

大學叢書

矢 算 論

胡金昌著

商務印書館發行

大學叢書

矢 算 論

胡金昌 著



商務印書館發行

中華民國二十八年一月初版
中華民國三十八年九月四版

（58803平）

大學叢書
（教本）
矢 算 論 一 冊

裝平

基 價 拾 伍 元

印刷地點外另加運費

* 版 翻 *
* 權 印 *
* 所 必 *
* 有 究 *

著 者 胡 金 昌

上海河南中路

發 行 人 陳 懋 解

印 刷 所 商務印書館

發 行 所 商務印書館

分 類 號 417.6

記 號 19320

序 文

年來微分幾何與數學物理之論文，皆移其目標於矢算與張式，矢算論已爲時尚之學科久矣。作者時時渴望國內名家之引起是科，而本人亦乃不先不後，遽作是書，其自私之心固預爲拙作微分幾何之準備；然較高一點之希望，誠願是書既出，國中卽有同聲氣相感之學人，繼起其矢算微分幾何，絕對微分學，宇宙幾何等諸作。先我而出，俾得拜讀，是尤所感幸者焉。

作者既深慚茲書已獻曝於諸君子之前，敢將其內容略述之。茲作全文，在三百頁之內，竊以爲已甚概括矣。書中論調，饒有近世代數與變換羣論之口味，是則作者本來之面目也。其長處，則茲書自具一種數學眼光；其弱點，則以爲過於數學化，而不能適應於物理學者之觀點。作者深知此弊，已勉爲引入頗多物理性之舉例與對象，如斯大抵亦已足矣。書中每章之末，附以名詞論著註引：其名詞，則因國內歷年之各數學名詞會，鮮有擬及矢算論之學名者，故各名詞皆爲著者所擬譯；其論著，則在國內各大藏書館，如能獲見之者，讀者於閒中便參照之。

書中一切之定理與習題，皆抄襲前哲之著作，且慎擇其可靠者，而敘述之；故讀者對於定理與習題之成立，可無疑義。且從有 Hamilton 之四原術，及 Gibbs 之矢算論等諸統宗名著，後之諸家著者，大都比

類相從而引用，茲書亦猶是矣。至於書中之諸定理與舉例，其編配與推證法，大是作者本人私意自爲之，則其與他書，必有異同之點矣。固知凡能讀是書之學人，必能順讀一國以上之外國文，其不必已明也。茲書與他外國文諸作並行，不願只以其文字之異同而存身，而尤望別有其他異同之點。自其同者而觀之，則天然真理，大抵學人所見略同。自其異者而觀之，則各作家自具其本來面目；深願讀者取茲書之優異點，以作別本之鍼規；摘其劣點以見教，俾作者得自知疏略，冀補過於來日也。

胡金昌序

十月，廿四日，1938

中山大學

目 錄

第一章 矢量之意義與其分合

§ 1. 矢與矢量.....	1
2. 模與向.....	1
3. 矢之解析的定義.....	2
4. 加法之定義.....	3
5. 加法之運算律.....	4
6. 減法與負矢.....	4
7. 倍法與其運算律.....	5
8. 矢之共線.....	5
9. 矢量之分析.....	6
10. 基本系.....	7
11. 矢算法與解析法.....	7
12. 諸矢之線性關聯.....	8
13. 有向幾何.....	9
14. 面積矢.....	11
15. 相對運動.....	12

16. 共點力	12
17. 力學上 算之例	13
習題 I	14
第一章 名詞計	16

第二章 矢量之乘積

§ 18. 數性積	17
19. 正射影	17
20. 數性積之運算律	17
21. 對於基本系矢之分析	18
22. 矢性積	19
23. 矢性積之普通性質	19
24. 矢性積之運算律	20
25. 數性三重積	21
26. 數性三重積之幾何性	22
27. 數性三重積對於斜坐標系之表示	24
28. 矢性三重積	24
29. 四重積	26
30. 於力學上矢算之應用	27
31. 矢乘法之引例	29
32. 反商基本系	30
33. 對於斜坐標系矢之分析	32

34. 含一個或多個數性元之矢性方程式.....	32
35. 一矢元一次數性方程式.....	33
36. 一矢元一次矢性方程式.....	34
習題 II	38
第二章 名詞註引	40

第三章 矢算幾何

§ 37. 位置矢爲點之坐標.....	41
38. 基本定理.....	41
39. 直線之矢算方程式.....	43
40. 平面之矢算方程式.....	45
41. 位置矢之線性關聯.....	47
42. 形心.....	48
43. 幾何定理之矢算證明舉例.....	51
44. 球之幾何性.....	55
45. 線幾何.....	57
習題 III	60
第三章 名詞論文註引	62

第四章 矢算微積分

§ 46. 矢之引數及其微分.....	64
47. 微分法之公式.....	65

48. 矢積 微分公式.....	65
49. 與微 去連帶之項目.....	67
50. 定積 具未定積分.....	68
.....	70
52. 循線積分.....	71
53. 循面積分.....	73
54. 空間曲線與其所屬之三主向.....	74
55. 動標三面形系.....	77
56. 曲線之本性.....	79
57. 曲面上之 Gauss 氏坐標系與第一基本微分二次式.....	83
58. 第二基本微分二次整齊式.....	85
59. 質點力學.....	90
60. 動標系之相對運動.....	91
習題 IV.....	93
第四章 名詞註引.....	97

第五章 數性場與矢性場

§ 61. 函數與函數場.....	98
62. 數性點函數場.....	98
63. 矢性點函數場.....	102
64. 矢性點函數之散度與旋度.....	104

65. 積之展開公式.....	106
66. 二級微分算子.....	107
67. 梯度, 散度, 旋度之幾何性 (以循面積分極限式表之).....	110
68. 梯度旋度之幾何性 (以循線積分表之).....	114
69. 散度之物理意味.....	116
70. 旋度之物理意味.....	117
71. 循線積分與循面積分之各變換定理	118
72. Green 氏定理.....	122
73. Green 氏公式.....	123
74. 片層矢性點函數.....	125
75. 螺管矢性點函數.....	129
76. 點函數之判定.....	131
習題 V	132
第五章 名詞註引.....	135

第六章 位函數

§ 77. 數性位函數.....	137
78. 引力場與其位函數.....	138
79. Poisson 氏方程式.....	143
80. Maxwell-Lorentz 二氏磁電方程式.....	145
81. 矢性位函數.....	148
82. 矢性函數可表以片層函數與螺管函數之和	149

83. 矢性位 數之引例.....	152
84. 積分矢 子.....	154
85. 位積函	156
習題 VI	159
第六章 名詞註引.....	161

第七章 線性矢函數—並矢式

§ 86. 線性矢函數.....	162
87. 並矢式.....	164
88. 並矢式之相等.....	167
89. 並矢式與並矢式之直乘積.....	169
90. 並矢式與矢量之扭積.....	171
91. 並矢式之三項式與九原式.....	172
92. 原格並矢式.....	174
93. 一度降格並矢式, 面性並矢式	176
94. 二度降格並矢式, 綫性並矢式	177
95. 零並矢式.....	179
96. 並矢式之數量與矢量.....	180
97. 自配並矢式與反配並矢式.....	180
98. 么並矢式.....	183
99. 反商並矢式.....	185
100. 附屬並矢式.....	187

101. 並矢式之法式.....	189
102. 自配並矢式之法式.....	192
103. 並矢式之不變式.....	193
習題 VII.....	196
第七章 名詞註引.....	199

第八章 並矢式之分類及其應用

§ 104. Hamilton-Cayley 二氏方程式.....	200
105. 並矢式之分類.....	201
106. 齊次仿射變換, 形變.....	203
107. 分類法之背景.....	205
108. 繞軸轉式與循環並矢式.....	207
109. 斜向張式.....	211
110. 剪式.....	213
111. 斜張式之化法.....	215
112. 循環斜張式之化法.....	216
113. 剪式之化法.....	219
114. 分類法結論.....	221
115. 中心二次曲面.....	222
116. 二次曲面之幾何性.....	224
117. 慣性並矢式.....	226
習題 VIII.....	229

第八章 名詞論著註引	232
------------------	-----

第九章 並矢變式及其微積分

§ 118. 算子 ∇ 施於矢量之作用	234
119. 並矢式之複乘積	236
120. 並矢變式之微分	238
121. 二級微分算子	239
122. 循線，循面，空間積分，及其間之互變公式	240
123. 並矢式之應用於微分幾何，面之曲率	243
124. 並矢式於形變之應用	245
125. 並矢變式之積分於應力之應用	247
習題 IX	250
第九章 名詞註引	252

第十章 變換論

§ 126. 本章引論及其記數法	253
127. 普通坐標系與基性矢	254
128. 微分二次整齊式與度量係數	258
129. 普通坐標系之變換式	259
130. 基本微分二次整齊式之變換	264
131. 矢量之分量值之變換	266
132. 並矢式之變換	266

133. 微分不變式.....	268
134. 限制相對論/Lorentz, Einstein 二氏變換式.....	271
135. Lorentz 之磁電方程式之變換.....	274
習題 X	278
第十章 名詞註引.....	280

矢 算 論

第一章 矢量之意義與其分合

1. **矢與矢量** 在空間內有指向與長度而無定位置之線分名曰矢。⁽¹⁾ 矢之認識，以其長度及其三個方向餘弦⁽²⁾辨之。三個方向餘弦，僅有二者獨立，故矢在空間之自由度⁽³⁾有三。

通常物理學上之量，有量之數值及量所沿之方向——如速度、力，等——名曰矢量。⁽⁴⁾ 矢量之認識，以一純數附以某物理單位，及其三個方向餘弦表之。然矢量之表象，常賴幾何圖以解釋，——如力之平行四邊形，等——故矢與矢量，意義雖不同，然其研究之方法則無別，下文將不必過於拘泥歧視之也。

別於矢量而言，量之有數值而無方向性者曰數量，或稱之為無向量。⁽⁵⁾ 在幾何上之表象，即所謂純長度。下文將以斜體字母 a, b, A, B ， $a, \dots$ 表數量，以闊板字母 $a, b, A, B, \alpha, \dots$ 表矢量。

2. **模與向** 矢之長度名曰模⁽⁶⁾ 乃一數量，且當為純正數。矢量 a 之模之記數法，通常以 a 或以 $|a|$ 表之。矢之指向與其模無關，故

可作一矢與原矢同指向，而其模爲 1 者，以表原矢之指向。該矢名曰單位矢，⁽⁷⁾於原矢之記數上加以 $\wedge$ 號以辨之。例如已與 $\mathbf{a}$ 矢，則其模爲 a ，其指向表以 $\hat{\mathbf{a}}$ 。

矢之模爲零者曰零矢。⁽⁸⁾

定義：兩矢之相等，必須且只須其模相等，其指向相同。即

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 之充分且必須條件爲： $a = b$ ， $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{b}}$ 。

系理：凡零矢皆相等，以闊體阿剌伯字母 $\mathbf{0}$ 表之。

由定義且可更認識矢之特徵，只爲模與指向，而與在空間之位置無關。兩同向平行之等長線分，所表之矢無別。轉言之，空間內已與一矢，則其位置可任定；即矢之起點，可任擇便宜之點，以發出之。

3. 矢之解析的定義 空間內點之總集⁽⁹⁾爲 ∞^3 。以 (x, y, z) 三

坐標認識之。下文凡所用之坐標系，皆採用右手坐標制度（如圖 1）。由 Grassmann 氏之宇宙廣意論，⁽¹⁰⁾ 在三維空間內點之認識，藉一廣義數⁽¹¹⁾ $(x \ y \ z)$ 表出之。此廣意數爲三原組，⁽¹²⁾ 亦即爲一列三行之列陣式⁽¹³⁾

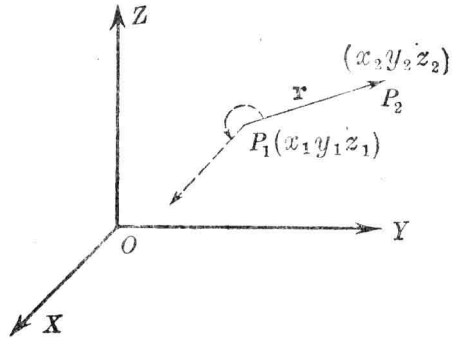


圖 1.

$$\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \| .$$

由 § 1, 空間內矢之總集亦爲 ∞^3 ，故當然可以某種三原組表示之。諸表示法中之一法如下：

設 $\mathbf{r}$ 矢由 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 至 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 則

$$\mathbf{r} = \parallel x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1 \quad z_2 - z_1 \parallel$$

可稱為 $\mathbf{r}$ 矢之解析的定義。此陣式之性質，即 $\mathbf{r}$ 之性質。例如其秩⁽¹⁴⁾ 爲 0，即謂 $\mathbf{r}$ 矢爲零矢；又如

$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

$$\cos(\mathbf{r}, \overrightarrow{OX}) = \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \cos(\mathbf{r}, \overrightarrow{OY}) = \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad \cos(\mathbf{r}, \overrightarrow{OZ}) = \frac{z_2 - z_1}{r}.$$

下文凡 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 之符號，皆用以表示由 $\mathbf{a}$ 矢依反時針方向，轉至 $\mathbf{b}$ 矢所經之角度，角之平面之上方，依右手系定之，如圖 1 表出 $\angle(\mathbf{r}, \overrightarrow{OX})$ 。

4. **加法之定義** 已與 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 兩矢，將 $\mathbf{b}$ 矢之起點，附於 $\mathbf{a}$ 矢之終點，則由 $\mathbf{a}$ 矢之起點至 $\mathbf{b}$ 矢之終點之矢，

命之爲 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。

說明：1° 上文乃定義，並非當然的方法。讀者若另設立別種定義，亦可作別一種口味之矢算法。不過在各種可能定義當中，

要以上文之定義，於目前之數學與物理，較爲最有効用。——即有較確切之對象，如兩複虛數之相加，平行四邊形合力等——故現採取之爲定義。下文如是類之定義固多，皆非當然的判斷，讀者以此處之見解着想之可也。

2° 由 § 2 之末，已與之矢可任定其位置，故上之定義，謂 $\mathbf{b}$ 之起點附於 $\mathbf{a}$ 之終點，爲可能之事無疑。

系理：若有多個矢 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \dots$ 等，則其矢性和，可以各矢首末順次連接而成曲折線。

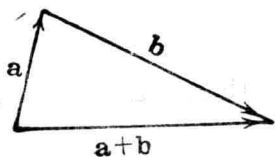


圖 2.