

S01713

五年制專科學校用書

# 數 學

(微積分與微分方程)

趙良五編著

毛小五先生贈書  
年 月 日

臺灣商務印書館印行

五年制專科學校用書

# 數 學

(微積分與微分方程)

趙 良 五 編 著

臺灣商務印書館印行

中華民國六十年八月二版

五年制專科學校用書 數

學 (微積分與微分方程)

定價新臺幣三十五元正

編著者 趙良五

發行者 臺灣商務印書館股份有限公司

發行所及  
臺北市重慶南路一段三十七號  
臺灣商務印書館股份有限公司

登記證：內版臺業字第〇一三號

版權所有  
翻印必究

## 編 輯 大 意

1. 本書依據五年制專科學校所需之數學教材編輯而成，共分七冊，計幾何一冊，三角一冊，大代數兩冊，解析幾何一冊，微積分與微分方程一冊，供五年制各專科學校一至四年級數學教學之用。

2. 本書對於數學上之基本智識與概念，作有系統之敘述，故對於定義之解釋，力求詳盡；定理之證明，務求嚴密；敘述簡明扼要，俾使學生有正確之數學概念，養成完整之推理能力。

3. 本書在求理論與實用並重，故選用例題與習題，由淺而深，旨在使學生對於所習之理論與實用能融合貫通，力避學生僅記公式與定理之弊，使學生能學以致用，因而引起其自動，自發之學習興趣。

4. 本書雖經編者審慎從事，然訛誤之處，必所難免，尚祈海內方家隨時指正。

# 目 次

## 第一章 變數與極限

1—1	變數與常數	1
1—2	變數之區間	1
1—3	連續變更	2
1—4	函數	2
1—5	隱函數	3
1—6	極限	3
1—7	極限定理	4
1—8	函數之連續	8

## 第二章 導函數

2—1	導函數之概念	11
2—2	導函數之幾何意義	13
2—3	導函數之物理意義	17

## 第三章 微分法之基本公式

3—1	導言	23
3—2	常數之微分法	26
3—3	函數即自變數之微分法	26
3—4	函數和之微分法	27
3—5	常數與函數之積之微分	27

---

3—6	函數積之微分法	28
3—7	函數含有常數指數之微分法	28
3—8	函數商之微分法	29
3—9	複函數之微分法	30
3—10	反函數之微分法	30
3—11	對數函數之微分法	33
3—12	簡單指數函數之微分法	34
3—13	普通指數函數之微分法	35
3—14	正弦之微分法	38
3—15	餘弦之微分法	39
3—16	正切之微分法	39
3—17	餘切之微分法	40
3—18	正割之微分法	40
3—19	餘割之微分法	41
3—20	反正弦之微分法	43
3—21	反餘弦之微分法	44
3—22	反正切之微分法	45
3—23	反餘切之微分法	45
3—24	反正割之微分法	46
3—25	反餘割之微分法	47
3—26	隱函數之微分法	47
3—27	高階導函數	50

3—28	高階導函數之記法	51
3—29	高階微分法	52

## 第四章 導函數之應用

4—1	切線與法線之方程式	55
4—2	次切線與次法線之長	57
4—3	極坐標之曲線方向	60
4—4	極坐標曲線之交角	61
4—5	極坐標之次切線及次法線之長	61
4—6	極大與極小	63
4—7	轉向點	71
4—8	直坐標之作圖法	73
4—9	直坐標之弧之導函數	75
4—10	極坐標之弧之導函數	76
4—11	曲率	78
4—12	曲率半徑	81
4—13	曲率中心	84
4—14	速度 (Velocity)	86
4—15	分速度	87
4—16	加速度 (acceleration)	88

## 第五章 微分

5—1	微分觀念	91
5—2	微分公式	93

---

5—3	微分定理	97
5—4	近似之計算	98
5—5	誤差	101

## 第六章 不定積分

6—1	積分之意義	105
6—2	積分常數	106
6—3	積分基本性質	108
6—4	積分公式	111
6—5	公式(6—2)至(6—9)應用示範	112
6—6	公式(6—2)至(6—17)應用示範	114
6—7	代換積分法	116
6—8	分部積分法	120
6—9	有理分式之積分法	122

## 第七章 定積分

7—1	面積之微分	127
7—2	面積與定積分	128
7—3	定積分之性質	132
7—4	假積分	135

## 第八章 積分之應用

8—1	積分之基本定理	141
8—2	曲線與其兩動徑所包之面積	146



8— 3	旋轉體之體積	147
8— 4	曲線之長	148
8— 5	旋轉面之面積	150

## 第九章 立體解析幾何

9— 1	直角坐標	157
9— 2	二點間之距離	158
9— 3	直線之方向餘弦	159
9— 4	兩直線之夾角	163
9— 5	平面	166
9— 6	直線	170
9— 7	柱面	173
9— 8	柱面之方程式	174
9— 9	旋轉面之方程式	175
9—10	二次曲面	177

## 第十章 偏微分

10— 1	不止一個自變數之函數	180
10— 2	偏導微函數	181
10— 3	偏導微函數與斜率	183
10— 4	全增量與全微分	186
10— 5	自變數之更換	188
10— 6	隱函數之導微函數	191
10— 7	多變數函數之極大與極小	194

---

## 第十一章 重積分

11-1	偏積分	198
11-2	二次定積分	199
11-3	由二次定積分求平面上之面積	203
11-4	由三次積分求體積	206

## 第十二章 簡單之一級一次微分方程

12-1	微分方程	209
12-2	微分方程式之級與次	209
12-3	微分方程式之解	209
12-4	一級一次微分方程式之解	209
12-5	分離變數法	210
12-6	齊次式	211
12-7	可化爲齊次式者	212
12-8	正合式	214
12-9	平直式	216
12-10	可化爲平直式者	217

# 數 學

## 微 積 分 與 微 分 方 程

### 第一章 變數與極限

#### 1-1 變數與常數

變數：若一文字或一符號，可表示某一數集中之任一元素，則此文字或符號稱為變數；常以  $x, y, z$  等表之。

常數：若一文字或一符號，祇能表示某一數集中之一固定元素，則此文字或符號稱為常數。數集中之元素，可為  $1, \frac{1}{3}, \sqrt{2}, \pi, \dots$  或  $a, b, c, \dots$ 。前者稱為絕對常數，後者稱為任意常數。

#### 1-2 變數之區間

變數之範圍，稱為變數之區間。例如在某一問題中，變數限由 2 變至 15，即變數祇能配與 2 至 15 間之數值。一般言之，變數變更之範圍為由  $a$  變至  $b$ ，即變數只能配與  $a$  至  $b$  間之數值， $a$  與  $b$  可包含在內也可不包含在內，或一個在內。若兩端點  $a$  與  $b$  不包含在內，稱為開區間，以符號  $(a, b)$  表示；若兩端點  $a$  與  $b$  包含在內，稱為閉區間，以符號  $[a, b]$  表示；若  $a$  (或  $b$ ) 包含在內， $b$  (或  $a$ ) 不包含在內稱為半開區間，以符號  $[a, b)$  或  $(a, b]$  表示。

### 1-3 連續變更

一變數  $x$ ，由一值  $a$  向另一值  $b$  逐次增大，如在  $a$  與  $b$  之間，照數值之大小，依次取一切之值，稱為變數連續變更於一區間  $[a, b]$ 。

### 1-4 函數

設  $A$  與  $B$  為二集合，若對於  $A$  中每一元素，依某一關係， $B$  中有一元素與之對應，則此關係連同集合  $A$ ，稱為函數，且  $A$  稱為函數之領域，簡稱為函數域，與  $A$  中元素對應之元素之集合  $B$ ，稱為函數列。

常用文字  $f, g, h, \dots$  等表示函數，設  $x$  為函數  $f$  之函數域中任一元素，則與  $x$  對應之元素以  $f(x)$  表示之， $f(x)$  讀作「 $f$  在  $x$  點之值」。

〔例一〕設與集合  $A = \{x \mid x \text{ 爲實數}\}$  中每一數對應之實數為  $2x - 1$ ，若以  $f$  表此函數，則記作

$$f(x) = 2x - 1$$

或  $f: x \rightarrow 2x - 1$

〔例二〕設函數  $f$  之函數域為一切實數之集合，其中每一元素與函數列中每一對應元素之關係為此元素之平方，則  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 9$ ,  $f(0) = 0$ ;  $f(-3) = 9, \dots$ ，於是記作

$$f(x) = x^2$$

或  $f: x \rightarrow x^2$

有時用  $x$  表示函數域中之任一元素，用  $y$  表示函數列中之對應元素，此時函數可記作

$$y = f(x)$$

此時  $x$  稱爲函數之自變數， $y$  稱爲函數之應變數。

### 1-5 隱函數

若二數集合中之元素  $x$  與  $y$  之關係爲一未解出  $y$  (或  $x$ ) 值之方程式，如  $x^2 - y + 4 = 0$ ，或  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  之形式時，則稱爲隱函數。已解出  $y = f(x)$  之函數，稱爲顯函數。

### 1-6 極限

以幾何爲例：若定圓之內接或外切正多邊形之邊數愈增，則其面積將趨近於此圓之面積。換言之，多邊形之面積以圓面積爲極限 (limit)。再以數之序列爲例：

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}$$

其最後之極限值爲 1，所云極限，指趨近之數值，非相等之謂，即上述序列，祇在最後之數，接近於 1，決非其中有一數真正爲 1 也。

又如(圖1-1)：在曲線上取  $P, Q$  二點， $PQ$  爲曲線之割線，若  $Q$  點趨近於點  $P$  時，此  $PQ$  將以點  $P$  之切線  $PT$  爲極限。

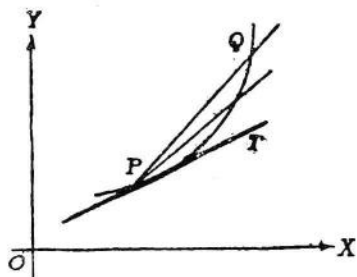


圖1-1

又若點  $Q$  趨近於點  $P$  時，弦  $PQ$  長將趨近于弧  $PQ$  之長，或  $PQ/PQ$  趨近於 1，而以 1 爲其極限。

設  $f(x)$  中  $x$  之值趨近於  $a$  時之極限爲  $A$ ，可用式表之如下：

當  $x \rightarrow a$ ,  $f(x) \rightarrow A$  或  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

此處  $x \rightarrow a$  包括兩種情況，即  $x$  值由右而左趨近於  $a$  時，則  $x \rightarrow a+$ ，如  $x$  值由左而右趨近於  $a$  時，則  $x \rightarrow a-$ 。如  $f(x) \rightarrow A$ ，則  $f(x) - A \rightarrow 0$ ，故一函數與其極限間之差為一無限小，反之，若一函數與一常數之差為一無限小，則此函數趨近於此常數為其極限。

### 1-7 極限定理

設  $u, v$  及  $w$  皆為變數  $x$  之函數，且

$$\lim_{x \rightarrow a} u = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} v = B, \quad \lim_{x \rightarrow a} w = C,$$

$$\text{則 } \lim_{x \rightarrow a} (u + v - w) = A + B - C \quad (1-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (uvw) = ABC \quad (1-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B}, \quad \text{但 } B \neq 0 \quad (1-3)$$

即一代數和，積，或商之極限，分別等於其各別之極限之同一代數和，積，或商。惟商極限之分母不能為零。

[證] 設  $u - A = i$ ,  $v - B = j$ ,  $w - C = k$  式中  $i, j$  及  $k$  皆  $x$  之函數，而於  $x \rightarrow a$  時各趨近於零，換言之；彼等均為無限小。因得

$$(u + v - w) - (A + B - C) = i + j - k = e,$$

式中  $e$  亦無限小也，故  $u + v - w$  趨近於  $A + B - C$  為其極限，即式(1-1)成立。

若設  $u = A + i$ ,  $v = B + j$ ，則

$$uv - AB = Aj + Bi + ij = e,$$

故  $uv$  趨近於  $AB$  為其極限，更推廣及  $uvw$  之積，知式 (1-2) 成立。

$$\text{又 } \frac{u}{v} - \frac{A}{B} = \frac{A+i}{B+j} - \frac{A}{B} = \frac{Bi - Aj}{B(B+j)} = \frac{e}{B^2} = e, \quad (B \neq 0)$$

故  $\frac{u}{v}$  趨近於  $\frac{A}{B}$  為其極限，此式 (1-3) 也。

設  $C$  為常數， $u$  為  $x$  之函數，由極限定理可得推論如下：

$$\lim_{x \rightarrow a} (u + C) = A + C \quad (1-4)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} Cu = CA \quad (1-5)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{C}{u} = \frac{C}{A} \quad (1-6)$$

上述極限定理及其推論，多用於第三章微分法基本公式之證明。

〔例一〕求  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x - 1)$  之值。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 3} (x \cdot x) - 2 \lim_{x \rightarrow 3} (x) - 1 \\ &= 9 - 2 \times 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

〔註〕此處計得答數，乃  $x \rightarrow 3$  時  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  之極限值，與  $f(3)$  不同，雖  $f(3) = 2$ ，然其意義則殊。

〔例二〕求  $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t^2 - 3t + 2}$  之值。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t^2 - 3t + 2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \left( \frac{t-2}{t-2} \right) \left( \frac{t+2}{t-1} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t+2}{t-1} = 4. \end{aligned}$$

〔註〕若  $t = 2$  時， $\frac{t-2}{t-2} = 1$ ；然  $t \rightarrow 2$  時， $\frac{t-2}{t-2} \rightarrow 1$ ，即  $\lim_{t \rightarrow 2}$

$$\frac{t-2}{t-2} = 1.$$

〔例三〕 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 3}{2x^3 + x + 1}$  之值。

〔解〕

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 3}{2x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2}.$$

〔註〕 若  $x = \infty$ ，原分式變為  $\infty/\infty$ ，且不能以  $x^3$  分除分子分母，然  $x \rightarrow \infty$  時則可。又以  $\infty$  除任何數，其極限為零。

〔例四〕 設  $n$  為正整數，求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$  之值。

〔解〕 若  $x \neq a$  且  $n$  為正整數時。

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}.$$

當  $x \rightarrow a$ ，上式右方  $n$  項皆以  $a^{n-1}$  為其極限，故

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

〔註〕 此題之  $n$  若為任何有理數，包括負整數及分數，亦得同樣結果，讀者可自證之。

〔例五〕 證  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ，式中  $\theta$  之單位為徑。

〔解〕 如圖 1—2，以  $R$  為半徑  $O$  為圓心作圓弧  $PA$ ，設  $A$  為定點， $P$  為變點，且  $\angle POA = \theta$  徑，由  $P$  作切線  $PT$  ( $PT \perp OP$ )，及垂線  $PN$  垂直於  $OA$ 。

若  $\theta < \pi/2$ ，則

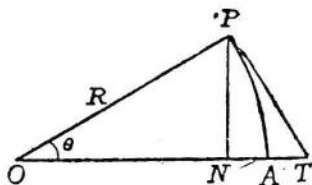


圖 1—2



$$\overline{PN} < \widehat{AP} < \overline{PT},$$

$$\therefore \frac{\overline{PN}}{R} < \frac{\widehat{AP}}{R} < \frac{\overline{PT}}{R},$$

$$\text{或 } \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$$\therefore 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta},$$

$$\text{或 } 1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

當  $\theta \rightarrow 0$  時,  $\cos\theta \rightarrow 1$ , 即  $\sin\theta/\theta$  介於 1 與一趨近於 1 之兩數間。

$$\text{故 } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \quad (1-7)$$

[註] 公式(1-7)之應用頗多, 宜熟記之。

[例六] 證  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\dots\dots$

[解] 在  $(1+x)^n$  中, 令  $x = \frac{1}{n}$ ,

$$\text{若 } n=1, \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$n=2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25,$$

$$n=10, \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.594,$$

$$n=100, \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.704,$$

由上述之特例觀之  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  之數值似乎隨着  $n$  之增加而增加, 現在且