五年制專科學校用書

數　學

（微積分與微分方程）

趙 良 五 編 著

臺 灣 商 務 印 書 館 印 行

五年制專科學校用書

數　　學

(微積分與微分方程)

趙 良 五 編 著

臺 灣 商 務 印 書 館 印 行

中華民國六十年八月二版

五年制專科學校用書

數學（微積分與微分方程）

定價新臺幣三十五元正

編著者 趙良五
發行者 臺灣商務印書館股份有限公司
臺北市重慶南路一段三十七號
印刷及發行所 臺灣商務印書館股份有限公司
登記證：內版臺業字第〇一三號

編 輯 大 意

1.本書依據五年制專科學校所需之數學教材編輯而成，共分七册，計幾何一册，三角一册，大代數兩册，解析幾何一册，微積分與微分方程一册，供五年制各專科學校一至四年級數學教學之用。

2.本書對於數學上之基本智識與概念，作有系統之敍述，故對於定義之解釋，力求詳盡；定理之證明，務求嚴密；敍述簡明扼要，俾使學生有正確之數學概念，養成完整之推理能力。

3.本書在求理論與實用並重，故選用例題與習題，由淺而深，旨在使學生對於所習之理論與實用能融合貫通，力避學生僅記公式與定理之弊，使學生能學以致用，因而引起其自動，自發之學習興趣。

4.本書雖經編者審愼從事，然訛誤之處，必所難免，尚祈海內方家隨時指正。

目　　次

第四章　導函數之應用

第五章　微分

第六章 不定積分

第七章 定積分

第八章 積分之應用

第十一章 重積分

第十二章 簡單之一級一次微分方程

數　學

微積分與微分方程

第一章　變數與極限

1-1　變數與常數

變數：若一文字或一符號，可表示某一數集合中之任一元素，則此文字或符號稱爲變數；常以 x,y,z 等表之。

常數：若一文字或一符號，祇能表示某一數集合中之一固定元素，則此文字或符號稱爲常數。數集合中之元素，可爲$1,\frac{1}{3},\sqrt{2},\pi,\cdots\cdots$或$a,b,c,\cdots$。前者稱爲絕對常數，後者稱爲任意常數。

1-2　變數之區間

變數之範圍，稱爲變數之區間。例如在某一問題中，變數限由 2 變至15，卽變數祇能配與 2 至15間之數值。一般言之，變數變更之範圍爲由 a 變至 b，卽變數只能配與 a 至 b 間之數值，a 與 b 可包含在內也可不包含在內，或一個在內。若兩端點 a 與 b 不包含在內，稱爲開區間，以符號 (a,b) 表示；若兩端點 a 與 b 包含在內，稱爲閉區間，以符號 $[a,b]$ 表示；若 a（或 b）包含在內，b（或 a）不包含在內稱爲半開區間，以符號$[a,b)$或$(a,b]$表示。

1-3 連續變更

一變數 x，由一值 a 向另一值 b 逐次增大，如在 a 與 b 之間，照數值之大小，依次取一切之值，稱爲變數連續變更於一區間〔a, b〕。

1-4 函數

設 A 與 B 爲二集合，若對於 A 中每一元素，依某一關係，B 中有一元素與之對應，則此關係連同集合 A，稱爲函數，且 A 稱爲函數之領域，簡稱爲函數域，與 A 中元素對應之元素之集合 B，稱爲函數列。

常用文字 f, g, h……等表示函數，設 x 爲函數 f 之函數域中任一元素，則與 x 對應之元素以 $f(x)$ 表示之，$f(x)$ 讀作「f 在 x 點之值」。

〔例一〕設與集合 $A=\{x \mid x \text{爲實數}\}$ 中每一數對應之實數爲 $2x-1$，若以 f 表此函數，則記作

$$f(x)=2x-1$$

或 $f: x \to 2x-1$

〔例二〕設函數 f 之函數域爲一切實數之集合，其中每一元素與函數列中每一對應元素之關係爲此元素之平方，則 $f(2)=4$, $f(3)=9$, $f(0)=0$; $f(-3)=9$, ……, 于是記作

$$f(x)=x^2$$

或 $f: x \to x^2$

有時用 x 表示函數域中之任一元素，用 y 表示函數列中之對應元素，此時函數可記作

$y=f(x)$

此時 x 稱爲函數之自變數，y 稱爲函數之應變數。

1-5 隱函數

若二數集合中之元素 x 與 y 之關係爲一未解出 y (或 x) 值之方程式，如 $x^2-y+4=0$，或 $x^3+y^3-3axy=0$ 之形式時，則稱爲隱函數。已解出$y=f(x)$之函數，稱爲顯函數。

1-6 極限

以幾何爲例：若定圓之內接或外切正多邊形之邊數愈增，則其面積將趨近於此圓之面積。換言之，多邊形之面積以圓面積爲極限(limit)。再以數之序列爲例：

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \frac{31}{32},\ \frac{63}{64},\cdots\cdots 1-\frac{1}{2^n}$$

其最後之極限值爲 1，所云極限，指趨近之數值，非相等之謂，卽上述序列，祇在最後之數，接近於 1，決非其中有一數眞正爲 1 也。

又如(圖1—1)：在曲線上取 P,Q 二點，PQ爲曲線之割線，若Q點趨近於點 P 時，此 PQ 將以點 P 之切線PT爲極限。

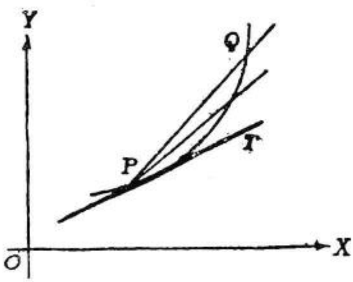

圖1-1

又若點 Q 趨近於點 P 時，弦PQ長將趨近于弧 PQ之長，或PQ/PQ趨近於 1，而以 1 爲其極限。

設$f(x)$中 x 之值趨近於 a 時之極限爲 A，可用式表之如下：

當 $x\to a$, $f(x)\to A$ 或 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

此處$x\to a$包括兩種情況，卽 x 値由右而左趨近於 a 時，則$x\to a+$，如 x 値由左而右趨近於 a 時，則$x\to a-$。如$f(x)\to A$，則 $f(x)-A\to 0$,，故一函數與其極限間之差爲一無限小，反之，若一函數與一常數之差爲一無限小，則此函數趨近於此常數爲其極限。

1-7 極限定理

設 u,v 及 w 皆爲變數 x 之函數，且

$$\lim_{x\to a} u=A,\quad \lim_{x\to a} v=B,\quad \lim_{x\to a} w=C,$$

則 $$\lim_{x\to a}(u+v-w)=A+B-C \tag{1-1}$$

$$\lim_{x\to a}(uvw)=ABC \tag{1-2}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{u}{v}=\frac{A}{B},\quad 但\quad B\neq 0 \tag{1-3}$$

卽一代數和，積，或商之極限，分別等於其各別之極限之同一代數和，積，或商。惟商極限之分母不能爲零。

〔證〕設$u-A=i$, $v-B=j$, $w-C=k$式中i,j及 k 皆 x 之函數，而於 $x\to a$ 時各趨近於零，換言之；彼等均爲無限小。因得

$$(u+v-w)-(A+B-C)=i+j-k=e,$$

式中 e 亦無限小也，故 $u+v-w$ 趨近於$A+B-C$爲其極限，卽式(1—1)成立。

若設 $u=A+i$, $v=B+j$，則

$$uv-AB=Aj+Bi+ij=e,$$

故 uv 趨近於 AB 為其極限，更推廣及 uvw 之積，知式 (1—2) 成立。

又 $$\frac{u}{v}-\frac{A}{B}=\frac{A+i}{B+j}-\frac{A}{B}=\frac{Bi-Aj}{B(B+j)}=\frac{e}{B^2}=e,\ (B\neq 0)$$

故$\dfrac{u}{v}$趨近於$\dfrac{A}{B}$為其極限，此式(1—3)也。

設 C 為常數，u 為 x 之函數，由極限定理可得推論如下：

$$\lim_{x\to a}(u+C)=A+C \tag{1-4}$$

$$\lim_{x\to a} Cu=CA \tag{1-5}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{u}=\frac{C}{A} \tag{1-6}$$

上述極限定理及其推論，多用於第三章微分法基本公式之證明。

〔例一〕求 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x-1)$之値。

〔解〕 $$\lim_{x\to 3}(x^2-2x-1)=\lim_{x\to 3}(x\cdot x)-2\lim_{x\to 3}(x)-1$$
$$=9-2\times 3-1=2$$

〔註〕此處計得答數，乃$x\to 3$時$f(x)=x^2-2x-1$之極限値，與$f(3)$不同，雖 $f(3)=2$，然其意義則殊。

〔例二〕求 $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-4}{t^2-3t+2}$之値。

〔解〕 $$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-4}{t^2-3t+2}=\lim_{t\to 2}\left(\frac{t-2}{t-2}\right)\left(\frac{t+2}{t-1}\right)$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{t+2}{t-1}=4.$$

〔註〕若 $t=2$ 時，$\dfrac{t-2}{t-2}\fallingdotseq 1$；然 $t\to 2$ 時，$\dfrac{t-2}{t-2}\to 1$，即 $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t-2}{t-2}=1.$

〔例三〕 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+3}{2x^3+x+1}$之值。

〔解〕

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+3}{2x^3+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}.$$

〔註〕若 $x=\infty$，原分式變爲∞/∞，且不能以 x^3 分除分子分母，然 $x\to\infty$時則可。又以∞除任何數，其極限爲零。

〔例四〕設 n 爲正整數，求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$之值。

〔解〕 若 $x\neq a$ 且 n 爲正整數時。

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}.$$

當 $x\to a$，上式右方 n 項皆以 a^{n-1} 爲其極限，故

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

〔註〕此題之 n 若爲任何有理數，包括負整數及分數，亦得同樣結果，讀者可自證之。

〔例五〕證 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$，式中 θ 之單位爲弳。

〔解〕 如圖1—2，以R爲半徑O爲圓心作圓弧PA，設A爲定點，P爲變點，且$\angle POA=\theta$弳，由P作切線PT($PT\perp OP$)，及垂線PN垂直於OA。

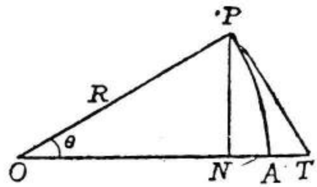

圖1-2

若 $\theta<\pi/2$，則

$$\overline{PN} < \widehat{AP} < \overline{PT},$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{PN}}{R} < \frac{\widehat{AP}}{R} < \frac{\overline{PT}}{R},$$

或 $\sin\theta < \theta < \tan\theta$

$$\therefore \quad 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta},$$

或 $1 > \dfrac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$

當 $\theta \to 0$ 時，$\cos\theta \to 1$，即 $\sin\theta/\theta$ 介於 1 與一趨近於 1 之兩數間。

故 $$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \tag{1-7}$$

〔註〕　公式(1-7)之應用頗多，宜熟記之。

〔例六〕證 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 2.718\cdots\cdots.$

〔解〕　在 $(1+x)^n$ 中，令 $x=\dfrac{1}{n}$,

若 $n=1$, $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2$

$n=2$, $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2.25$,

$n=10$, $\left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10} = 2.594$,

$n=100$, $\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100} = 2.704$,

由上述之特例觀之 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 之數值似乎隨着 n 之增加而增加，現在且