-19 號 11 樓

電 話 : (04) 2708-8787

傳 真 : (04) 2708-7799

網 址 : <http://www.tsanghai.com.tw>

E-mail : thbook@tsanghai.com.tw

中華民國 100 年 9 月初版一刷

本書所有內容，未經編著者及本公司事前書面授權，不得以任何方式作全部或局部之

翻印、複印、仿製或轉載。

ISBN 978-986-6184-57-4



Preface

序言

在 2001~2002 年間，美國因經濟成長衰退，資金銀根寬鬆，物價不斷下滑，美國聯邦準備理事會 (Fed) 為因應通貨緊縮，將利率降至 1%。直至 2004 年全球景氣開始復甦擴張，物價上漲，美國就業人口增加，國際油價走高，美國政府擔心物價會影響經濟的穩定，因此美國聯邦準備理事會 (Fed) 調升利率來抑制通貨膨脹。截至 2006 年 6 月底，升息至 5.25%，但是從 2007 年 9 月 18 日又開始降息，接著全球金融海嘯，至 2009 年 1 月降至利率約 1% 直到現在。

我國在 2000 年因國內利率在美國產生連動的壓力，加上有通貨緊縮現象，因此自 2000 年 12 月 29 日降息至 2003 年底，五大銀行 (台銀、合庫、一銀、華銀、彰銀) 一年期定存機動利率，從平均 5% 水準一路下降至 1.4%，2004 年 10 月 1 日首度升息，至 2008 年 6 月 26 日，一年期定存固定利率升至 2.7%，但於同年 9 月 26 日央行為大幅寬鬆國內資金供給，調降貼放利率各半碼 (0.125%)，接著全球金融海嘯至 2009 年 2 月 19 日，以台銀為例，一年定存只有 0.795%，在 2010 年 6 月 24 日首次升息半碼，至目前一年定存只有 1.35%。

由上述可知經濟成長快速與衰退，資金銀根寬鬆與緊縮，物價上漲或下跌，通貨緊縮或膨脹等等均與利率的升降有關。而在現今社會，信用卡、現金卡、房貸、車貸、學貸、公司投資貸款等多種貸款與現代人的經濟生活息息相關，無論個人、家庭、或企業公司都有財務交易活動，因此利息、收益率的計算在財務交易活動中顯得特別重要。又坊間許多理財儲蓄保險商品，理財專家獻策，「買基金」、「買債券」，但是該如何理財，才能使獲利最高，風險最小呢？

本書介紹複利、財務、金融最基本的數學知識和計算方法，內容包括利息、年金、分期攤還、債券、現金流量、投資收益率、貸款等。為使讀者更理解公式應用與計算，每節有多題實務例題配合說明，並且有習題供讀者練習演算。部分例題除了利用一般計算機或複利表計算外，亦以財務計算機計算，本書所使用財

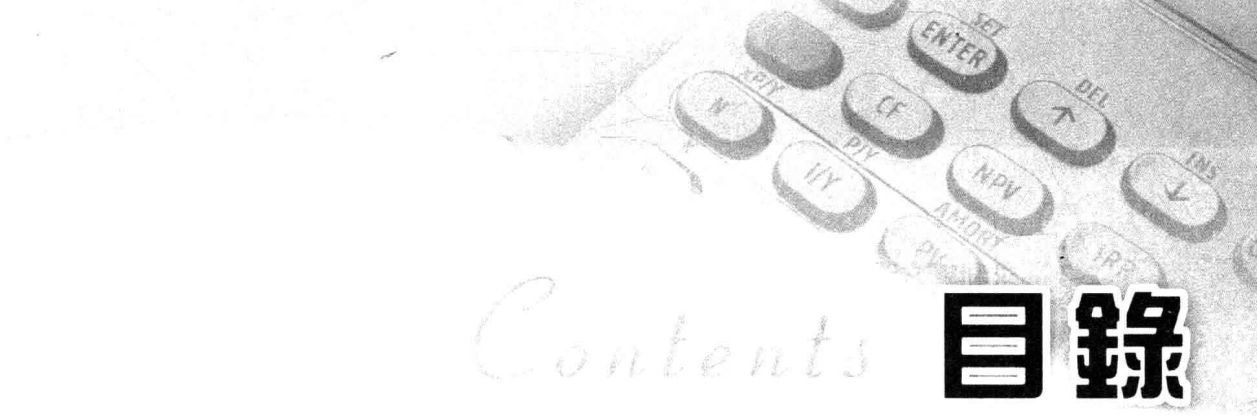


務計算機是 TEXAS INSTRUMENTS 產品 BA II PLUS PROFESSIONAL。書中內容是本人多年在逢甲大學應用數學系教授複利數學與財務數學的講義，同學們對於以由淺入深實務例題瞭解各種財務計算和應用，反應非常好。本書主要參考美國 Society of Actuaries (精算協會) 和 Casualty Actuarial Society (事故精算協會) 的指定教科書 Stephen G. Kellison 所著之 *The Theory of Interest* 而編寫。

證照是就業市場護身符，中國時報 92 年 3 月 16 日報導考取美國保險精算師，月薪加 5 萬。隨著我國加入 WTO，取得國際金融證照更成為中高階主管晉升要件之一。本書將是金融、財務、精算證照考試的良好參考書之一。教育部於 98 年 7 月 28 日宣布預計 100 學年將「個人理財」融入教材，103 年納入國中基測試題，因此讀者與同學們宜加油，以跟上時代潮流。且善於理財亦勿忘幫助他人，美國前兩大富豪比爾·蓋茲 (Bill Gates) 與巴菲特 (Warren Buffett) 均是善於理財且樂於捐款，有施才能常保財富。

本書能順利出版，要感謝滄海書局編輯部一字一句辛苦詳細校對，以及余柏聰先生的幫忙，非常感恩。同時亦要感謝逢甲大學敦煌書局劉貴熒小姐推薦使用財務計算機，最後更要感謝應用數學系同仁和學生們，多年來讓本人在系裡教授複利數學與財務數學，而能不斷學習與精進。因才疏學淺，錯誤難免，尚祈專家學者指正，不勝感恩。

林玉雲 謹識



Contents

目錄

CHAPTER

1

Interest and Interest Rate

利息與利率

1

1-1	介紹 (Introduction)	2
1-2	累積函數與本利和函數 (The Accumulation and Amount Function)	2
1-3	單利與複利 (Simple Interest and Compound Interest)	8
1-4	現值與貼現 (Present Value and Discount)	17
1-5	實利率與虛利率 (The Effective Rate and Nominal Rate of Interest)	27
1-6	息力和貼現力 (Force of Interest and Force of Discount)	37
1-7	變動利息 (Varying Interest)	46
1-8	主要名詞、符號和公式 (Name, Notation, and Formula)	50

CHAPTER

2

Solution of Problems in Interest and Its Application

利息計算法與應用

53

2-1	介紹 (Introduction)	54
2-2	價值方程式 (Equation of Values)	54

2-3	求利率方法 (Unknown Rate of Interest)	58
2-4	求投資期方法和 72 法則 (Unknown Time and 72 Rule)	62
2-5	投資期決定與部分付款 (Determining Time Periods and Partial Payments)	66
2-6	主要名詞、符號和公式 (Name, Notation, and Formula)	72

CHAPTER

3

基本年金的介紹與計算

73

3-1	介紹 (Introduction)	74
3-2	普通年金與遞延有限普通年金 (Annuity-immediate and Deferred Annuity-immediate)	75
3-3	到期年金與遞延有限到期年金 (Annuity-due and Deferred Annuity-due)	93
3-4	普通年金與到期年金的現行值 (Current Values of Annuity-immediate and Annuity-due)	100
3-5	永久年金 (Perpetuities)	102
3-6	非正規年金與利率 (Nonstandard Terms and Interest Rates)	108
3-7	未知年金時期和未知年金利率 (Unknown Annuity Time and Unknown Annuity Rate of Interest)	111
3-8	具變動利率的年金 (The Annuities with Varying Interest)	123
3-9	國民年金 (National Annuity)	125
3-10	勞保年金 (Labor Insurance Annuity)	127
3-11	主要名詞、符號和公式 (Name, Notation and Formula)	132

CHAPTER

4

General Annuities

一般年金

135

4-1	介紹 (Introduction)	136
4-2	定額年金 (Annuities which the Payments are of Level Amount)	136
4-3	基本變額年金 (Basic Varying Annuities)	152
4-4	一般變額年金 (General Varying Annuities)	179
4-5	連續年金 (Continuous Annuities)	186
4-6	各種定額年金現值表示法 (Present Value of Level Annuities for Various Payment Periods and Interest Conversion Periods)	193
4-7	主要名詞、符號和公式 (Name, Notation, and Formula)	194

CHAPTER

5

Amortization and Sinking Funds

分期攤還與償債基金

199

5-1	介紹 (Introduction)	200
5-2	未償還債款結餘額求法 (Finding The Outstanding Loan Balance)	200
5-3	分期攤還表和 78 法則 (Amortization Schedules and Rule of 78)	208
5-4	償債基金 (Sinking Funds)	227
5-5	變額支付款 (Varying Series of Payments) 與變動利率 (Varying Rate of Interest)	237
5-6	階梯型利率的本金額 (Step-Rate Amounts of Principal)	244
5-7	主要名詞、符號和公式 (Name, Notation, and Formula)	247

CHAPTER

6

Bonds and Other Securities

債券與其他有價證券

251

6-1	介紹 (Introduction)	252
6-2	債券與債券的價格 (Bond and Price of a Bond)	252
6-3	溢價、折價和債券分期攤還明細表 (Premium, Discount, and Bond Amortization Schedule)	260
6-4	介於息票兩付息日之間的估價 (Valuation between Coupon Payment Dates)	269
6-5	債券的收益率 (殖利率) (Yield Rate of a Bond)	275
6-6	可提前贖回債券 (Callable Bonds) 和可提前賣債券 (Puttable Bond)	284
6-7	收益率與息票的計息期不一致和利率非常數 (Yield Rate and Coupon Rate at Different Frequencies and Interest Rates not Constant)	290
6-8	其他類型債券 (Other Types of Bonds)	296
6-9	其他有價證券 (Other Securities)	303
6-10	主要名詞、符號和公式 (Name, Notation, and Formula)	306

CHAPTER

7

Discount Cash Flow and Yield Rates

現金流量與投資收益率

311

7-1	介紹 (Introduction)	312
7-2	現金流量貼現分析 (Discounted Cash Flow Analysis)	312
7-3	投資收益率 (Yield Rate)	316
7-4	再投資利率 (Reinvestment Rates)	322
7-5	基金收益率的量測 (Yield Rate Measurement of a Fund)	327

7-6	資產組合法與投資年法 (Portfolio Methods and Investment Year Methods)	338
7-7	賣空 (Short Sales)	341
7-8	資本預算規劃 (Capital Budgeting)	344
7-9	主要名詞、符號和公式 (Name, Notation, and Formula)	358

CHAPTER

8

實務應用

361

8-1	介紹 (Introduction)	362
8-2	信用貸款 (Truth in Lending)	362
8-3	汽車財務 (Automobile Financing)	368
8-4	不動產抵押貸款 (Real Estate Mortgages)	375
8-5	折舊法 (Depreciation Method)	383
8-6	資本化成本 (Capitalized Costs)	392
8-7	現代金融工具 (Modern Financial Instruments)	397
8-8	主要名詞、符號和公式 (Name, Notation, and Formula)	402

附錄

409

■ 附錄一	參考文獻	410
■ 附錄二	複利表	411
■ 附錄三	特殊函數表	427
■ 附錄四	習題解答	430

索引

439

利息與利率

Interest and Interest Rate

本章大綱

Chapter Outline

- 1-1 介紹 (Introduction)
- 1-2 累積函數與本利和函數 (The Accumulation and Amount Function)
- 1-3 單利與複利 (Simple Interest and Compound Interest)
- 1-4 現值與貼現 (Present Value and Discount)
- 1-5 實利率與虛利率 (The Effective Rate and Nominal Rate of Interest)
- 1-6 息力和貼現力 (Force of Interest and Force of Discount)
- 1-7 變動利息 (Varying Interest)
- 1-8 主要名詞、符號和公式 (Name, Notation, and Formula)

1

CHAPTER

介紹 (Introduction)

利息是投資利潤也是租金。最簡單的財物交易是將一筆款項投資一段時間，稱一段時間後的款額為本利和 (amount)，原先投資款額稱為本金 (principal)，而利息 (interest) 是在這段期間所增加款額，因此是投資利潤；利息亦是租金的一種形式，因此貸款人借本金給借款人使用，借款人支付利息給貸款人以補償貸款人因本金無法使用的損失。

儲存、車貸、房貸、信用卡、現金卡等基本理財於現代經濟生活裡是非常平常的事，借款人通常支付利息給貸款人。同時大多數人及企業公司認為能使用今天的金錢勝過於使用明天同額的金錢，因此每個人對利息觀念不但要有正確觀念，對利息計算亦要有概念，以免成為卡債族或信用破產。本章除了以簡易清楚方式進行各種利息量測分析外，亦以實例說明。

累積函數與本利和函數 (The Accumulation and Amount Function)

一般人處理財物的方法是將一筆款存入銀行或郵局滋生利息。

最初存入的金額稱為本金 (principal)，某段時間後所獲得的總和稱為本利和或累積值 (accumulated value)，本利和與本金的差值稱為利息 (interest)。假設 t 代表從投資日起算至終止的時間稱為投資期 (measurement period)，在理論上單位時間可以有不同單位如日、月、季、年等 (如每年、每月、或每日)，所付利息與本金的比率稱為利率 (rate of interest)。我們定義累積函數 (accumulated function) $a(t)$ ，表示投資 1 單位，投資期為 t ， $t \geq 0$ 的累積值。

函數 $a(t)$ 的性質如下：

1. $a(0) = 1$ 。
2. 在一般情況下 $a(t)$ 是遞增函數。如果投資資金於投資某時期後，資金反而減少，此時 $a(t)$ 將是遞減函數，例如近年日本銀行利率銳減至零利率，如果又需付銀行保管費時， $a(t)$ 即是遞減函數。
3. 若兩計息日之間利息不斷產生，此時 $a(t)$ 是連續函數，否則是非連續函數。

假設投資 K 單位 ($K > 0$)，定義本利和函數 $A(t)$ (amount function) 為

$$A(t) = K \cdot a(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

$$A(0) = K$$

$A(0)$ 即是本金，當 $K = 1$ 時，本利和函數即是累積函數，因此我們常以累積函數來討論各種情況。

利息函數 $I(t)$ 為

$$I(t) = A(t) - A(0) = K(a(t) - 1) \quad (1.2)$$

在第 n 投資期所滋生利息 I_n

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$$

由定義可以知道 $A(t)$ 有函數 $a(t)$ 的第 2、3 性質。一般本利和函數有下列四種：

1. 線性本利和函數：此函數表示每年獲得利息是一個固定常數 (如圖 1.1)。
2. 指數本利和函數：此函數表示每年獲得利息隨著時間增加而增加 (如圖 1.2)。
3. 常數本利和函數：此函數發生於零利率 (如圖 1.3)。
4. 階梯本利和函數：此函數發生於兩計息日之間的利息是不連續產生 (如圖 1.4)。

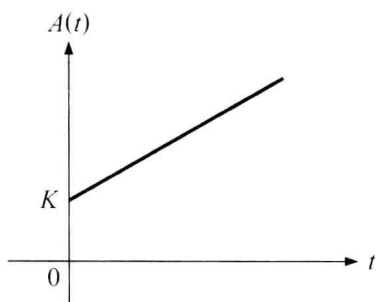


圖 1.1

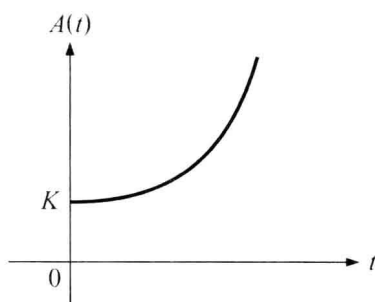


圖 1.2

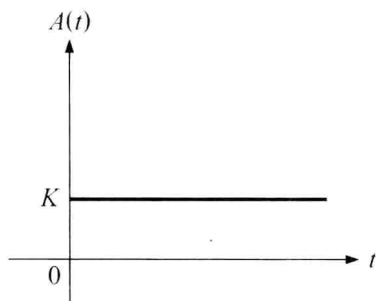


圖 1.3

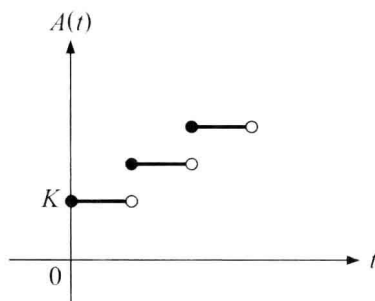


圖 1.4

實利率 (the effective rate of interest) 是在一投資期初投資 1 單位，於投資期末所獲得利息，即

$$i = a(1) - a(0) = a(1) - 1 \quad (1.3)$$

因此

$$a(1) = 1 + i$$

又

$$i = \frac{a(1) - a(0)}{1} = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)} \quad (1.4)$$

所以實利率又可以解釋為於投資期滋生的利息與投資期初投資金的比值。在第 n 投資期的實利率我們用 i_n 表示。

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \quad n \geq 1 \text{ (} n \text{ 是整數)} \quad (1.5)$$

注意

1. 實利率是在每一投資期間只計息一次 (在 1-5 節將討論在一投資期計息多次的情形)。
2. 在投資期間，投資金保持固定數額。
3. 常以百分數表示實利率。
4. 在利率變動時，一般媒體常使用名詞有基點和碼，100 個基點等於 1%，1 碼等於 0.25%。

例題 1.1

假設本利和函數 $A(t) = t^2 + 3t + 2$ 。

- (a) 試求所對應的累積函數 $a(t)$ 。
- (b) $a(0) = 1$ 嗎？
- (c) $a(t)$ 是遞增函數嗎？ $\forall t \geq 0$
- (d) $a(t)$ 是連續函數嗎？
- (e) 試求實利率。
- (f) 試求 i_n 。

解答

- (a) 因為 $A(t) = t^2 + 3t + 2$ ，所以 $A(0) = 2, K = 2$ 。又 $A(t) = Ka(t) = 2a(t)$ ，因此

$$a(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t + 1$$

- (b) 由 (a) 知 $a(0) = 1$ 。
- (c) 因 $a'(t) = t + \frac{3}{2} > 0, t \geq 0$ ，由初等微積分可以知道累積函數 $a(t)$ 是遞增函數。
- (d) $a(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t + 1$ 是多項式函數，由初等微積分知道 $a(t)$ 是連續函數。
- (e) 實利率 $i = a(1) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 - 1 = 2$ 。

$$(f) \quad i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{n^2 + 3n + 2 - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 2]}{(n-1)^2 + 3(n-1) + 2} = \frac{2n+2}{n^2+n}$$

例題 1.2

試證明 $A(n) - A(0) = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$ 。

證明

因為

$$I_n = A(n) - A(n-1)$$

所以

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + \cdots + I_n &= A(1) - A(0) + A(2) - A(1) + \cdots + A(n) - A(n-1) \\ &= A(n) - A(0) \end{aligned}$$

即 $A(n) - A(0) = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$ 。

例題 1.3

在時間 $t=0$ 時投資 10 萬元於投資基金 5 年，每年基金的結餘額如下表：

t	$A(t)$
0	100,000
1	106,000
2	111,350
3	116,425
4	121,925
5	127,625

(a) 如果於同一投資環境下在時間 $t=2$ 時投資 5 萬元，試求在時間 $t=5$ 時的累積值。

(b) 試求第3投資期的實利率，即 i_3 。

解答

(a) 假設在時間 $t=2$ 時投資5萬，在時間 $t=5$ 的累積值為 S ，則：

$$\frac{S}{50,000} = \frac{A(5)}{A(2)} = \frac{127,625}{111,350}$$

$$S = 57,308.04 \text{ (元)}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad i_3 &= \frac{A(3) - A(2)}{A(2)} = \frac{116,425 - 111,350}{111,350} \\ &= \frac{5,075}{111,350} \approx 0.0456 = 4.56\% \end{aligned}$$



1-2 習題

Exercises

- 假設累積函數 $a(t) = t^2 + t + 1$ 。
 - 試證 $a(0) = 1$ 。
 - 試證 $a(t)$ 滿足其三個性質。
 - 試求實利率 i 。
 - 試求 i_n 。
- 假設累積函數 $a(t) = \sqrt{1 + (i^2 + 2i)t^2}$, $i > 0, t \geq 0$ 。
 - 試證 $a(0) = 1$ 且 $a(1) = 1 + i$ 。
 - 試證 $a(t)$ 遞增且是連續函數。
 - 試證 $a(t) < 1 + it, 0 < t < 1$ ，但是 $a(t) > 1 + it, t > 1$ 。
 - 在 t 是夠大情況下，試證 $a(t) < (1 + i)^t$ 。
- 假設累積函數 $a(t)$, $a(0) = 1$ ，且 i_n 是常數 $\forall n$ 。試證 $a(t) = (1 + i)^t, \forall t \geq 0, t$ 是整數。
- 已知累積函數 $a(t) = at^2 + b$ 。如果在 $t=0$ 時投資1,000元，在時間 $t=3$ 時累積值是1,450元。試求在 $t=10$ 時的累積值。
- 假設 $A(t) = 100 + 5t^2$ 。
 - 試求所對應的累積函數。
 - 試求 i_5 。