福建省中学试用课本

语文教学参考资料

高中二年级上册

福建教育学院语文组

目　　录

第一章　导　　数

在研究变量和函数的概念时，我们已经知道，单纯用"一个数对应一个数"的关系还不能从数量关系上表明物质的运动．因此，我们在二次函数和幂函数中引进了变化率，它反映在这些函数的图象上就是切线斜率．我们已经掌握了割线变为切线、割线斜率变为切线斜率，这一量变转化为质变的基本思想方法，并且也学习了如何利用变化率求函数的极值，以解决一些生产中的实际问题．然而在生产实践中，我们还会经常遇到象火车或汽车在起动和刹车阶段的速度、曲柄连杆滑块的运动的速度、锻压汽锤下落的速度等等变化率问题，它们都是研究一个变量对另一个变量的变化快慢．这就要求我们对变化率的概念和其他函数的变化率的求法，作进一步的研究。

第一节　导数概念

一、导数概念

我们已经学过二次函数和幂函数的变化率及其求法．例如，求 $y=x^2$ 的变化率，方法如下：

(1) 设 $P(x, y)$ 为抛物线 $y=x^2$ 上的任意一点，$M(x_1, y_1)$ 为这个曲线上的另外一点(图 1.1)，那末割线 PM 的斜率

$$k=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}=x_1+x.$$

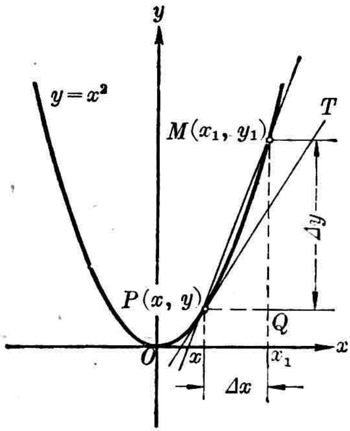

图 1.1

(2) 当点 M 变到点 P(即 $x_1=x$)时，割线 PM 转化成切线 PT，割线 PM 的斜率 k 转化为切线 PT 的斜率 K，从而

$$K=x+x=2x.$$

所以，函数 $y=x^2$ 的变化率 y' 就是 $2x$.

在上式中，我们把 x_1-x 叫做自变量 x 的改变量，记作 Δx，把 y_1-y 叫做函数 y 的改变量，记作 Δy. 当点 M 变到点 P 时，割线斜率 k 就转化为切线斜率 K，这一变化过程，是一个量变转化为质变的过程. 我们把这个过程叫做极限过程，记作"lim"，它表示极限的意思. 用记号"lim"来表示上面的极限过程，就是

$$\lim_{\Delta x\to 0} k=K \quad 或者 \quad \lim_{x_1\to x} k=K.$$

其中"$\Delta x\to 0$"读作 Δx 趋向于 0；"$x_1\to x$"表示 x_1 变到 x,

读作 x_1 趋向于 x. 所以函数变化率 y' 可写成

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}=\lim_{x_1\to x}(x_1+x)=2x.$$

【例 1】 求函数 $y=(2x-1)^2$ 的变化率.

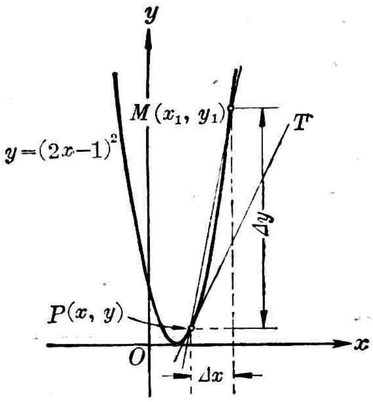

图 1.2

解: (1) 设点 $P(x, y)$ 为 $y=(2x-1)^2$ 上的任意一点, $M(x_1, y_1)$ 为这曲线上另外一点(图 1.2), 那末

$$\begin{aligned}k=\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{(2x_1-1)^2-(2x-1)^2}{x_1-x}\\&=\frac{(2x_1-1+2x-1)(2x_1-1-2x+1)}{x_1-x}\\&=\frac{4(x_1+x-1)(x_1-x)}{x_1-x}\\&=4(x_1+x-1).\end{aligned}$$

(2) 当点 M 变到点 P 时,

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{x_1\to x}4(x_1+x-1)=4(2x-1).\end{aligned}$$

试一试：求函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的变化率．当 $x=2$ 时，它的变化率是多少？

上面我们研究了割线斜率转化为切线斜率的这个极限过程；现在我们进一步来考察割线斜率转化为切线斜率这个运动的过程．

我们以函数 $y=x^2$ 为例来观察

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}=2x.$$

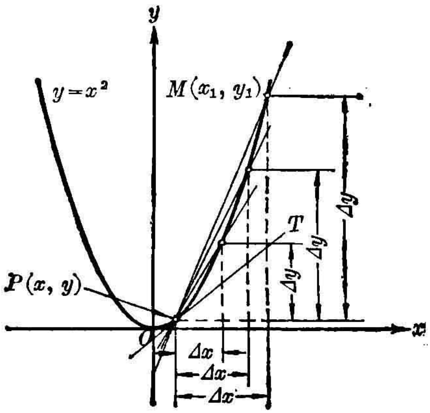

图 1.3

从图 1.3 可以看出，当点 M 沿着曲线越来越靠近点 P 时，$\Delta x=x_1-x$ 就逐渐变小，从而 $\Delta y=y_1-y$ 也跟着变小．同时，割线 PM 的斜率也随着变化．当点 M 和点 P 重合时，割线 PM 转化成切线 PT，割线 PM 的斜率 k 转化为切线 PT 的斜率 K．从数量关系上看，当点 M 变到点 P 时，分母就成为 $x_1-x=x-x=0$，从而分子也就成为 $y_1-y=y-y=0$，这

样我们就得到$\frac{0}{0}$. 在这个$\frac{0}{0}$表示式中,分母的0与分子的0都是有来源的,有意义的,它们是变量x和变量y在相互依存关系中变化而消失的结果.在这种情况下,分子和分母的依存关系始终保持着,它们的比就不能任意取一个数值,而是"具有一个特定的值"即切线斜率$2x$. 这两个特定的零之间就具有非常确定的关系. 正因为单单用两个0不足以表达它们的来源和关系,所以我们把分母$\Delta x=0$用dx表示,把分子$\Delta y=0$用dy表示. 于是,函数$y=x^2$的变化率

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x,$$

可以写成

$$\frac{dy}{dx}=2x.$$

这里,y'、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$和$\frac{dy}{dx}$都表示同一个意思.

在生产实践中, 变化率并不限于解决曲线的切线斜率问题,还经常应用于研究其他变量的变化速度问题.

我们知道,物体作等速运动时,计算速度的公式是

$$速度=\frac{路程}{时间}.$$

这里的速度并不是物体运动时的实际速度, 仅仅是平均速度,用$\bar{v}$表示. 但物体的运动一般说来不是等速运动. 如自由落体运动, 它的速度是随时间而变化的, 称为变速运动. 因此,在生产实践中, 不仅需要计算平均速度, 而且需要计算变速运动中任何一个时刻的瞬时速度.

以自由落体为例，它的运动规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2=4.9t^2.$$

如何求出它的瞬时速度呢？例如，求自由落体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度. 比较图 1.4 和图 1.5，可以发现，等速运动 $s=\bar{v}t$ 的图象是一条直线，斜率 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 是 v，这说明在相同的时间间隔 Δt 内，路程的改变量 Δs 随时间改变量 Δt 而变化的速度始终一样，即速度不变. 但是在自由落体运动中，当 t 从 1 秒变到 1.5 秒时，在 $\Delta t=1.5-1=0.5$ 秒这段时间内，物体经过的路程是 Δs_1；当 t 从 1.5 秒变到 2 秒时，同样在 $\Delta t=0.5$ 秒这段时间内，物体经过的路程是 Δs_2. 从图 1.5 我们看到，从不同的时刻开始，经过相同的时间，物体经过的路程却不相同，这表明了自由落体的速度是变化的，而且随着时间的增大，它的速度越来越快. 因此，从研究等速运动到变速运动，就必然会遇到速度的“变”与“不变”的矛盾.

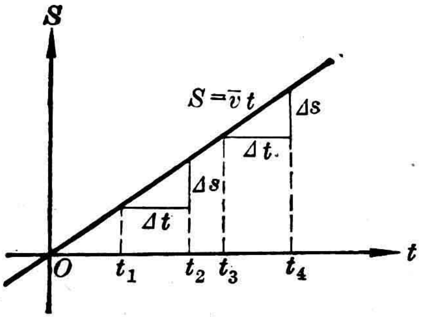

图 1.4

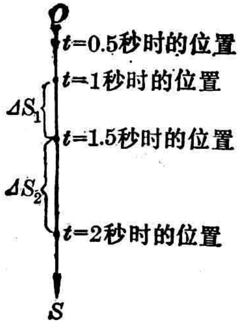

图 1.5

我们知道，自由落体的速度是不断变化的，但是在一段很

短时间内，速度变化很小，我们就可以用等速运动去近似地代替变速运动，也就是以"不变"代"变"进行研究．为此，我们把时间间隔分细，然后根据等速运动计算速度的公式，可以算出每小段时间内的平均速度．例如，

从 $t=1$ 秒开始，当时间是 t 秒时，物体在 1 秒到 t 秒之间的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t)-s(1)}{t-1}=\frac{4.9t^2-4.9}{t-1}=4.9(t+1).$$

当 t 是 2 秒时，物体在 1 秒到 2 秒之间的平均速度

$$\bar{v}_1=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}=4.9\times 2^2-4.9\times 1^2=14.7 \text{ 米/秒};$$

当 t 是 1.01 秒时，物体在 1 秒到 1.01 秒之间的平均速度

$$\bar{v}_2=\frac{s(1.01)-s(1)}{1.01-1}=9.849 \text{ 米/秒};$$

当 t 是 1.001 秒时，物体在 1 秒到 1.001 秒之间的平均速度

$$\bar{v}_3=\frac{s(1.001)-s(1)}{1.001-1}=9.8049 \text{ 米/秒};$$

……………………………………………

由此可见，当 t 从 2 秒、1.01 秒、1.001 秒，越来越靠近 1 秒时，也就是 Δt 由 1、0.01、0.001 逐渐变小时，所求得的平均速度就越接近于 1 秒时的瞬时速度．只有当 t 变到 1，即 $t-1=0$ 时，平均速度 $\bar{v}$ 才转化为自由落体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度 v，即

$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(1)}{t-1}=4.9(t+1)$$

$$\xrightarrow{\text{转化为}} v=4.9(1+1)=9.8 \text{ 米/秒}.$$

上述平均速度 $\bar{v}$ 转化为瞬时速度 v，是一个从量变到质变的转化过程，就是

$$v=\frac{ds}{dt}=\lim_{t\to1}4.9(t+1)=9.8\text{ 米/秒}.$$

它告诉我们：自由落体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度 $v=9.8$ 米/秒是平均速度 $\bar{v}$ 的极限，也就是函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 在 $t=1$ 秒时的变化率.

【例 2】 求自由落体在任何时刻 t 的瞬时速度.

解：(1) 当时间是 t_1 时，物体在 t 到 t_1 之间的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}gt_1^2-\frac{1}{2}gt^2}{t_1-t}=\frac{1}{2}g(t_1+t);$$

(2) 当 t_1 变到 t（即 $t_1=t$）时，平均速度就转化为瞬时速度，得

$$\bar{v}=\frac{1}{2}g(t_1+t)\longrightarrow v=\frac{1}{2}g(t+t)=gt.$$

即
$$v=\frac{ds}{dt}=\lim_{t_1\to t}\frac{1}{2}g(t_1+t)=gt.$$

这个例子告诉我们：物体运动的速度 $v(t)$ 就是路程函数 $s(t)$ 对时间 t 的变化率.

试一试：求自由落体在 $t=2$ 秒时的瞬时速度.

毛主席教导我们：“**人们总是首先认识了许多不同事物的特殊的本质，然后才有可能更进一步地进行概括工作，认识诸种事物的共同的本质。**”上面的切线斜率和瞬时速度问题，虽然它们的实际意义不同，但是在分析问题和解决问题的方法上，却有着共同的本质，即都是考虑在自变量的改变量为零

时，两个改变量之比的极限．把这些共同的东西抽象出来，就得到如下的导数概念．

如果有函数 $y=f(x)$，当自变量在点 x 处有一改变量 $\Delta x=x_1-x$ 时，函数 y 相应地有一改变量

$$\Delta y=f(x_1)-f(x),$$

当 $\Delta x\to 0$，即 $x_1\to x$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{dy}{dx}$$

叫做函数 $f(x)$ 在点 x 的导数（即变化率），记为 $f'(x)$.

由
$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

得到导数的另一种形式是 $dy=f'(x)dx$，我们称 $dy=f'(x)dx$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 的微分，dx 是自变量 x 的微分．

除了可以把导数记为 $f'(x)$ 外，也常常把它看作微分 dy 与 dx 的比 $\frac{dy}{dx}$，所以导数也叫做微商.

根据导数概念，可以知道：

函数 $y=x^2$ 在点 x 处的导数为

$$\frac{dy}{dx}=2x,$$

它的另一种形式是 $dy=2xdx$，dy 叫做函数 $y=x^2$ 在点 x 的微分.

同样，自由落体 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 在 t 时的导数，就是

$$\frac{ds}{dt}=gt,$$

它的另一种形式是 $ds=gtdt$, ds 叫做函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 在 t 时的微分.

【例 3】 求 $y=(x^2+1)^2$ 的导数.

解: (1) 当自变量在点 x 有一改变量 $\Delta x=x_1-x$,函数 y 相应地有一改变量 $\Delta y=(x_1^2+1)^2-(x^2+1)^2$, 那末

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_1^2+1)^2-(x^2+1)^2}{x_1-x}$$
$$=\frac{(x_1^2+1+x^2+1)(x_1^2+1-x^2-1)}{x_1-x}$$
$$=\frac{(x_1^2+x^2+2)(x_1^2-x^2)}{x_1-x}$$
$$=(x_1+x)(x_1^2+x^2+2).$$

(2) 当 x_1 变到 x(即 $\Delta x=0$)时,

$$\frac{dy}{dx}=(x+x)(x^2+x^2+2)=2x(2x^2+2)=4x(x^2+1).$$

【例 4】 一台打桩机的重锤从离桩 3 米高处自由落下,落到桩上需要多少时间?打到桩上时的速度是多少?

解: (1) 已知重锤下落是自由落体运动. 由 $s=\frac{1}{2}gt^2$, $s=3$ 米,求得重锤落到桩上需要的时间是

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 3}{9.8}}\approx 0.78(秒);$$

(2) 我们知道, 重锤打到桩上时的速度是路程 s 对时间 t 的导数.

$$\therefore\quad v=\frac{ds}{dt}=gt=9.8\times 0.78\approx 7.6(米/秒).$$

算一算: 某载重汽车作加速性能实验时, 得到在起动阶

段的路程函数 $s=0.21t^2$，求在 $t=20$ 时的速度.

练 习 一

1. 求下列函数的变化率(a, b, c 为常数):

(1) $y=x$; (2) $y=c$;

(3) $y=x^5$; (4) $y=x^{a+b}$;

(5) $y=\sqrt[3]{x}$; (6) $y=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$;

(7) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; (8) $y=x\sqrt{x}$;

(9) $y=2x^3-x^2+5$; (10) $y=4-3x^2+\frac{1}{x}$;

(11) $y=x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$; (12) $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

2. 根据导数概念求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$; (2) $y=(2x^2+1)^2$.

3. 已知 $f(x)=-\frac{1}{x^2}$，求 $f'(x)$.

4. 求 $f(x)=-2x^2+2x+2$ 在 $x=0$、$\frac{1}{2}$ 处的导数.

5. 已知：$f(x)=x^5-1$，验证：$f'(a)=f'(-a)$.

6. 将一物体垂直向上抛出，已知它上升的高度与时间的函数关系为 $s(t)=30t-\frac{1}{2}gt^2$. 求 $t=1$ 秒，2 秒时的速度.

7. 把 1 千克水，从 0°C 加热到 θ°C 时，所需的热量 Q，可由公式

$$Q=\theta+0.00002\theta^2+0.0000003\theta^3$$

计算．求 $\theta=30°C$ 时水的比热．

（物体的比热就是使1千克质量的物体的温度升高1°C时所需的热量.）

二、几个常用函数的导数

1．三角函数 $y=\sin x$ 的导数

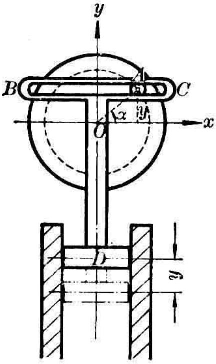

图 1.6

我们在三角函数一章中已经介绍过偏心驱动机构，设偏心梢 A 到圆盘中心距离 $OA=1$ 长度单位(图1.6)，那末柱塞 D 的位移 y 与 OA 旋转角 x 的关系为

$$y=\sin x.$$

我们要求柱塞 D 的速度，就要求函数 $y=\sin x$ 对旋转角 x 的导数．如何求 $y=\sin x$ 的导数呢？

由导数概念

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\sin x_1-\sin x}{x_1-x},$$

我们来分析当 x_1 变到 x 时，$\dfrac{\sin x_1-\sin x}{x_1-x}$ 的变化趋势．

画一个单位圆(图1.7)，从图上可得：

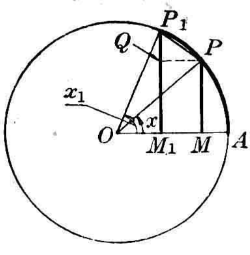

图 1.7

$$y=\sin x=PM,$$

$$y_1=\sin x_1=P_1M_1,$$

$$x=\overset{\frown}{AP},\quad x_1=\overset{\frown}{AP_1},$$

$$\therefore\quad x_1-x=\overset{\frown}{AP_1}-\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PP_1}.$$

当点 P_1 越来越靠近点 P 时，弧 $\overset{\frown}{PP_1}$ 与它所对应的弦也就越来越接近. 这样我们可用以"直"代"曲"，即用弦 PP_1 代替 $\overset{\frown}{PP_1}$ 的方法，得到直角三角形 P_1QP，其中

$$QP_1 = y_1 - y = \sin x_1 - \sin x,$$

$$PP_1 \approx \overset{\frown}{PP_1} = x_1 - x;$$

$$\therefore \quad \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} \approx \cos \angle PP_1Q.$$

当点 P_1 变到点 P（即 $x_1 = x$）时，PP_1 变成切线 PT，$\angle PP_1Q$ 就变成 $\angle MPT$，而 $\angle MPT = \frac{\pi}{2} - \angle OPM = x$（图 1.8），

$$\therefore \quad \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} \longrightarrow \cos \angle MPT = \cos x.$$

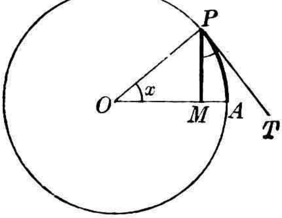

图 1.8

于是，根据导数概念，我们得

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)' = \cos x.$$

即 $$\boxed{\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x; \quad d(\sin x) = \cos x\,dx.}$$

试一试：用同样的方法，推导 $y = \cos x$ 的导数.

$$\boxed{\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x; \quad d(\cos x) = -\sin x\,dx.}$$

【例 5】 求 $f(x)=\sqrt{2}\sin x+\cos x$ 在 $x=0$ 处的导数.

上述等式右端是两个函数的和. 我们知道, 函数和(或差)的变化率等于各个函数的变化率的和(或差). 即

$$[u(x)+v(x)]'=u'(x)+v'(x);$$

$$[u(x)-v(x)]'=u'(x)-v'(x).$$

解:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{2}\sin x+\cos x)' \\ &= (\sqrt{2}\sin x)'+(\cos x)' \\ &= \sqrt{2}\cos x-\sin x. \end{aligned}$$

要求出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数, 只要把 $x=0$ 代入 $f'(x)$ 中, 从而得

$$f'(0)=\sqrt{2}\cos 0-\sin 0=\sqrt{2}.$$

【例 6】 已知从时间 $t=0$ 开始, 通过导体横截面的电量由公式 $Q=3\sin t+4\cos t$ 确定, 求 5 秒末的电流强度.

电流强度就是单位时间内流过导体横截面积的电量. 因此要求电流强度, 也就是求电量 Q 对时间 t 的导数.

解:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dQ}{dt}=(3\sin t+4\cos t)' \\ &= (3\sin t)'+(4\cos t)' \\ &= 3\cos t-4\sin t. \end{aligned}$$

当 $t=5$ 秒时,

$$\begin{aligned} i(5) &= 3\cos 5-4\sin 5 \\ &\approx 3\cos 286°29'-4\sin 286°29' \\ &= 3\cos 73°31'+4\sin 73°31' \\ &\approx 4.687\,(\text{安培}). \end{aligned}$$

即 5 秒末的电流强度是 4.687 安培.

试一试：某物体按 $x=\sqrt{3}\sin t$ 的规律振动，求 $t=\frac{\pi}{2}$ 秒时的速度.

2．指数函数 $y=e^x$ 的导数

在生产实践中，函数 $y=e^x$ 的应用较广，例如电容器放电时，电容器两端的电压 $u_C(t)$ 随时间 t 的变化规律

$$u_C(t)=Ee^{-\frac{t}{RC}},$$

其中 E 是放电前电容器两端的电压，RC 是电路的时间常数.

又如，放射性元素的衰变规律

$$N(t)=N_0e^{-\lambda t},$$

其中 N_0 是开始时放射性元素的原子数，λ 是衰变常数.

我们看到，上述 $u_C(t)$，$N(t)$ 都是关于 t 的指数函数．下面我们对指数函数的变化情况作进一步的研究.

【例 7】 求指数函数 $y=e^x$ 的导数.

解：如果 x 有一个改变量 $\Delta x=x_1-x$，相应地

$$\Delta y=y_1-y=e^{x_1}-e^x=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1),$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}.$$

因为 e^x 是不变的，所以我们只要看 $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ 是怎样变化的，列表如下(表中的数用对数计算方法可以求得)：

Δx	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots\cdots\to 0$
$e^{\Delta x}$	1.10517	1.010050	1.0010005	1.000100005	$\cdots\cdots\to 1$
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1.0517	1.0050	1.0005	1.00005	$\cdots\cdots\to 1$