高等学校理工类课程学习辅导丛书

周衍柏

理论力学教程（第三版）学习指导书

管靖　杨晓荣　涂展春

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校理工类课程学习辅导丛书

周衍柏

理论力学教程（第三版）学习指导书

Lilun Lixue Jiaocheng Xuexi Zhidaoshu

管靖　杨晓荣　涂展春

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是与周衍柏编《理论力学教程(第三版)》相配套的学习指导书。指导书依据主教材的体例分为五章,每一章包括补充思考题及提示、主教材思考题提示、补充例题、主教材习题提示和补充习题及提示。本指导书包括主教材中全部的思考题和习题,并补充了一些不同风格的思考题、例题和习题,一方面使本指导书的讨论更为全面,另一方面也希望使用其他教材的读者也可以方便且有效地使用本指导书。本书可供选用《理论力学教程(第三版)》的师生作为教学和学习参考书使用,也可供其他高等学校相关专业的师生和社会读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学教程(第三版)学习指导书 / 管靖,杨晓荣,涂展春编. —北京:高等教育出版社,2012.1
ISBN 978-7-04-033897-3

Ⅰ. ①理… Ⅱ. ①管… ②杨… ③涂… Ⅲ. ①理论力学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O31

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第217488号

策划编辑 缪可可　责任编辑 缪可可　封面设计 张志奇　版式设计 范晓红
插图绘制 郝　林　责任校对 胡晓琪　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.75	版　　次	2012年1月第1版
字　　数	240千字	印　　次	2012年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	22.00元

物 料 号　33897-00

前　言

本学习指导书主要为配合周衍柏编的《理论力学教程(第三版)》(以下简称主教材)而编写,指导书也依据主教材的体例分为五章。每一章包括补充思考题及提示、主教材思考题提示、补充例题、主教材习题提示和补充习题及提示。本指导书包括了主教材中全部的思考题和习题,并补充了一些不同风格的思考题、例题和习题,其用意在于一方面使本指导书的讨论更为全面,另一方面也希望使用其他教材的读者也可以方便且有效地使用本指导书。

读者必须认真学习教材,独立地思考思考题和独立地完成必需的习题。本书不准备,也不可能为读者提供学习的捷径,学习指导结合具体问题进行,大多是"借题发挥",以"评述"的方式给读者一些建议,对相关问题作一些延伸的讨论,不求面面俱到。"评述"不一定是思考题和习题解答的必需内容,为与正文(宋体字)区分,"评述"用楷体字排印。

"学学问,先学问,只会答,非学问。"在学习的过程中能提出问题,经过思考而获得提高是很重要的,教材中设置思考题的主要目的就是给予读者如何提出问题的范例。所以对于思考题,最重要的不是思考题的答案是什么,而是学习提出问题和解决问题的方法。读者应注意,对于思考题应重在思考,直接阅读提示是无益的,正因如此,本书中把"补充思考题"和"补充思考题提示"分开排印。对于主教材中的思考题,由于笔者不一定可以完全领悟原作者的立意,所以给出的提示仅供读者参考。

独立地解算习题是学习的必需过程,直接阅读习题解答和提示也是无益的。读者还应注意,解题过程也是学习科学表述能力的过程,所以解题的过程和步骤的表述必须符合教材和课程的要求。本书中的补充例题给出了解答,可以作为解题的范例。主教材习题和补充习题均只给出提示,提示包括了解题的主要步骤,但并不一定符合解题过程的要求,读者完成习题时应补充必要的步骤及演算过程。

由于我国读者一般有一些力学基础,所以读者学习理论力学的理论常感到问题不多,但是完成理论力学的习题可能会遇到较多的困难。不会解题是初学者通常遇到的问题,读者不必紧张。我们希望本指导书能对努力学习但有一定困难的读者有所帮助。

编者

2011 年 7 月

目　　录

第一章　质点力学

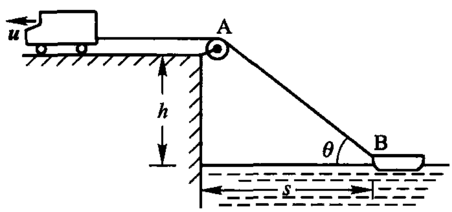
§1.1　补充思考题及提示

一、补充思考题

1.1　如 BS1.1 图所示，岸距水面高为 h，岸上有汽车拉着绳子以匀速率 u 向左开行，绳子另一端通过滑轮 A 连于小船 B 上，绳与水面交角为 θ 时，小船到岸的距离为 s. 则 u 与 $\dot{s}$ 的关系为

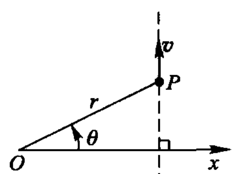
(1) $u = \dot{s}\cos\theta$, (2) $u = -\dot{s}\cos\theta$,

(3) $\dot{s} = u\cos\theta$, (4) $\dot{s} = -u\cos\theta$.

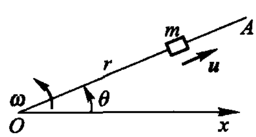


BS1.1 图

1.2　质点沿一条与极轴 Ox 正交的直线做匀速率运动，如 BS1.2 图所示. 试求质点加速度在极坐标系中的分量 a_r 和 a_θ.



BS1.2 图



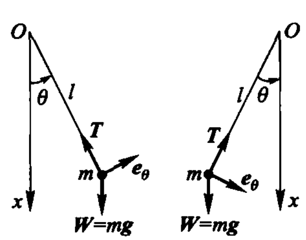
BS1.3 图

1.3　杆 OA 在平面内绕固定端 O 以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动. 杆上有一滑块 m，相对杆以匀速度 $\boldsymbol{u}$ 沿杆滑动，如 BS1.3 图所示. 有人认为研究 m 的运动有如下结论：(1) $a_r=0, a_\theta=0$，故 $a=0$；(2) O 为 OA 转动中心，所以在自然坐标系中向心加速度指向 O 点. 试分析上述结论是否正确.

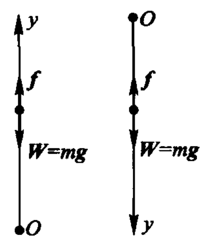
1.4 试证从质点速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 求轨道曲率半径的公式为 $\rho=\dfrac{v^3}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}$.

1.5 有一质量为 m 的珠子,沿一根置于水平面内的铁丝滑动,采用自然坐标系描述. 珠子受重力 $\boldsymbol{W}=m\boldsymbol{g}$,铁丝施加的约束力 $\boldsymbol{N}=N_t\boldsymbol{e}_t+N_n\boldsymbol{e}_n+N_b\boldsymbol{e}_b$. $N_t\boldsymbol{e}_t$即为滑动摩擦力$\boldsymbol{f}$,设动摩擦因数为μ. 试判断下列各式正误:(1) $f=\mu mg$,(2) $f=\mu N_b$,(3) $f=\mu N_n$,(4) $f=\mu\sqrt{N_n^2+N_b^2}$.

1.6 二人用极坐标系描述单摆的运动. 甲如 BS1.6-1 图左图所示规定 θ 角正向,得到动力学方程 $ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$. 乙如 BS1.6-1 图右图所示规定 θ 角正向,则得到 $ml\ddot{\theta}=mg\sin\theta$. 你认为谁的做法正确?



BS1.6-1 图



BS1.7 图

1.7 质量为 m 的质点,由静止开始自高处自由落下. 设空气阻力 f 与速率成正比,比例系数为 k. 甲建立竖直向上的坐标如 BS1.7 图左图所示,得到方程为 $m\ddot{y}=-mg+k\dot{y}$. 乙建立竖直向下的坐标如 BS1.7 图右图所示,得到方程为 $m\ddot{y}=mg-k\dot{y}$. 他们列出的方程对吗?

1.8 "河水向下游流动,船无动力地沿河水向下游漂流,船的载重越大运动得越快还是运动得越慢?"某人为回答这个问题,他访问了船工,船工说:"船的载重越大走得越快."此人对船工的回答颇感疑惑. 你对这个问题怎么看,试作分析.

1.9 有人认为:用极坐标系讨论质点的平面运动时,如果 $F_r\equiv0$,则沿径向动量守恒,$p_r=m\dot{r}=$ 常量. 若 $F_\theta\equiv0$,则沿横向动量守恒. 这种看法对吗?

1.10 在固定的直角坐标系 $Oxyz$ 中,质量为 m 的质点的速度 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$,所受合力为 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$. 能否将质点的动能定理 $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 向 Ox 方向投影而得出分量方程 $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}mv_x^2\right)=F_x\mathrm{d}x$? 该方程是否正确?

1.11 教材讨论平方反比引力时的轨道微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\dfrac{k^2}{h^2}(k^2=Gm_S)$及其解$r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$,在作适当改变后能否适用于平方反比斥力情况?

1.12 试估算1 kg的物体在地面下640 km处所受地球引力的大小.

1.13 "设想由地球北极打通一条直隧道,穿过地心到达南极,令一物体从北极的隧道口自由下落,使物体在运动过程中不与隧道壁相碰,则由于机械能守恒,物体将在地球的南北极之间不停地往返,而成为一种最节约能量的穿过地球的方法."你对此有何看法?你认为此物体会如何运动.

二、补充思考题提示

1.1 提示 小船速度$\boldsymbol{v}$沿水面,$\boldsymbol{v}$沿绳方向投影的大小为u,因此$u=v\cos\theta$.但应注意到s减小,$\dot{s}$为负值,所以$u=-\dot{s}\cos\alpha$.

评述 距离s为非负标量,但$\dot{s}$可取正负.物理量的正负号,是一个可能决定成败的细节,请读者注意,在下面的思考题和例题中还会继续讨论.

1.2 提示 质点做匀速直线运动,$\boldsymbol{a}=0$,所以$a_r=a_\theta=0$.

评述 速度和加速度在不同坐标中的表达式不同,但它们是等价的,矢量的大小和方向均不依赖于坐标系的选取.

1.3 提示 (1) 因$a_r\neq\ddot{r}$,$a_\theta\neq r\ddot{\theta}$,所以$a_r\neq0$,$a_\theta\neq0$,$\boldsymbol{a}\neq0$.

(2) 向心加速度指向质点运动轨道的曲率中心,而O点不是轨道的曲率中心.

1.4 提示 设v_t为$\boldsymbol{v}$沿$\boldsymbol{e}_t$的分量,v_t是可取正负的标量.v是速率,是非负标量.

在自然坐标系中

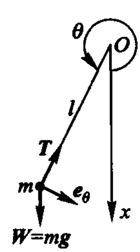
$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}=v_t\boldsymbol{e}_t\times\left(\frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\frac{v_t^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n\right)=\frac{v_t^3}{\rho}\boldsymbol{e}_b$$

上式等号两侧取模,即得$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|=\dfrac{v^3}{\rho}$.

1.5 提示 仅(4)式正确.

1.6 提示 甲正确.乙的错误是角度正向不可以从动线指向定线.

如果乙要画成右图并要保持$\boldsymbol{e}_\theta$的指向,其θ角就必须规定如BS1.6-2图所示.但是,这样规定的θ为第四象限角,$\sin\theta$取负值,动力学方程依然为$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$.



BS1.6-2 图

评述 注意：① 角度正向必须从定线指向动线. ② 尽量把角度画为第一象限的锐角，否则要注意三角函数的正负号.

1.7 提示 乙的动力学方程正确.

甲错在空气阻力应为 $-k\dot{y}$，$\dot{y}$ 取负值，$-k\dot{y}$ 取正值，动力学方程为 $m\ddot{y}=-mg-k\dot{y}$.

评述 如果题目改为研究质点的竖直上抛运动，质点可能向上，也可能向下运动，但总有空气阻力 $f=-k\dot{y}$. 画受力图时就不要画 f 了，文字中写明 $f=-k\dot{y}$ 即可.

1.8 提示 先考虑物体在空气中的降落，当空气阻力与重力平衡时，质点将以终极速度 v_z 匀速下降. 在物体大小和形状改变不大的条件下，物体越重则终极速度越大.

河水向下游流动时，水面不是水平面，水面向下游方向逐渐降低，可以看成是一个“斜面”. 船无动力地沿河水向下游漂流时，除随河水运动外，还会沿水的“斜面”向下相对河水运动. 和物体在空气中降落的情况类似，船相对河水也会达到终极速度，船越重，船相对河水的终极速度越大，因此船的载重越大运动得越快.

实践是检验真理的唯一标准，船工的经验是正确的.

1.9 提示 用表征某方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_l$ 点乘质点的动量定理，得

$$\boldsymbol{e}_l\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{F}=F_l$$

若此方向是固定方向，则 $\boldsymbol{e}_l$ 为常矢量，有

$$\boldsymbol{e}_l\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{p})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}t}=F_l$$

即可得到沿固定的 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的动量定理. 如果此方向不是固定方向，就不存在沿此方向的动量定理. 极坐标系的径向和横向均不是固定方向，所以不存在沿径向和横向的动量定理，也不存在相应的守恒定律.

评述 质点的角动量定理，是对固定点的角动量定理和对固定轴的角动量定理. 请读者自己完成定理的推导，看看为什么要有固定点或固定轴的要求.

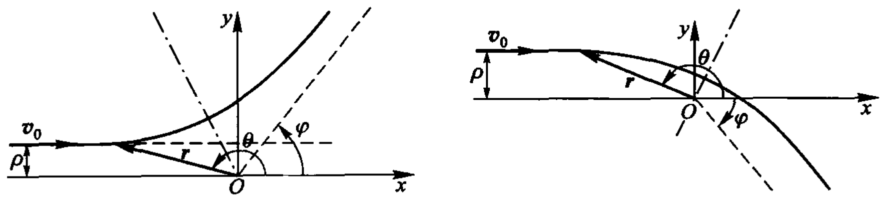
1.10 提示 动能定理是标量方程，不能投影，也没有分量方程.

用 $v_x\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ 乘牛顿第二定律的 x 分量方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=F_x$，可得

$$(v_x\mathrm{d}t)m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=F_x\mathrm{d}x$$

因$(v_x\mathrm{d}t)m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=mv_x\mathrm{d}v_x=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}mv_x^2\right)$,故$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)=F_x\mathrm{d}x$是正确的.

1.11 提示 轨道微分方程改为$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=-\dfrac{k^2}{h^2}$,其解相应改为$r=\dfrac{p}{-1+e\cos\theta}$,即可适用于平方反比斥力情况.但对于平方反比斥力情况,$E>0$,$e>1$,质点运动轨道只有双曲线一种类型,如BS1.11图左图所示,如果轨道为双曲线的左支,则力心位于右焦点.



BS1.11 图

对平方反比引力情况,仅当质点的能量$E>0$,轨道为双曲线时才能形成散射.质点的轨道为双曲线,如BS1.11图右图所示.但当轨道为双曲线的左支时,力心位于左焦点.

1.12 提示 万有引力和静电引力一样,都是平方反比引力,请读者复习电磁学有关静电场的内容,即可知对万有引力也可以有相应的"高斯定理",重力加速度对应于电场强度.

设地球半径$R=6\ 400$ km,以地心为球心,$0.9R$为半径作"高斯面",设地面下640 km处重力加速度为$g_{0.9}$.由"高斯定理"可求出$g_{0.9}=0.9g$,故1 kg的物体在地面下640 km处所受地球引力的大小为1 kg×0.9×9.8 m/s^2=8.8 N.

评述 *物理学分成力学、热学、电磁学等,只是研究物理学的视角不同.不管学哪门课,都是在学习物理学,请读者不要把它们割裂开来,想想它们的共性!*

1.13 提示 物体在空气中降落时,当空气阻力与重力平衡时,质点将以终极速度v_t匀速下降.对于物体在空气中长时间降落的情况,是不可以忽略空气阻力的!机械能守恒的假设完全不符合实际情况.

参见补充思考题1.11,请读者复习电磁学有关静电场的内容,对比均匀带电的介质球内电场强度的分布,可知物体在地球内部所受地球引力与物体到地心的距离成正比.

请读者复习热学有关玻尔兹曼分布的内容,气体分子分布于低能位置的概率较大.在穿过地心的隧道内,越接近地心,重力势能越小,空气密度越大,物体

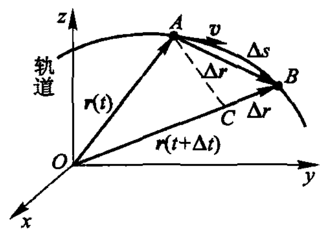
受到的阻力也就越大.

物体在穿过地心的隧道内,在向地心降落的过程中,物体很快就会达到终极速度 v_z;越接近地心,所受地球引力越小而所受空气阻力越大,所以 v_z 越来越小;趋近地心时,v_z 趋近于零. 因此,从较大尺度看,物体将落入地心,不可能在南北极之间往返运动.

§1.2 主教材思考题提示

1.1 平均速度与瞬时速度有何不同? 在什么情况下,它们一致?

提示 $\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$. 一般情况下二者的大小、方向均可能不同. 比如,在曲线运动中,$\boldsymbol{v}$ 沿轨道切线方向,而 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 沿由 $\Delta \boldsymbol{r}$ 决定的轨道割线方向,参见 S1.1 图.



S1.1 图

当质点做匀速直线运动时,二者一致.

1.2 在极坐标系中,$v_r=\dot{r}, v_\theta=r\dot{\theta}$. 为什么 $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ 而非 $\ddot{r}$?为什么 $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ 而非 $r\ddot{\theta}+\dot{r}\dot{\theta}$?你能说出 a_r 中的 $-r\dot{\theta}^2$ 和 a_θ 中另一个 $\dot{r}\dot{\theta}$ 出现的原因和它们的物理意义吗?

提示 在极坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 都不是常矢量,它们的时间导数不为零,$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$,所以极坐标系的速度和加速度表达式不似直角坐标系简单.

我们可以这样理解,以便记忆极坐标系的速度和加速度表达式:

当 θ 不变而仅 r 改变时有径向的速度 $\dot{r}$,当 r 不变而仅 θ 改变时有横向的速度 $r\dot{\theta}$,所以 $\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$. 注意 $r\dot{\theta}$ 不一定沿轨道的切向,因此它不是切向速度.

当 θ 不变而仅 r 改变时有径向的加速度 $\ddot{r}$,当 r 不变而仅 θ 改变时有横向的加速度 $r\ddot{\theta}$ 和径向的加速度 $-r\dot{\theta}^2$,记住!还有一项横向的加速度 $2\dot{r}\dot{\theta}$,所以 $\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$.

注意:① $-r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r$ 指向坐标原点,而坐标原点不一定是轨道曲率中心,因此它不是向心加速度. ② $2\dot{r}\dot{\theta}$ 是由于径向运动和横向运动同时存在、相互耦合产生的,因此不易于直接写出;另外,现在只有一个参考系(没有运动参考系),所以不能说它是科里奥利(科氏)加速度.

1.3 在内禀方程中，a_n 是怎样产生的？为什么在空间曲线中它总沿着主法线的方向？当质点沿空间曲线运动时，副法线方向的加速度 a_b 等于零，而作用力在副法线方向的分量 F_b 一般不等于零，这是不是违背了牛顿运动定律？

提示 a_n是因速度的方向变化而产生的，在密切面内与速度垂直，因此沿主法线方向.

牛顿定律要求质点在副法线方向受到的合力为零，合力包括主动力和约束力.

1.4 在怎样的运动中只有 a_t 而无 a_n？在怎样的运动中又只有 a_n 而无 a_t？在怎样的运动中既有 a_t 又有 a_n？

提示 $a_t=0$ 说明质点做匀速(率)运动.

在 $v\neq0$ 的情况下，$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}=0$，说明 $\rho=\infty$，即质点做直线运动.

1.5 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$与$\dfrac{dr}{dt}$有无不同？$\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$与$\dfrac{dv}{dt}$有无不同？试就直线运动与曲线运动分别加以讨论.

提示 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}$是矢量，$\dfrac{dr}{dt}$是标量.

参见 S1.1 图，图中 $OA=OC$，$|dr|=CB$. 速率 $v=\dfrac{|d\boldsymbol{r}|}{dt}$，$|d\boldsymbol{r}|=AB\neq|dr|$，所以$\dfrac{dr}{dt}$不是速率.

如果质点做直线运动，且坐标原点位于直线上，则 $|d\boldsymbol{r}|=|dr|$. 但是，$|d\boldsymbol{r}|\geqslant0$，而 dr 可正可负，一般依然是 $|d\boldsymbol{r}|\neq dr$. 因速率 $v\geqslant0$，所以$\dfrac{dr}{dt}$依然不一定是速率.

对于$\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$和$\dfrac{dv}{dt}$，请读者自己讨论.

1.6 人以速度 $\boldsymbol{v}$ 向篮球网前进，则当其投篮时应以什么角度投出？跟人静止时投篮有何不同？

提示 人向篮球网前进，投篮时出手的仰角应比人静止时投篮的仰角大.

请读者以地面为静止参考系，人为运动参考系，讨论之.

1.7 雨点以匀速度 v 落下，在一有加速度 a 的火车中看，它走什么路径？

提示 在地面静止参考系中，雨滴受到的合力为零.

在火车运动参考系中，雨滴还要受惯性力 $-m\boldsymbol{a}$ 的作用，所以雨滴受到的合

力为 $-ma$. 不妨以 $mg^{*}=-ma$ 为等效重力,则可知在火车运动参考系中,雨滴做加速度 g^{*}、沿水平方向的、类似平抛的运动,轨道为抛物线.

1.8 某人以一定的功率划船,逆流而上. 当船经过一桥时,船上的渔竿不慎掉入河中. 两分钟后,此人才发觉,立即返棹追赶. 追到渔竿之处是在桥的下游 600 m 的地方,问河水的流速是多大?

提示 地面为静止参考系,河水为运动参考系,船相对速率为 v',河水流速为 v_0,则

$$120+\frac{120(v'-v_0)+600}{v'+v_0}=\frac{600}{v_0}\quad(\text{SI 单位})$$

可知 $v_0=2.5\ \text{m/s}$.

1.9 物体运动的速度是否总是和所受的外力的方向一致? 为什么?

提示 物体加速度的方向与所受合力的方向一致. 速度的方向与受力的方向没有一定关系.

1.10 在哪些条件下,物体可以做直线运动? 如果初速度的方向和力的方向不一致,则物体是沿力的方向还是沿初速度的方向运动? 试用一具体实例加以说明.

提示 当质点不受力,或质点初速度为零且所受合力的方向永远不变,或质点所受合力的方向永远与初速度方向相同时,物体可做直线运动.

质点所受合力的方向与初速度方向不同时,质点可能既不沿力的方向,也不沿初速度的方向运动,重力场中的斜抛运动就是实例.

1.11 质点仅因重力作用而沿光滑静止曲线下滑,达到任意一点时的速度只和什么有关? 为什么是这样? 假如不是光滑的又将如何?

提示 曲线光滑,因机械能守恒,质点的速度只和它的高度有关.

1.12 为什么质点被约束在一光滑静止的曲线上运动时,约束力不做功? 我们利用动能定理或能量积分,能否求出约束力? 如不能,应当怎样去求?

提示 光滑静止曲线对质点的约束力在曲线的法平面内,质点运动方向沿曲线切线方向,二者相互垂直,故约束力不做功.

约束力不做功,故动能定理中不出现约束力,当然无法由此求出约束力. 约束力要由包括约束力的方程(如质点动力学方程)求出.

1.13 质点的质量是 1 kg,它运动时的速度是 $\boldsymbol{v}=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\sqrt{3}\boldsymbol{k})$ m/s,式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是沿 x、y、z 轴上的单位矢量. 求此质点的动量和动能的量值.

提示 $$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\sqrt{3}\boldsymbol{k})\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2=8\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$$

1.14 在上题中,当质点以上述速度运动到(1,2,3)点时(坐标轴上的数值以 m 为单位),它对原点 O 及 z 轴的动量矩各是多少?

提示 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=[(2\sqrt{3}-6)\boldsymbol{i}+(9-\sqrt{3})\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}]\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$

$$J_z=-4\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

1.15 动量矩守恒是否就意味着动量也守恒?已知质点受有心力作用而运动时,动量矩是守恒的,问它的动量是否也守恒?

提示 质点动量矩守恒不意味其动量也守恒.质点在有心力场中运动时,动量矩守恒,但动量不守恒.

1.16 如 $F=F(r)$,则在三维直角坐标系中,仍有 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ 的关系存在吗?试验之.

提示 矢量关系 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ 是否存在,与选用的坐标系无关,本无须验算!

作为练习,可以算一下:

$$\boldsymbol{F}=F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}=F(r)\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+F(r)\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+F(r)\frac{z}{r}\boldsymbol{k}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

所以 $\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[F(r)\dfrac{x}{r}\right]=\dfrac{\partial F(r)}{\partial r}\dfrac{xy}{r^2}-F(r)\dfrac{xy}{r^3}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[F(r)\dfrac{y}{r}\right]=\dfrac{\partial F_y}{\partial x}$

同理有 $\dfrac{\partial F_y}{\partial z}=\dfrac{\partial F_z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial F_z}{\partial x}=\dfrac{\partial F_x}{\partial z}$,因此 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$.

1.17 在平方反比引力问题中,势能曲线应具有什么样的形状?

提示 平方反比引力 $\boldsymbol{F}=-\dfrac{A}{r^2}\boldsymbol{e}_r$,以无穷远为势能零点,其势能为 $V=-\dfrac{A}{r}$,势能曲线为双曲线的一支.

1.18 我国发射的第一颗人造地球卫星的轨道平面和地球赤道平面的交角为 68.5°,比苏联及美国第一次发射的都要大.我们说,交角越大,技术要求越高,这是为什么?交角大的优点是什么?

提示 人造地球卫星的轨道平面与赤道平面交角越大,发射时可以利用的地球自转速度沿发射方向的分量就越小,所以对发射火箭的技术要求就越高.火箭的发射地点距赤道越近,越能更好地利用地球自转的速度,对发射越有利.这是我国将在海南建立航天发射场的原因之一.地球卫星的轨道平面与赤道平面

交角越大,卫星可以扫描的地表面积就越大.

1.19 卢瑟福公式对库仑引力场来讲也能适用吗?为什么?

提示 参见补充思考题 1.11(BS1.11 图).卢瑟福公式原本是对库仑斥力导出的,对库仑引力情况,仅当质点的能量 $E>0$,轨道为双曲线时才能形成散射.请读者独立完成卢瑟福公式的推导过程,即可发现,对库仑引力情况,原公式

$$\cot\frac{\varphi}{2}=\frac{m\rho v_0^2}{k'} \quad 或 \quad \rho=\frac{k'}{mv_0^2}\cot\frac{\varphi}{2}$$

中的 k'(对应斥力)要换为 $-k'$(对应引力),φ(φ 与 θ 正方向一致)要换为 $-\varphi$(φ 与 θ 正方向相反),可以得到和原公式完全相同的结果,所以卢瑟福公式对库仑引力场依然适用.

§1.3 补充例题

例题 1.1 质点做平面运动,其速率为常量 v_0,径向速度的大小亦为常量 $b(b>0,b<v_0)$,求质点的轨道方程.设 $t=0$ 时 $r=r_0,\theta=0$.

解法一 由 $v_r=\dot{r}=b$ 可得

$$\mathrm{d}r=b\mathrm{d}t$$

积分,并用 $t=0$ 时 $r=r_0$ 定积分常数,求出 $r=r_0+bt$.代入 $\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=v_0^2$,得到

$$b^2+(r_0+bt)^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=v_0^2$$

即

$$\mathrm{d}\theta=\pm\sqrt{v_0^2-b^2}\frac{\mathrm{d}t}{r_0+bt}$$

积分,并由 $t=0$ 时 $\theta=0$ 定积分常数,则

$$\theta=\pm\frac{\sqrt{v_0^2-b^2}}{b}\ln\frac{r_0+bt}{r_0}$$

把 $r=r_0+bt$ 代入上式即得 $r=r_0\mathrm{e}^{\pm k\theta}$,式中 $k=\dfrac{b}{\sqrt{v_0^2-b^2}}$,“±”说明螺旋线的旋转方向不同.

评述 由已知的速度或加速度求运动学方程,属于运动学逆问题,比由运动学方程求速度和加速度的运动学正问题复杂些,但只要把握住解题方向也不难解决.本例题只求轨道方程,所以可以在积分前先消去变量 t 而求出轨道微分方

程,之后再积分求出轨道方程.

解法二 由于 $\dot{r}=b$,考虑到 $\dot{\theta}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\cdot\dot{r}$,所以 $\dot{\theta}=b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$,代入 $\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=v_0^2$,则得到质点运动的轨道微分方程:

$$\mathrm{d}\theta=\pm\frac{\sqrt{v_0^2-b^2}}{b}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

积分,并用 $\theta=0$ 时 $r=r_0$ 定积分常数,即得 $r=r_0\mathrm{e}^{\pm k\theta}$,式中 $k=\frac{b}{\sqrt{v_0^2-b^2}}$.

例题 1.2 质点沿圆锥曲线 $y^2-2mx-nx^2=0$ 运动,其速率为 c,其中 m、n、c 均为正值常量,求质点速度的 x 分量和 y 分量.

评述 当已知质点运动的轨道时,可以由此了解运动的很多信息.除本例题的方法以外,由轨道方程求轨道曲率半径也是常用的方法.请读者参见主教材习题提示 1.10、1.28、1.30.

解法一 轨道方程对时间求导,得

$$y\dot{y}-m\dot{x}-nx\dot{x}=0\text{ ,即 }\dot{y}=\frac{m+nx}{y}\dot{x}$$

把上式代入 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=c^2$, 得

$$\dot{x}^2+\left(\frac{m+nx}{y}\right)^2\dot{x}^2=c^2$$

可求出 $\dot{x}=\pm\frac{cy}{\sqrt{y^2+(m+nx)^2}}$,进而可得 $\dot{y}=\pm\frac{c(m+nx)}{\sqrt{y^2+(m+nx)^2}}$.

解法二 $\boldsymbol{v}=v_t\boldsymbol{e}_t=\pm c\boldsymbol{e}_t$,设 $\boldsymbol{e}_t$ 与 Ox 夹角为 θ,

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pm\sqrt{2mx+nx^2})=\pm\frac{m+nx}{\sqrt{2mx+nx^2}}=\frac{m+nx}{y}$$

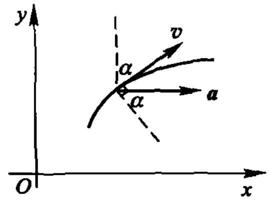
$$\dot{x}=v\cos\theta=v\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}=\pm\frac{c}{\sqrt{1+y'^2}}=\pm\frac{cy}{\sqrt{y^2+(m+nx)^2}}$$

$$\dot{y}=v\sin\theta=\pm\frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\pm\frac{c(m+nx)}{\sqrt{y^2+(m+nx)^2}}$$

例题 1.3 质点的轨道曲线在 Oxy 平面内,其速度的 y 分量为正值常量 c,试证质点加速度的大小可表示为 $a=\frac{v^3}{c\rho}$,其中 v 为速率,ρ 为轨道曲率半径.

提示 如 BL1.3 图所示，设 $\boldsymbol{v}$ 与 Oy 夹角为 α. 因为 $\dot{y}=c$，故 $\ddot{y}=0$，所以 $\boldsymbol{a}$ 沿 Ox 方向，因此 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}=a\cos\alpha$.

由于 $\dot{y}=c=v\cos\alpha$，所以 $a=\dfrac{v^2}{\rho\cos\alpha}=\dfrac{v^3}{c\rho}$.



BL1.3 图

评述 画出清晰准确的草图，充分利用几何关系，是解决问题的重要有效手段.

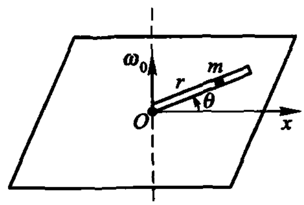
例题 1.4 内壁光滑的直管，在水平面内绕过端点 O 的竖直轴以角速度 ω_0 均匀转动. 管内有一质量为 m 的质点，初始时到 O 点的距离为 r_0，相对管静止，如 BL1.4 图所示. 试求质点沿管的运动规律和质点对管在水平方向的压力.

解 建立极坐标系，如 BL1.4 图所示，质点在水平方向受约束力 $\boldsymbol{N}=N_\theta\boldsymbol{e}_\theta$，动力学方程组为

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=0 \qquad (1)$$

$$m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=N_\theta \qquad (2)$$

$$\dot{\theta}=\omega_0 \qquad (3)$$



BL1.4 图

将(3)式代入(1)式，得

$$\ddot{r}-\omega_0^2 r=0$$

其通解为

$$r=C_1\mathrm{e}^{\omega_0 t}+C_2\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

由 $t=0$ 时，$r=r_0$ 和 $\dot{r}=0$ 定积分常数，则

$$r=\frac{r_0}{2}(\mathrm{e}^{\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\omega_0 t})=r_0\mathrm{ch}\,\omega_0 t$$

即为质点沿管的运动规律. 由(2)式可求出

$$N_\theta=2m\omega_0\dot{r}=2mr_0\omega_0^2\mathrm{sh}\,\omega_0 t$$

根据牛顿第三定律，质点对管在水平方向的压力为 $-2mr_0\omega_0^2\mathrm{sh}\,\omega_0 t\boldsymbol{e}_\theta$.

评述 对于约束运动，约束方程可能有各种形式，本例题中约束方程为 $\dot{\theta}=\omega_0$.

例题 1.5 旋轮线(圆滚线)是如 BL1.5 图所示的，半径为 a 的圆轮在直线 AB 上做无滑滚动时，轮缘上 P 点的轨迹. 圆轮转过的角度用 φ 描述，$\varphi=0$ 时 P 位于 O 点，其参数方程为