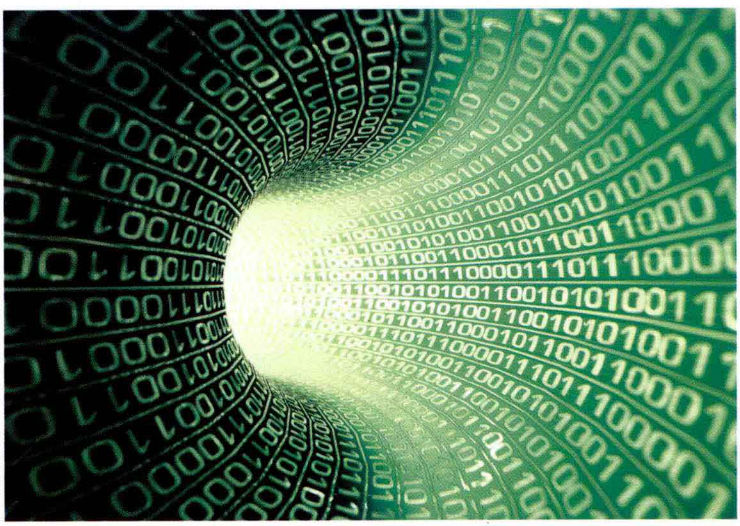
高等数学学习指导（上册）



林建华 杨世廞 许清泉
庄平辉 高琪仁 林应标
编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

高等数学学习指导(上册)

林建华 杨世廞 许清泉
庄平辉 高琪仁 林应标 编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导. 上册/林建华等编著. —厦门:厦门大学出版社，2011.12
ISBN 978-7-5615-4157-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①林… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 263708 号

厦门大学出版社出版发行
（地址:厦门市软件园二期望海路 39 号　邮编:361008）
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门集大印刷厂印刷
2011 年 12 月第 1 版　2011 年 12 月第 1 次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:12.75　插页:2
字数:310 千字　印数:1～2 000 册
定价:22.00 元

前　言

微积分的创立和发展，至今已有三百多年的历史，它是人类智慧的结晶，科学文明的重大贡献。现代科学技术的创新和发展，它也必将起到不可或缺的作用。

高等数学内容丰富，理论方法众多，结论深刻，应用范围广阔。学好这门课程对于培养学生的科学素质和创新能力具有十分重要的意义。因而它是理工科大学必修的重要公共基础课。

高等数学由于其理论体系严谨，综合性强，所涉及的基础知识面宽，解题方法灵活巧妙，理论深度和知识增进梯度大，多数的学生在学习过程中会遇到一定的困难，难以准确地掌握高等数学的基本概念、基本思想和基本方法，难以灵活地将所学的知识融会贯通，综合应用。为此本书配合作者所编写的《高等数学》（北京大学出版社[2010 年版]），专门为帮助学生学习高等数学课程知识而编写。根据教材章节的顺序，每一章均包括主要知识点归纳、典型例题分析、习题解答和单元测试练习等几部分内容。在编写上注重解题思路的分析、解题规律的总结和方法技巧的提炼，旨在起到解难释疑、开阔思路、触类旁通之效。

本书既可作为高等数学习题课的教材，又可作为报考研究生的复习资料，同时也可作为教师的教学参考书。

高等数学的图书和题目浩如烟海，本书在编写的过程中参考、引用了国内众多图书中的许多资料和习题的解答，无法一一列举，在此一并致谢。

由于编者水平所限，书中不妥和错误在所难免，敬请读者给予批评指正。

编者

于厦门大学

2011 年 12 月

目　录

第一章　函数、极限、连续

本章教学基本要求：

1. 深入理解函数的概念，掌握函数的表达式.

2. 熟练掌握函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

5. 理解数列极限和函数极限的概念，理解两种极限之间的区别与联系.

6. 熟练掌握极限的四则运算法则，熟练掌握两个重要极限及其应用.

7. 理解无穷小与无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法以及利用无穷小求极限的方法.

8. 理解函数连续性与函数间断的概念，了解连续函数的性质和初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质（有界性、最大最小值定理和介值定理），并能灵活运用连续函数的性质.

一、主要知识归纳

§1　函　数

（一）函数

1. 函数概念

定义：设 D 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的非空数集，若存在某一确定的法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在实数集合 D 上的一元函数（简称函数），记做

$$y=f(x),x\in D.$$

2. 函数的性质

（1）有界性：设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在正数 M，使得对任何 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 D 上有界，或称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数；否则称 $f(x)$ 是 D 上的无界函数.

（2）单调性：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，且对任意的 $x_1,x_2\in I$，若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或递增）；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少（或递减）.

（3）奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

(4)周期性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在一个正数 $T>0$,使得对于任意的 $x\in D$,必有 $x\pm T\in D$,且有

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 反函数

(1)定义:设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R,若对于每一个 $y\in R$,都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应,使 $f(x)=y$,则在 R 上定义了一个函数,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,$y\in R$. 习惯上选用 x 作为自变量,改记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2)反函数存在定理.

定理 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调增加(或减少),则函数 $y=f(x)$ 存在反函数,且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $R=f(D)$ 上也单调增加(或减少).

4. 复合函数

定义:设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2,且 $D=\{x\,|\,\varphi(x)\in D_1,x\in D_2\}\neq\varnothing$,则称函数 $y=f(\varphi(x))$,$x\in D$ 为函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,其定义域为 D,变量 u 称为中间变量.

5. 初等函数

由常数和基本初等函数(即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数)经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

§2 极 限

(一)极限

1. 数列极限

定义:设 $\{x_n\}$ 为一数列,若存在常数 a,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总可以找到正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,或称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 函数的极限

(1)定义:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义. 若存在常数 A,对于任意给定的正数 ε(不管它多么小),总存在正数 δ,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2)单侧极限:左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(或记为 $f(x_0^-)=A$ 与 $f(x_0^+)=A$).

上述定义中,把 $0<|x-x_0|<\delta$ 分别改为 $x_0-\delta<x<x_0$ 与 $x_0<x<x_0+\delta$.

(3)无穷小:$\alpha(x)$ 为某过程的无穷小 $\Leftrightarrow$ $\lim\alpha(x)=0$.

无穷大:$f(x)$ 为某过程的无穷大 $\Leftrightarrow$ $\lim f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$.

3. 极限的性质

(1)唯一性:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$)存在,则极限值必唯一.

(2)有界性:收敛数列必定有界.

局部有界性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \exists\,\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内有界.

(3)保号性：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a>0(<0)$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $x_n>0(<0)$.

局部保号性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0(<0) \Rightarrow \exists\,\delta>0$，使得 $\forall\, x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta)$，有 $f(x)>0$ (<0).

(4)子列的收敛性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也必收敛，且收敛于 a.

4. 极限的运算法则(以函数极限为例)

(1)若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则

(Ⅰ) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(Ⅱ) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(Ⅲ) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

(2)复合函数的极限：

定理　设函数 $y=f(\varphi(x))$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的，$f(\varphi(x))$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $\varphi(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

5. 极限存在的充要条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，$\alpha$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量

$\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$

$\Leftrightarrow$ (海涅定理) $\forall\,\{x_n\}$，$x_0\neq x_n\to x_0\,(n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$.

6. 极限存在准则

(1)夹逼准则：

定理 1　若(Ⅰ)函数 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\eta)$ 内满足条件：

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，　$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

定理 2　若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

(Ⅰ)　$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n\,(n>N$，$N$ 为某正整数)，

(Ⅱ)　$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

(2)单调有界收敛准则：单调有界数列必有极限.

7. 两个重要极限及其推广

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

推广：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

推广：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

进一步：$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$.

(3)应牢记的左右极限：

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$；

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0^{+}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^{-}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$；

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

(4)两个基本极限：

$\lim\limits_{x\to0^{+}}x^{x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$.

8. 七种未定式

$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}.

9. 无穷小比较

(1)定义　设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是在自变量 x 的同一变化过程中的无穷小，

(Ⅰ)　若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

(Ⅱ)　若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(Ⅲ)　若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小.

特别地，若 $c=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

(Ⅳ)　$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^{k}}=c\neq0,k>0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小 .

(2)有关无穷小的有用结论：

(Ⅰ)　当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^{2}$，

此外还有：$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^{x}-1\sim x$，$a^{x}-1\sim x\ln a$，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$.

(Ⅱ)　有界函数乘以无穷小量仍为无穷小量.

(Ⅲ)　在 x 的同一变化过程中：

若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；

若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(Ⅳ)　极限计算中，应用等价无穷小替代的原则：乘除可用，加减慎用.

§3　函数的连续性及其性质

(一)函数的连续性与连续函数

1. 函数的连续性

(1)定义：

(Ⅰ)　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处左(右)连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0)(f(x_0^+)=f(x_0))$.

(Ⅱ)　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$$\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

(2)间断点：函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若出现下列三种情形之一，则点 x_0 称为函数 $f(x)$的不连续点(或间断点)：

(Ⅰ)　$f(x)$在 $x=x_0$ 没有定义；

(Ⅱ)　虽然 $f(x)$在 $x=x_0$ 有定义，但极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(Ⅲ)　虽然 $f(x)$在 $x=x_0$ 有定义，且极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

(3)间断点的分类：若 x_0 是 $f(x)$的间断点，则

(Ⅰ)　第一类间断点：$f(x_0^-)$和 $f(x_0^+)$均存在的间断点. 此时.

若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$，则称点 x_0 是函数 $f(x)$的跳跃间断点；

若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$，也即极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则称点 x_0 是函数 $f(x)$的可去间断点.

(Ⅱ)　第二类间断点：不是第一类间断点的任何间断点. 此时，左、右极限 $f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$中至少有一个不存在. 常见的第二类间断点有无穷间断点与振荡间断点.

(4)连续函数的运算

(Ⅰ)　连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数.

(Ⅱ)　单调增加(或单调减少)的连续函数，其反函数在对应区间上也是单调增加(或单调减少)并且连续.

(Ⅲ)　连续函数与连续函数的复合函数，仍为连续函数.

(5)一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

2. 闭区间上的连续函数的四个性质

(1)有界性定理：闭区间的连续函数在该区间上有界.

(2)最大最小值定理：闭区间的连续函数一定能取得到它的最大值和最小值.

(3)零点定理：若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，那么在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使 $f(\xi)=0$.

(4)介值定理：设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$，$f(b)=B$，那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论：在闭区间上连续的函数必取得介于其最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

二、典型例题分析

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases}1,x<1\\0,x\geqslant 1\end{cases}$，求函数 $f(f(f(x)))$的表达式.

解　$f(f(x))=\begin{cases}1,f(x)<1\\0,f(x)\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}1,x\geqslant 1\\0,x<1\end{cases}$，

$$f(f(f(x)))=\begin{cases}1,f(f(x))<1\\0,f(f(x))\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}1,x<1\\0,x\geqslant 1\end{cases}=f(x).$$

例 2 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-a,a)(a>0)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内也单调增加.

证 对于任意给定的正数 $x_1,x_2\in(0,a)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in(-a,0)$，且 $-x_1>-x_2$，由于 $f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内单调增加，故 $f(-x_1)>f(-x_2)$.

又因为 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(-x_1)=-f(x_1)$，$f(-x_2)=-f(x_2)$，从而有

$-f(x_1)>-f(x_2)$，由此得 $f(x_1)<f(x_2)$.

因此，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内也单调增加.

例 3 设函数 $g(x)=\begin{cases}-x, x\leqslant 1\\ x-1, x>1\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^3, x\leqslant 1\\ 1+x, x>1\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 1}g[f(x)]$.

解 $g[f(x)]=\begin{cases}-f(x), f(x)\leqslant 1\\ f(x)-1, f(x)>1\end{cases}$，

显然，$f(x)\leqslant 1\Leftrightarrow x\leqslant 1$. 所以，当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3\leqslant 1$，从而 $g[f(x)]=-x^3$；

当 $x>1$ 时，$f(x)=1+x>1$，从而 $g[f(x)]=(1+x)-1=x$.

综上得
$$g[f(x)]=\begin{cases}-x^3, x\leqslant 1\\ x, x>1\end{cases}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}g[f(x)]=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x^3)=-1$，

$\lim\limits_{x\to 1^+}g[f(x)]=\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}g[f(x)]\neq\lim\limits_{x\to 1^+}g[f(x)]$，

所以极限 $\lim\limits_{x\to 1}g[f(x)]$ 不存在.

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\pi}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}+\arctan\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解 当 $x\to 1^-$ 时 $\dfrac{1}{1-x}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{1-x}}\to+\infty$，$\arctan\dfrac{1}{1-x}\to\dfrac{\pi}{2}$，

所以
$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\pi}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}+\arctan\frac{1}{1-x}\right)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2};$$

当 $x\to 1^+$ 时 $\dfrac{1}{1-x}\to-\infty$，$e^{\frac{1}{1-x}}\to 0$，$\arctan\dfrac{1}{1-x}\to-\dfrac{\pi}{2}$，

所以
$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\pi}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}+\arctan\frac{1}{1-x}\right)=\frac{\pi}{1+0}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

因此，$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\pi}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}+\arctan\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\tan x-\sin x}-1}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\tan x-\sin x}=\frac{1}{2}.$$

(上式最后一步利用 $x\to0$ 时，$\tan x-\sin x\to0$，故 $e^{\tan x-\sin x}-1\sim\tan x-\sin x$)

例 6　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

解　当 $x\to0$ 时，$e^{\cos x-1}-1\sim\cos x-1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，$\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\dfrac{x^2}{3}$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{e(1-e^{\cos x-1})}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=e\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{3}}=\frac{3e}{2}.$$

例 7　求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解　这是 1^∞ 型未定式.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1+2^x}{2}-1\right)^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}\cdot\frac{2^x-1}{2x}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}},\end{aligned}$$

当 $x\to0$ 时，$2^x-1\sim x\ln2$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln2}{2x}=\frac{\ln2}{2},$$

因此，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln2}{2}}=\sqrt{2}$.

例 8　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x]$.

解　这是$\infty-\infty$型的未定式.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x]&=\lim_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)+2e^{\frac{1}{x}}]\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+2\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}\\&=1+2\cdot1=3.\end{aligned}$$

例 9　已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b.

解　因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3+1}-ax-b\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^4-bx^3-ax-b}{x^3+1}$$

$$=0,$$

所以$\begin{cases}1-a=0\\b=0\end{cases}$，　即$\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$.

例 10　设$\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$，求$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 把$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2$改写成指数形式：$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x^2}\right)}{x}}=\mathrm{e}^2$，

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)}{x}=2.$

由于分母当$x\to 0$时为无穷小，所以分子也应为无穷小，即有$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$，从

而有 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0,$

由此得，当$x\to 0$时 $\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)\sim x+\dfrac{f(x)}{x^2},$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)}{x}=2,$

因而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1.$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^3}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$

例 11 设当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，$x\sin x^n$是比$(\mathrm{e}^{x^2}-1)$高阶的无穷小，则正整数n等于（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

答 应选(B).

解 由题设有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0 \quad 和 \quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=0.$$

当$x\to 0$时，有 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, \ln(1+x^2)\sim x^2, \sin x^n\sim x^n, \mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2,$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^n}=0\Rightarrow n\leqslant 2$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^n}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x}=0\Rightarrow n\geqslant 2,$

由此得正整数$n=2$，

故应选(B).

例 12 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right).$

解 记 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}.$

因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^6+kn}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}\quad(k=1,2,\cdots,n),$

故 $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n}}.$

而 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

所以 $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant x_n\leqslant\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n}}.$$

因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n}}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}}=\frac{1}{3},$$

由夹逼准则知，$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)=\frac{1}{3}.$$

例 13　设 $\{x_n\}$ 为数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=q$，$|q|<1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=q$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=|q|<1$. 由极限的保号性，知存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}<1$. 于是当 $n>N$ 时数列 $\{|x_n|\}$ 单调减少，同时 $|x_n|\geqslant 0$，根据单调有界收敛定理可以推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=a$.

若 $a\neq 0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}|}{\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|}=\frac{a}{a}=1$，但这与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=|q|<1$ 矛盾. 因此应有 $a=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 14　已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}, & x<1\\ b, & x=1\\ \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{a}{x-1}}, & x>1\end{cases}$，求常数 a 和 b，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

解　函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续 $\Leftrightarrow f(1^-)=f(1^+)=f(1)$.

因为 $$f(1^-)=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(1+\sqrt{2-x})}{x-1}=2,$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{a}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\left[\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right]^{\frac{a}{x}}=e^a,$$

$$f(1)=b,$$

所以应有　$e^a=2=b$，

从而　$a=\ln 2, b=2$.

例 15　函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) $-\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

答　应选(A).

解　$f(x)$ 是初等函数，其无定义的点即为其间断点. 显然，它在 $[-\pi,\pi]$ 上无定义的点为

$x=0,1,\pm\dfrac{\pi}{2}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=1\cdot(-1)=-1$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=1\cdot1=1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,可见 $x=0$ 为 $f(x)$的第一类间断点,故应选(A).

事实上,$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x}\cdot\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\infty$,

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\tan x=\infty,$$

因此 $x=1,\pm\dfrac{\pi}{2}$是 $f(x)$的第二类间断点.

故应选(A).

三、本章习题解答

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$

解 $y=\dfrac{x+1}{x^2-x-2}=\dfrac{x+1}{(x-2)(x+1)}$,定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) $y=\dfrac{1}{4x^3}-\sqrt{2-x^2}$

解 $x\neq0$,且 $2-x^2\geqslant0$,定义域为$[\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2}]$.

(3) $y=\ln(2x-1)$

解 $2x-1>0$,定义域为$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

(4) $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$

解 $-1\leqslant\dfrac{x}{2}+1\leqslant1$,即$-4\leqslant x\leqslant0$,定义域为$[-4,0]$.

2. 判断下列函数的奇偶性

(1) $y=x^2+\cos2x$

解 记$y=f(x)=x^2+\cos2x$,因为

$f(-x)=(-x)^2+\cos(-2x)=x^2+\cos2x=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数.

(2) $y=|\sin x|$

解 记 $y=f(x)=|\sin x|$,因为

$f(-x)=|\sin(-x)|=|\sin x|=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数.

(3) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

解　记 $y=f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)，$$所以 $f(x)$ 是奇函数.

(4) $y=x^4+x$

解　记 $y=f(x)=x^4+x$，因为 $f(-x)=(-x)^4+(-x)=x^4-x\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

3. 证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内单调增加.

证　记 $y=f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，对任意的 $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内单调增加.

4. 下列函数中哪些是周期函数？哪些是非周期函数？若是周期函数，指出其周期.

(1) $y=x\sin x$

解　不是周期函数.

(2) $y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$

解　是周期函数. 周期 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

5. $f(x)=\begin{cases}2-x, & -1\leqslant x<0\\ 2+x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 在其定义域内是(　　).

(A)无界函数　　(B)偶函数　　(C)单调函数　　(D)周期函数

解　因为
$$\begin{aligned}f(-x)&=\begin{cases}2-(-x), & -1\leqslant -x<0\\ 2+(-x), & 0\leqslant -x\leqslant 1\end{cases}\\ &=\begin{cases}2+x, & 0<x\leqslant 1\\ 2-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}\\ &=\begin{cases}2-x, & -1\leqslant x<0\\ 2+x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\\ &=f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是偶函数，故选(B).

6. 求下列函数的反函数

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-1}\quad(x\neq 1)$

解　去分母得　$xy-y=x+2$，

由此解得　$x=\dfrac{y+2}{y-1}$，

所以，反函数为　$y=\dfrac{x+2}{x-1}\quad(x\neq 1)$.