高等数学解题指南

朱砾　王文强 主编

湘潭大学出版社

高等数学解题指南

主　编　朱　砾　王文强

副主编　(按姓氏拼音字母为序)

唐树江　熊　颖　杨　柳　朱少茗

湘潭大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指南/朱砾，王文强主编．—湘潭：湘潭大学出版社，2012.9

ISBN 978-7-81128-442-3

Ⅰ．①高… Ⅱ．①朱… ②王… Ⅲ．①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 221164 号

责任编辑：丁立松
封面设计：刘　扬
出版发行：湘潭大学出版社
社　　址：湖南省湘潭市　湘潭大学出版大楼
电话（传真）：0731-58298966　邮编：411105
网　址：http://xtup.xtu.edu.cn
印　　刷：国防科技大学印刷厂
经　　销：湖南省新华书店
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：25
字　　数：624 千字
版　　次：2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81128-442-3
定　　价：39.00 元

内容简介

本书主要是为教材《高等数学(基础版)》和《高等数学(加强版)》(湘潭大学文科高等数学教学改革课题组编,科学出版社出版)配套而编写的一部辅导用书。全书与教材同步配套分为 8 章:基础版和加强版各 4 章,主要内容包括函数与极限基础、函数微分学基础、一元函数积分学基础、微分方程初步、极限、连续与导数续论、微分中值定理与导数的应用、二重积分与无穷级数、微分方程与差分方程。在每节中设有内容简介、学习方法指导与典型例题选讲、教材每节后面的习题详解。每道题目均提供分析与详细解答过程,引导和帮助学生寻找解题的方法。

本书可作为高等院校文科类专业(含经济类和管理类)本科生学习高等数学的学习辅导书。对新担任高等数学教学任务的青年教师,本书是较好的教学参考书;对报考硕士研究生需要考数学三的学生来说,本书也是考前复习的良师益友。

前　言

高等数学是一门非常重要的公共基础课，对于广大文科类专业（含经济类、管理类）的学生而言，怎样学好高等数学却是一桩很困难的事情。作为学生如果面对一道数学题，当自己冥思苦想后依旧解答不出来时，而老师却给出了一个绝妙的解法，此时他最希望知道的就是"老师是怎么想出来的呢?"尤其是当解法事实上还很容易时，他又总会感叹"自己本来完全应当想到的，但为什么却总是想不到?"美国著名数学教育家波利亚主张数学教育要培养学生思考问题和分析问题的能力，根本宗旨是"教会年轻人思考"，掌握数学就意味着要善于解题。此外，在一线教学的教师，经常会碰到很多学生提到希望能有一本与教材配套的辅导用书，为了帮助学生更好地学好高等数学，我们组织部分经验丰富的一线骨干教师编写了这本高等数学解题指南，试图帮助学生解决如下三个问题：

1. 找不到与教材配套的辅导书

本书主要是为教材《高等数学（基础版）》和《高等数学（加强版）》（湘潭大学文科高等数学教学改革课题组编，科学出版社出版）配套而编写的。为更好地方便学生进行同步学习，本书在编写时完全按照教材的章节进行，并且完整地给出教材中习题的详细解法，帮助学生自己找出学习中的不足之处，进一步加深理解教材中的相关内容。

2. 找不到解题方法与不会做题

高等数学通常开设在大一新生阶段，多数学生还来不及适应大学生活，刚进来就面对比较难学的高等数学课程，而由于教学内容的突增和教学方法的不同，常常被弄得晕头转向，使得怕数学的变得更怕，不怕数学的变得困惑——不会解题。为此我们在每章节的内容中，先是对解题方法进行综合性叙述，再以典型例题选讲的形式加深理解。在每道题的具体解题过程中力求先给出分析过程，然后进行详细的解答和分析，通过对解题方法进行示范，帮助学生理解解题的思路与方法。

3. 如何进行考研前的练习与准备

在本书中，尽量将近年数学三的考研真题按照知识点的分布情况编排在不同的章节中，通过对真题的分析与解答，帮助学生了解考研的要求与难度，有针对性地找出自己学习中的不足之处，及时调整学习计划，为将来的成功奠定基础。

本书的编写得到了湘潭大学出版社、湘潭大学教务处和湘潭大学数学与计算科学学院的大力支持，得到了湖南省教改项目的资助，在此深表谢意！

由于编者水平有限，书中难免有疏漏与不足之处，恳请大家批评指正！

编　者

2012 年 7 月于湘潭大学

目　　录

第一篇　基础版

第二篇　加强版

第一篇　基础版

第 1 章　函数与极限基础

1.1　$\mathbf{R}^n$空间简介

★内容简介

一、基本概念

1. 数轴

在直线上，任意选定一个原点 O，一个正向（正向有两种可能的情形）和一个单位长度，该直线就称为**数轴**.

2. 坐标

一维情形　对应于数轴上一点 P 的实数 x 也称为 **P 点的坐标**，数轴也可以称为**坐标轴**，用 Ox 表示，对应地称为 **x 轴**.

二维情形　对应于平面上一点 P 的有序实数对（x，y）称为**点 P 的坐标**，数轴称为**坐标轴**，分别用 Ox 和 Oy 表示，对应地分别称为 **x 轴**和 **y 轴**，或**横轴**和**纵轴**.

三维情形　对应于空间上一点 P 的有序实数组（x，y，z）也称为 **P 点的坐标**，三条相互垂直的数轴也称为**坐标轴**，分别用 Ox，Oy 和 Oz 表示，对应地分别称为 **x 轴**，**y 轴**和 **z 轴**，或**横轴**，**纵轴**和**竖轴**.

以右手握住 z 轴，让右手的四指从 x 轴的正向，以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向，这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正向，这个法则称为**右手法则**.

3. n 维空间

所有 n 维实数组（x_1，x_2，…，x_n）构成的集合称为 **n 维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

其中 n 维实数组（x_1，x_2，…，x_n）称为 **n 维向量**，通常用 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，…或粗体的 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$，…表示，$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为**向量的第 i 个分量**（或**第 i 个坐标**）.

注：空间的点与向量形成了“一一对应”，只要不会引起混淆，常常不再加以区分.

4. 距离

在 $\mathbf{R}^n$中，若点 P 的坐标为（x_1，x_2，…，x_n），点 Q 的坐标为（y_1，y_2，…，y_n），定义点 P 与 Q 之间的**距离**为

$$\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2},$$

记为 $|PQ|$，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 或 d（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$），即

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

特别地，当点 Q 与原点 O 重合时，即 $(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ 时，有

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}.$$

我们称 $|\boldsymbol{x}|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**模**或**长度**.

5. 邻域

点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域是指位于定点 $\boldsymbol{x}_0$ 周围的点的集合，其中每个点 $\boldsymbol{x}$ 与定点 $\boldsymbol{x}_0$ 的距离小于定长 δ. 在 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ **邻域** $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta\}$. **点 $\boldsymbol{x}_0$ 的去心 δ 邻域**：$\mathring{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x}_0, \delta) = \{\boldsymbol{x} \mid 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta\}$；**$\infty$的邻域**：$\boldsymbol{U}(\infty) = \{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x}| > M, M > 0\}$.

特别在 $\mathbf{R}^1$ 中有：

点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 $\boldsymbol{\delta}$ 右邻域：$U_+(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 \leqslant x < x_0 + \delta\}$；

点 $\boldsymbol{x}_0$ 的去心 $\boldsymbol{\delta}$ 右邻域：$\mathring{U}_+(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 < x < x_0 + \delta\}$；

点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 $\boldsymbol{\delta}$ 左邻域：$U_-(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x \leqslant x_0\}$；

点 $\boldsymbol{x}_0$ 的去心 $\boldsymbol{\delta}$ 左邻域：$\mathring{U}_-(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0\}$；

$+\infty$的邻域：$U(+\infty) = \{x \mid x > M, M > 0\}$；

$-\infty$的邻域：$U(-\infty) = \{x \mid x < -M, M > 0\}$.

特别地，若不需要指明邻域的大小，常用 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0)$ 表示 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域.

二、基本运算及性质

1. 向量的加法与数乘

设 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$，$c$ 为实数，则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n); \qquad \text{(向量的加法)}$$

$$c\boldsymbol{\alpha} = c(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (cx_1, cx_2, \cdots, cx_n). \qquad \text{(向量的数乘)}$$

向量的加法运算和向量与数的乘法运算统称为**向量的线性运算**.

2. 向量模的基本性质

设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，c 为实数，则有：(1) $|\boldsymbol{x}| \geqslant 0$，$|\boldsymbol{x}| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$；(2) $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$；(3) $|c\boldsymbol{x}| = |c|\,|\boldsymbol{x}|$.

★学习方法指导与典型例题选讲

本节学习的关键是弄明白空间的定义. 理解空间是一类特殊的集合，即只有当集合中的元素必须要满足一定的运算规律时，才能称为空间，空间的元素称为向量. 空间中点与点之间的联系，常常依赖于距离来作出判断，因此距离也是一个非常基本的概念，因而我们通常碰到的空间也称为距离空间. 明白邻域是空间的一类特殊子集，从图形上来理解，如果某一点的邻域，那么意味着到该点的距离在指定范围内的点都属于此邻域（只有该点在去心邻域中可以例外）. 教材中的基本概念都是平常生活中的概念用数学的方式表述出来，然后将其推广到较为抽象的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{MA}$、$\boldsymbol{MB}$、$\boldsymbol{MC}$、$\boldsymbol{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点，如图 1.1 所示.

分析 回顾中学所学知识，利用向量的运算规律.

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}=2\boldsymbol{AM}=-2\,\boldsymbol{MA},$$

于是

$$\boldsymbol{MA}=-\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});\quad \boldsymbol{MC}=-\boldsymbol{MA}=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

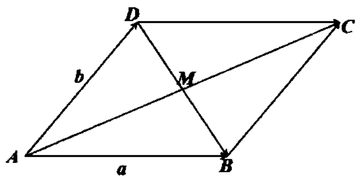

图 1.1

因为

$$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{BD}=2\,\boldsymbol{MD},$$

所以

$$\boldsymbol{MD}=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a});\ \boldsymbol{MB}=-\boldsymbol{MD}=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

例 2 已知两点 A（x_1，y_1，z_1）和 B（x_2，y_2，z_2）以及实数$\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求一点 M，使得

$$\boldsymbol{AM}=\lambda\,\boldsymbol{MB}.$$

分析 此题主要考查利用向量的运算规律推导定比分点公式．

解 **方法 1** 由于

$$\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{OM}-\boldsymbol{OA},\quad \boldsymbol{MB}=\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OM},$$

因此

$$\boldsymbol{OM}-\boldsymbol{OA}=\lambda\,(\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OM}),$$

从而

$$\boldsymbol{OM}=\frac{1}{1+\lambda}\,(\boldsymbol{OA}+\lambda\,\boldsymbol{OB})=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 M 的坐标.

方法 2 设所求点为 M（x，y，z)，则

$$\boldsymbol{AM}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1),\ \boldsymbol{MB}=(x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z).$$

依题意有 $\boldsymbol{AM}=\lambda\,\boldsymbol{MB}$，即

$$(x-x_1\,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

因此

$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z),$$

则有

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2),$$

即

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 称为有向线段$\boldsymbol{AB}$ 的**定比分点**.当$\lambda=1$,点 M 的有向线段$\boldsymbol{AB}$ 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

例 3 试证以点 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

分析 此题的关键是将证明两边相等转化为证明向量的模相等．

解 因为

$$|\,M_1M_2\,|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_1M_3|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$

所以

$$|M_2M_3|=|M_1M_3|,$$

即 $M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 4 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M.

分析 此题的关键是利用两点之间的距离公式.

解 设所求的点为 $M(0,0,z)$,依题意有

$$|MA|^2=|MB|^2,$$

即

$$(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2=(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2.$$

解方程得 $z=\frac{14}{9}$,所以,所求的点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

★习题详解

A 组

1. 在 $\mathbf{R}^2$ 中点集

$$A=\{(x,y)\,|\,1<x<3,1<y<3\}$$

包含点(1,1)的一个邻域吗?包含点(2,2)的一个邻域吗?请说明理由.

解 点集 A 不包含点(1,1)的一个邻域,因为点 $x_0=(1,1)$ 的任意一个邻域 $U(x_0,\delta)$ 都包含不属于 A 的点 $\left(1-\frac{\delta}{2},1-\frac{\delta}{2}\right)$. 点集 A 包含点 $x_1=(2,2)$ 的一个邻域,因为当取半径 $\delta=\frac{1}{2}$,则 $U(x_0,\delta)\subset A$.

2. 试比较在 $\mathbf{R}^1$ 中的邻域与开区间、闭区间之间的区别与联系?

答 邻域 $U(x_0,\delta)$ 就是一个开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,同样开区间 (a,b) 可以视为中点 $x_0=\frac{a+b}{2}$,半径为 $\delta=\frac{b-a}{2}$ 的一个邻域 $U(x_0,\delta)$;开区间 (a,b) 与闭区间 $[a,b]$ 的区别在于端点 a,b 属于闭区间 $[a,b]$,而不属于开区间 (a,b),且 $(a,b)\subset[a,b]$.

3. 试问 $\mathbf{R}^3$ 中点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 是什么形状?

答 在 $\mathbf{R}^3$ 中邻域 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 是球心为 $\boldsymbol{x}_0$,半径为 δ 的球体,但不包括球体的表面.

4. 试举例说明生活中什么地方用到了 $\mathbf{R}^n$ $(n>3)$ 空间的向量来表示?

解 例如中学生的各科成绩:语文、数学、英语、政治、历史、生物、物理、化学、音乐、体育依次为 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}$,即可表示为向量

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}).$$

如果一学生的成绩表示为(98,95,90,99,88,94,96,97,80,85),则可知该学生的语文成绩为 98 分,历史为 88 分,体育为 85 分,等等.

5. 在数轴上画出下列数集所表示的区间：

(1) $\{x \mid (x-2)(x-3)<0\}$；　(2) $\{x \mid x^2+x\geqslant 1\}$；

(3) $\left\{x \mid \dfrac{2}{x-2}<5\right\}$；　(4) $\{x \mid x^2-16<0, x^2-2x\geqslant 0\}$；

(5) $U(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$；　(6) $\mathring{U}(5,3)$.

解　(1) $\{x \mid (x-2)(x-3)<0\}$所表示的区间为$(2,3)$，如图 1.2 所示；

(2) $\{x \mid x^2+x\geqslant 1\}$根据一元二次方程的求根公式可得所表示的区间为$(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$，如图 1.3 所示；

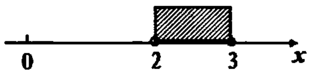

图 1.2

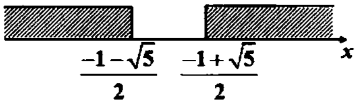

图 1.3

(3) $\left\{x \mid \dfrac{2}{x-2}<5\right\}$所表示的区间为$(-\infty,2)\cup(\frac{12}{5},+\infty)$；

(4) $\{x \mid x^2-16<0, x^2-2x\geqslant 0\}$所表示的区间为$(-4,0]\cup[2,4)$；

(5) $U(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ 所表示的区间为$(-\frac{1}{6},\frac{5}{6})$；

(6) $\mathring{U}(5,3)$ 所表示的区间为$(2,5)\cup(5,8)$.

(3) ～ (6) 的具体图形略.

6. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，c 为实数，试证：

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；　(2) $c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{x}$.

证　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，$c$ 为实数，则

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)=(y_1+x_1,y_2+x_2,\cdots,y_n+x_n)=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x};$$

$$c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)=(cx_1+cy_1,cx_2+cy_2,\cdots,cx_n+cy_n)=c\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{x};$$

B 组

1. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的向量，c 为实数，试证：

(1) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$；　(2) $|c\boldsymbol{x}|=|c|\,|\boldsymbol{x}|$.

证　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbf{R}^3$，$c$ 为实数，

(1) 因为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),$$

因此根据柯西不等式可知

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2&=(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+2(x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3)\\&\leqslant|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\\&=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+2|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|=(|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$.

(2) 因为

$$cx = (cx_1, cx_2, cx_3),$$

所以

$$|cx| = \sqrt{(cx_1)^2 + (cx_2)^2 + (cx_3)^2} = \sqrt{c^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$
$$= |c| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |c||x|.$$

2. 请思考：空间与集合的关系？区间与邻域的关系？

答 空间是一个特定的集合，是一个必须满足一定运算关系的集合；而一般的集合却并不是空间．邻域是一个特定的区间，而且是一个开区间；但一般的区间却并不是邻域．

1.2 函数及其图形

★内容简介

一、基本概念

1. 函数

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，则称映射 $f:D \to \mathbf{R}^n$ 为定义在 D 上的 **n 元函数**，记作

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D,$$

其中向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f；函数值的集合

$$\{y \mid y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\}$$

称为函数的**值域**，记作 R_f．

2. 几类重要的函数

1) 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，若对任意 $y \in R_f$，有唯一一个 $x \in D_f$ 与之对应，使 $f(x) = y$，则在 R_f 上定义了 y 的一个函数，记为

$$x = f^{-1}(y), y \in R_f$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**．习惯上，我们常常将函数 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$．

函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f^{-1}(x)$ 是互为反函数的，**它们的图形关于直线 $y=x$ 对称**，如图 1.4 所示．

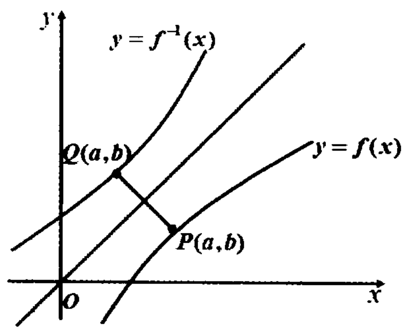

图 1.4

2) 复合函数

设 $y = f(u)$ 是 u 的函数，$u = \varphi(x)$ 是 x 的函数．如果 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集非空，则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 构成的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**．常称函数 $y = f(u)$ 为**外函数**，称函数 $u = \varphi(x)$ 为**内函数**，当外函数或内函数是多元函数时，所得的复合函数也称为**多元复合函数**．

3）隐函数

如果 $n+1$ 元方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$$

能确定 y 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，记为 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))\equiv 0,$$

则称 n 元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是由方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 确定的 **（n 元）隐函数.**

4）分段函数

函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 的不同子集上具有两个或两个以上的不同的解析表达式，则称函数 $y=f(x)$ 为 **分段函数**，其中一个表达式到另一个表达式的过渡点称为**分界点**或**分段点**.

3. 基本初等函数

1）常值函数　$y=C$ 或 $x=C$（C 为常数）.

2）幂函数　$y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）.

3）指数函数　$y=a^{x}$（$a>0,a\neq 1,a$ 为常数）.

4）对数函数　$y=\log_a x$　（$a>0,a\neq 1,a$ 为常数）.

常用的是以 e 为底的对数函数，称为**自然对数函数**，记为 $y=\ln x$.

5）三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

6）反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\mathrm{arccot}\, x$.

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数.**

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的，且能够用一个表达式表示的函数，称为 **（一元）初等函数**. **多元初等函数**是指可用一个式子所表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的. 教材中讨论的主要是一元初等函数.

二、基本运算及性质

1. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义，对于任意 $x_1,x_2\in D$，若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 为在 D 上的**单调增函数**，若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 为在 D 上的**单调减函数.** 其中单调增函数 $y=f(x)$ 也说成函数 $y=f(x)$ 为在 D 上**单调递增**或**单调上升**，单调减函数 $y=f(x)$ 也说成函数 $y=f(x)$ 为在 D 上**单调递减**或**单调下降**. 单调上升和单调下降函数统称为**单调函数.**

若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 为在 D 上的**广义单调增函数** .

若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 为在 D 上的**广义单调减函数.**

注：有时我们也称广义单调函数为**单调函数**；而称单调函数为**严格单调函数.**

2. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在常数 $M>0$，对任意 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上**有界**，称函数 $y=f(x)$ 为**有界函数**；如果这样的 M 不存在，则称

函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**，称函数 $y=f(x)$ 为**无界函数**. 如果存在常数 M_1，对任意 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有**上界**. 如果存在常数 M_2，对任意 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有**下界**.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数，1 是它的一个上界且是最小的上界，-1 是它的一个下界且是最大的下界.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x\in D$，如果 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的**偶函数**，如果 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的**奇函数**.

4. 函数的周期性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，若存在常数 T，使对任意 $x\in D_f$，$x+T\in D_f$，均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $y=f(x)$ 的**周期**.

5. 函数的表示法

1）解析法 用数学表达式表示确定自变量与因变量之间的对应关系.

2）表格法 用表格表示确定自变量与因变量之间的对应关系.

3）图形法 用图形表示确定自变量与因变量之间的对应关系.

二维空间 $\mathbf{R}^2$ 中的点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$ 称为一元函数 $y=f(x)$ 的**图形**. 三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点集$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**图形**.

注：一元函数 $y=f(x)$ 的图形通常是一条平面曲线. 二元函数 $y=f(x,y)$，$(x,y)\in D_f$ 的图形通常是一个空间曲面.

★学习方法指导与典型例题选讲

函数是高等数学中最基本的核心概念之一，它是映射的一种特殊情形．除了基本初等函数外，应当特别关注复合函数、分段函数、反函数、隐函数和多元函数的定义．而其中隐函数在学习过程中，特别容易让同学们误解，因此要多加注意，仔细体会．此外考研数学中常出现的是非初等函数．

函数的表示法，函数的定义域，函数的复合，基本初等函数的性质及其图形，函数的基本性质（单调、有界、奇偶、周期）是学习中的重点和难点．

1. 求函数的定义域：将所求函数的定义域分解为一些基本初等函数的定义域的交集．

2. 关于复合函数的计算：

1）已知 $f(x)$ 和 $g(x)$，求 $f(g(x))$；

2）已知 $g(x)$ 和 $f(g(x))$，求 $f(x)$.

3. 利用函数的基本性质的有关计算和证明．

例 1 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求：$f(0),f(\dfrac{1}{2}),f(-x),f(\dfrac{1}{x}),f(x+1),f(x^2)$．

分析 此题主要考查函数定义的理解．

解 根据题意可得

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1,\quad f(2)=\frac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{3},\quad f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},\quad f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x},\quad f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

例 2　设 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,a](a>0)$，求 $f(x^2-1)$ 的定义域．

分析　求函数的定义域，往往是将其转化为求解不等式．

解　要求 $-a\leqslant x^2-1\leqslant a$，则

$$1-a\leqslant x^2\leqslant 1+a,$$

当 $a\geqslant 1$ 时，$\because\ 1-a\leqslant 0,\ \therefore\ x^2\leqslant 1+a$，则 $|x|\leqslant\sqrt{1+a}$，

当 $0<a<1$ 时，$1-a>0$，$\therefore\ \sqrt{1-a}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{1+a}$，也即

$$\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+a}\ \text{或}\ -\sqrt{1+a}\leqslant x\leqslant-\sqrt{1-a}.$$

例 3　求函数 $f(x)=\ln\ln\ln x+\sqrt{100-x^2}$ 的定义域．

分析　求复杂函数的定义域，可将其转化为求解简单函数的定义域所组成的不等式组．

解　根据 $\ln x$ 的定义域为 $x>0$，知 $\ln\ln\ln x$ 要有定义，则要求 $\ln\ln x>0$，即 $\ln x>1$，因此 $x>\mathrm{e}$. 同时 $\sqrt{100-x^2}$ 要有定义，则 $x^2\leqslant 100$，即 $|x|\leqslant 10$．因此

$$f(x)=\ln\ln\ln x+\sqrt{100-x^2}$$

的定义域为 $(\mathrm{e},10]$.

例 4　求 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域．

分析　根据反函数的定义，此类求值域的题型可转化为反函数的定义域．

解　函数两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}},$$

方程两边取三次方得

$$x^3-1=\frac{1}{(\ln y)^3},$$

移项，开三次方得 $x=\sqrt[3]{1+\frac{1}{\ln^3 y}}$，它的定义域 $y>0$，且 $y\neq 1$．所以函数 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域为

$$(0,1)\cup(1,+\infty).$$

例 5　求函数 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域.

分析　求二元函数的定义域与一元函数类似，往往是将其转化为求解不等式．

解　由题意可知，要使得表达式有意义，则有

$$2-x^2-y^2\geqslant 0,$$

所以函数的定义域是：

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}.$$

例 6　求二元函数 $z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域．

分析 求复杂函数的定义域，可将其转化为求解简单函数定义域所组成的不等式组．

解 要使该二元函数有意义，必须满足

$$\begin{cases} y-x>0, \\ x^2+y^2<1, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

即该二元函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y-x>0, x^2+y^2<1, x\geqslant 0\},$$

它所对应的图形是一个扇形区域，如图 1.5 所示．

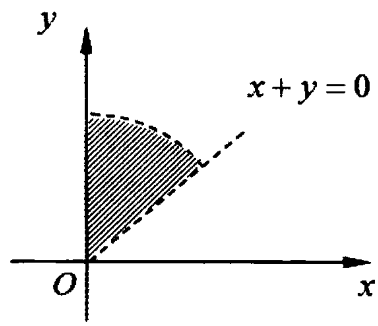

图 1.5

例 7 求函数 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(y-x)$ 的定义域.

分析 此题解法与上例相同．

解 由题意可知：x,y 必须满足下列不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 1, \\ y-x>0. \end{cases}$$

所以函数的定义域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1,\ y>x\}.$$

例 8 已知 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)-1}\right]$.

分析 此题为求复合函数，题型可视为：已知 $f(x)$ 和 $g(x)$，求 $f(g(x))$.

解 令 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-1}$，而 $f(x)-1=\dfrac{x}{x-1}-1=\dfrac{1}{x-1}$，因此

$$g(x)=x-1\quad(x\neq 1).$$

于是

$$f\left[\frac{1}{f(x)-1}\right]=f(g(x))=f(x-1)=\frac{x-1}{(x-1)-1}=\frac{x-1}{x-2}\quad(x\neq 1, x\neq 2).$$

例 9 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

分析 此题为求复合函数的外函数，题型可视为：已知 $g(x)$ 和 $f(g(x))$，求 $f(x)$.

解 令 $g(x)=e^x+1=u$，则 $x=\ln(u-1)$．因此

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+\ln(u-1)=u^2-u+\ln(u-1),$$

于是

$$f(x)=x^2-x+\ln(x-1).$$

例 10 设函数 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$．

分析 此题为求函数的表达式，关键是利用函数的恒等变形化简．

解 **方法 1** 令 $x+y=u$，$\dfrac{y}{x}=v$，则有

$$x=\frac{u}{1+v},\quad y=\frac{uv}{1+v},$$

由原式 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ 知

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$