清華大學

应用数学论文集

清华大学应用数学系

一九九〇年

目　录

029/032

常微分方程规范形系数的计算

王　铎

由于常微分方程的规范形理论在常微分方程定性理论、稳定性理论及局部分枝理论中有广泛的应用，人们越来越重视规范形的计算。但目前许多结果只给出了规范形的一般形式，如〔1〕-〔4〕而对具体方程的相应规范形中的系数，由于一般计算相当繁琐，有些作者给出了计算机程序，利用符号计算软件如MACSYMA来计算，如〔5〕-〔7〕。计算规范形系数的主要困难在于一个方程经过接近恒同的变换后所得到的方程的系数不容易计算。本文给出一个部分递推的方法，用这个方法，只要变换后方程的低阶项系数知道了（一般是容易的），就容易算出高阶项系数，而且计算主要是多项式的代数运算，一般是容易的。作为这个方法的应用，本文还讨论了平面向量场细焦点的焦点量的计算，按本文的方法比传统的算法减少许多工作量。

设所考虑的方程为

(1)　$\dot{x} = Ax + f^2(x) + \cdots + f^r(x) + O(|x|^{r+1})$,

$x \in \mathbb{C}^n$（或 $\mathbb{R}^n$）

其中 A 为 $n \times n$ 常数矩阵，$f^k \in H_n^k$，这里 H_n^k 为全体 n 维 n 元 k 次齐次多项式所组成的线性空间，$k = 2, \cdots, r$。

定义线性算子 ad_A^k: $H_n^k \to H_n^k$ 如下：

注：本文得到国家自然科学基金资助。

$$ad_A^k \xi^k(x) = D\xi^k(x)Ax - A\xi^k(x), \ \xi^k \in H_n^k,$$

其中 $D\xi^k$ 表示 ξ^k 的 $Jacobi$ 矩阵。设 C^k 为 $\mathrm{Im}\,ad_A^k$ 在 H_n^k 中的一个补空间，即

$$H_n^k = \mathrm{Im}\ ad_A^k \oplus C^k.$$

对每个 $f^k \in H_n^k$ 都存在唯一的分解

$$f^k = h^k + g^k;$$

其中 $h^k \in \mathrm{Im}\,ad_A^k$，$g^k \in C^k$。众所周知，求规范形的关键是求 g^k，即 f^k 沿着 $\mathrm{Im}\,ad_A^k$ 在 C^k 上的投影。

为此我们在 H_n^k 中定义内积 $<\cdot,\cdot>$。设 $p(x)$，$q(x) \in H_n^k$，并且具有如下形式：

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} x^{\alpha} e_i,$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} q_{\alpha i} x^{\alpha} e_i,$$

其中 $x^{\alpha} = x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_n}$，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，$e_i$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的标准单位向量，$i = 1, \cdots, n$。则定义

$$< p(x), q(x) > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} \bar{q}_{\alpha i} \alpha!,$$

其中$\alpha ! = \alpha_1 ! \cdots \alpha_n !$。

注：这里内积的定义实质上与〔3〕的定义相同。〔3〕已经证明了：若A^*为矩阵A的共轭矩阵，则$ad_{A^*}^k$就是ad_A^k的共轭算子。因此$\ker\ ad_{A^*}^k$就是$\mathrm{Im}\ ad_A^k$的一个补空间。

定理1、设$\{V_1, \cdots V_s\}$为$\ker\ ad_{A^*}^k$的一组基。

若$\{W_1, \cdots, W_s\} \subset H_n^k$满足下述条件：

$$(2) \qquad < V_i, W_j > = \delta_{ij},\ i, j = 1, \cdots, s,$$

则 $C^k = span\{W_1, \cdots, W_s\}$也是$\mathrm{Im}\ ad_A^k$在$H_n^k$中的一个补空间，并且对任意$f^k \in H_n^k$，

$$(3) \qquad g^k = \sum_{i=1}^{s} < f^k, V_i > W_i$$

就是f^k沿$\mathrm{Im}\ ad_A^k$在C^k上的投影。

证明： 略。

推论1、设$f^k \in H_n^k$。若g^k如公式（3）所定义，则方程

$$ad_A^k \xi^k = f^k - g^k$$

关于$\xi^k \in H_n^k$必有解，并且经过变换$x = y + \xi^k(y)$后方程(1)中的k次齐次项化为g^k。

例 1、 设方程

$$
(4)\quad \begin{cases} \dot{x} = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + h.o.t, \\ \dot{y} = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + h.o.t, \end{cases}
$$

其中 $h.o.t.$ 表示高阶项，方程(4)的线性部分矩阵为：

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}。
$$

取 $V_1 = x^2 e_2$，$V_2 = xye_2 + x^2 e_1$。易见 $\{V_1, V_2\}$ 为 $\ker ad_{A^*}^2$ 的一组基。又设 $W_1 = \frac{1}{2}x^2 e_2$，

$$
W_2 = xye_2 。
$$

易见条件(2)满足。由公式(3)得

$$
g^2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{20}x^2 + (2a_{20} + b_{11})xy \end{pmatrix}。
$$

于是方程(4)的二阶规范形可取为

$$
\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b_{20}x^2 + (2a_{20} + b_{11})xy \end{cases}
$$

注意我们并未求所需的变换就已经找到了(4)的二阶规范形，只有当需要求高于二阶的规范形时我们才需要按推论 1 求出所需的 ξ^2 。

当　当A为对角形时，$\ker\ ad^{k}_{A^*}$和f^k（$\in H^k_n$）在$\ker\ ad^{k}_{A^*}$中的投影及相应变换中的ξ^k都容易计算。

定理2、　设$A=diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。若

$$f^k(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{a=k}C_{ai}X^a e_i,\quad k\geq 2,$$

则f^k在$\ker\ ad^{k}_{A^*}$中的投影是

$$g^k(y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda\cdot a=\lambda_i}C_{ai}y^a e_i, \tag{5}$$

而推论1中的方程的解ξ^k为

$$\xi^k(y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda\cdot a\neq\lambda_i}\frac{C_{ai}}{\lambda\cdot a-\lambda_i}y^a e_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda\cdot a=\lambda_i}p_{ai}y^a e_i, \tag{6}$$

其中　$\lambda\cdot a=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n$，$p_{ai}$为任意常数

证明：事实上$\ker\ ad^{k}_{A^*}$是由所有k阶共振单项式所张成的，由于

$$\left\{X^a e_i/a!,\ \lambda\cdot a=\lambda_i,\ |a|=k,\ 1\leq i\leq n\right\}$$

为$\ker\ ad^{k}_{A^*}$的一组标准正交基，按定理1，只要取$w_i=v_i$，$i=1,\cdots,s$，则由公式(3)便可得(5)，又经计算知$\forall X^a e_i\in H^k_n$，

$$ad_A^k(x^a e_i)=(\lambda\cdot a-\lambda_i)x^a e_i 。$$

(6)式所定义的 $\xi^k(y)$ 恰为 $ad_A^k\xi^k(y)=f^k(y)-g^k(y)$ 的解。证毕。

例2、设方程

$$(7)\quad \begin{cases}\dot{x}= a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+h.o.t.,\\ \dot{y}=y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2+h.o.t.。\end{cases}$$

由于 $A=diag(0,1)$ 为对角形，二阶共振项为 x^2e_1 和 xye_2。由定理2知二阶规范形为

$$\begin{cases}\dot{x}=a_{20}x^2,\\ \dot{y}=y+b_{11}xy 。\end{cases}$$

所需的接近恒同的变换中的 ξ^2 为

$$\xi^2(x,y)=\begin{bmatrix}px^2+a_{11}xy+a_{02}/_2\ y^2\\ -b_{20}x^2+qxy+b_{02}y^2\end{bmatrix},$$

其中 p、q 为任意常数。

注：变换 ξ^2 中的 p、q 为任意实数，虽然作变换时不影响二次项的系数，但对高次项系数有影响，甚至可能影响高阶规范形的系数（[8]）。

由于计算规范形时是二次项开始逐次做变换把二次项、三次项、…依次化为规范形，因此每次变换都应把前一次变换后的方程作为

新的出发点。例如作变换 $x=y+\varepsilon^2(y)$ 把二次项化为规范形之后，三次项系数一般也不再是原来的 f^3 了。再作 $x=y+\varepsilon^3(y)$ 时，不能用(1)中的 f^3 来求投影 g^3，而必须用作过 $x=y+\varepsilon^2(y)$ 后新方程的 3 次项作为 f^3 来求投影。因此求每一步变换后的方程中的高次系数是求高阶规范形的系数的必不可少的一步。

定理 3、设方程(1)经变换

$$x=y+\varepsilon^k(y),\quad \varepsilon^k\in H_n^k,\quad 2\le k\le r$$

化为

$$(8)\quad \dot{y}=By+g^2(y)+\cdots+g^k(y)+\cdots+g^r(y)+O(|y|^{r+1}),$$

其中 B 为 $n\times n$ 常数矩阵，$g^l\in H_n^l$，$l=2,\cdots,r$，

则 $B=A$，并且

$$g^l(y)=f^l(y),\qquad l=2,\cdots,k-1,$$

$$g^k(y)=f^k(y)-ad_A^k\varepsilon^k(y),$$

$$g^m(y)=\tilde{f}^m(y)-D\varepsilon^k(y)g^{m-k+1}(y),$$

$$m=k+1,\cdots,r,$$

其中 $\tilde{f}^m(y)$ 为 $f^2(y+\varepsilon^k(y))+\cdots+f^r(y+\varepsilon^k(y))$ 展开式中的 m 次齐次多项式。

证明：(1)经变换 $x=y+\varepsilon^k(y)$ 后变为

$$(9)\quad \dot{y}=(I+D\varepsilon^k(y))^{-1}(Ay+A\varepsilon^k(y)+\tilde{f}^r(y)+O(|y|^{r+1})),$$

其中 y 属于原点的一个邻域Ω。因此

$$(I+D\xi^k(y))^{-1}(Ay+A\xi^k(y)+\tilde{f}^2(y)+\cdots+\tilde{f}^r(y)$$

$$+O(|y|^{r+1}))$$

$$=By+g^2(y)+\cdots+g^r(y)+O(|y|^{r+1}),$$

注意到

$$(I+D\xi^k(y))^{-1}=I-D\xi^k(y)(I+D\xi^k(y))^{-1},\ y\in\Omega$$

因此(9)可表为

$$\dot{y}=Ay+\tilde{f}^2(y)+\ldots+\tilde{f}^k(y)+A\xi^k(y)+\cdots$$

$$+\tilde{f}^r(y)-D\xi^k(y)(I+D\xi^k(y))^{-1}(Ay+A\xi^k(y)$$

$$+\tilde{f}^2(y)+\cdots+\tilde{f}^r(y))+O(|y|^{r+1})$$

$$=Ay+\tilde{f}^2(y)+\cdots+\tilde{f}^k(y)+A\xi^k(y)+\cdots$$

$$+\tilde{f}^r(y)-D\xi^k(y)(By+g^2(y)+\cdots+g^r(y))$$

$$+O(|y|^{r+1})$$

比较上式的右边与(8)的右边并注意到在 $f^2(y+\xi^k(y))+\cdots+f^r(y+\xi^k(y))$ 展开式中低于 $k+1$ 次的项仍为 $f^2(y)+\cdots+f^k(y)$，便得到定理的结论。

注：不难用 Taylor 公式从 $f^2(y+\xi^k(y))+\cdots+f^{m-k+1}(y+\xi^k(y))+f^m(y)$ 算得 $\tilde{f}^m(y)$。

例3、设

$$(10)\quad\begin{cases} \dot{x} = y + \sum\limits_{i+j=2}^{3} a_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} = \sum\limits_{i+j=2}^{3} b_{ij} x^i y^j. \end{cases}$$

由例1知

$$g^2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{20}x^2 + (2a_{20} + b_{11})xy \end{pmatrix}$$

由推论1知

$$\xi^2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11} + b_{02})x^2 + (a_{02} + c_2)xy + c_1 y^2 \\ -a_{20}x^2 + b_{02}xy + c_2 y^2 \end{pmatrix}$$

其中 c_1、c_2 为任意常数。作变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \xi^2(u, v)$$

按定理3，方程(10)经变换所得新方程（仍用 x，y 表示新变量 u，v）中的三次项应为

$$f^3(x, y) + Df^2(x, y)\xi^2(x, y) - D\xi^2(x, y)g^2(x, y)$$
$$= \begin{pmatrix} a'_{30}x^3 + \cdots \\ b'_{30}x^3 + b'_{21}x^2 y + \cdots \end{pmatrix},$$

其中 $a'_{30} = a_{30} + a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20} - c_1 b_{20}$，$b'_{30} = b_{30} + a_{11}b_{20} - a_{20}b_{11}$，$b'_{21} = b_{21} + 2a_{02}b_{20} +$

$+\frac{1}{2}a_{11}b_{11}+\frac{1}{2}b_{11}b_{02}-4a_{20}b_{02}$ 取

$$v_1=\begin{bmatrix}0\\x^3\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}x^3\\x^2y\end{bmatrix}$$

易见 v_1，v_2 为 $\ker ad^3_{A^*}$ 的一组基，又取

$$w_1=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0\\x^3\end{bmatrix}\qquad w_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\x^2y\end{bmatrix}$$

由定理1得到规范形中的三次项为

$$g^3(x,y)=\begin{bmatrix}0\\Ax^3+Bx^2y\end{bmatrix},$$

其中 $A=b_{30}+a_{11}b_{20}-a_{20}b_{11}$，$B=3a_{30}+b_{21}+$

$(a_{11}+b_{02})b_{11}/2-a_{20}b_{02}-a_{02}b_{20}-3b_{20}c_2$。

易见当 $b_{20}\neq 0$ 时，可取适当的 c_2 使 $B=0$，这时3阶规范形为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=b_{20}x^2+(2a_{20}+b_{11})xy+(b_{30}+a_{11}b_{20}-a_{20}b_{11})x^3\end{cases}$$

下面我们介绍用规范形求平面向量场细焦点的焦点量的一个新方法。

不失一般性，我们考虑下述方程

$$
(11)\quad
\begin{cases}
\dot{x} = -y + \sum\limits_{i+j=2}^{r} a_{ij} x^i y^j + h.o.t.\,, \\[2ex]
\dot{y} = x + \sum\limits_{i+j=2}^{r} b_{ij} x^i y^j + h.o.t.\,,
\end{cases}
$$

其中a_{ij}，b_{ij}均为实数，r为充分大的正整数。作变换

$z_1 = x + iy$， $z_2 = x - iy$ 。(11)化为

$$
(12)\quad
\begin{cases}
\dot{z}_1 = iz_1 + \sum\limits_{i+j=2}^{r} A_{ij} z_1^i z_2^j + h.o.t.\,, \\[2ex]
\dot{z}_2 = -iz_2 + \sum\limits_{i+j=2}^{r} B_{ij} z_1^i z_2^j + h.o.t.\,,
\end{cases}
$$

其中A ，B 均为复数。由于(12)线性部分矩阵为对角形，我们能比较容易地求出(12)的规范形。注意到$z_2 = \overline{z}_1$，(12)中第二个方程右端函数也是第一个方程右端函数的共轭，我们用$\overline{z}$代替z_2，并把(12)的第一个方程写为

$$
(13)\quad \dot{z} = iz + g_1^2(z, \overline{z}) + \cdots + g_1^{2m+1}(z, \overline{z}) + O(|z|^{2m+2})
$$

称(13)为方程(11)的第一个变换后的方程。对方程(13)作一系列接近恒同的变换$z = v + \xi^k(v, \overline{v})$，$k = 2, \cdots, l$， $2 \le l \le 2m+1$

把变换后的方程记为

$$
(14)_l\quad \dot{z} = iz + g_l^2(z, \overline{z}) + \cdots + g_l^{2m+1}(z, \overline{z}) + O(|z|^{2m+2})
$$

并称(14)$_i$为(11)的第 i 个变换后的方程。记 $A_{i,j}^{(l)}$ 为(14)$_l$ 中 $z^i\bar{z}^j$ 的系数。

由定理 2 知，我们可以找到一系列变换 $Z=V+\varepsilon^{k}(V,\bar{V})$ $k=2,\cdots,2m+1$，使(11)的第 $2m+1$ 个变换后的方程为

$$(15)\quad \dot{Z}=iZ+A_{2,1}^{(2m+1)}Z^2\bar{Z}+\cdots+A_{m+1,m}^{(2m+1)}Z^{m+1}\bar{Z}^m+$$

$$+0(|Z|^{2m+2})\text{，其中 } A_{i,j}^{(2m+1)} \text{ 均为复数。易见，}$$

$$A_{k+1,k}^{(2l+1)}=A_{k+1,k}^{(2k+1)},\ k=1,2,\cdots,m-1,\ l\geq k。$$

如果在(15)中，$\mathrm{Re}\,A_{2,1}^{(2m+1)}=\cdots=\mathrm{Re}\,A_{k,k-1}^{(2m+1)}=0$，而 $\mathrm{Re}\,A_{k+1,k}^{(2m+1)}\neq 0$ $(1\leq k\leq m)$ 那么原点就是(11)的 k 阶细焦点，它的第 1 至第 k 个焦点量都为 0 而第 k 个焦点量为

$$2\pi\cdot\mathrm{Re}\,A_{k+1,k}^{(2m+1)}\text{（见〔9〕）。}$$

定理 4．如果(11)的细焦点（原点）的所有阶数小于 m（≥ 1）的焦点量均为 0，那么它的第 m 阶焦点量为

$$V_{2m+1}=2\pi\cdot\mathrm{Re}\,A_{m+1,m}^{(m+1)}。$$

证明：只须证明 $\mathrm{Re}\,A_{m+1,m}^{(2m+1)}=\mathrm{Re}\,A_{m+1,m}^{(m+1)}$。设(11)的第

第 $m+1$ 个变换后的方程为

$$\dot{Z}=iZ+A^{(m+1)}_{2,1}Z^{2}\bar{Z}+\cdots+A^{(m+1)}_{n+1,n}Z^{n+1}\bar{Z}^{n} \tag{16}$$

$$+g^{m+2}_{m+1}(Z,\bar{Z})+\cdots+g^{2m+1}_{m+1}(Z,\bar{Z})+O(|Z|^{2m+2}),$$

其中 $n=[\,m/2\,]$。按定理 2 选取 $\varepsilon^{k}\in P^{k}$ ($k\geq m+2$)，这里 P^{k} 表示所有二元数值 k 次齐次多项式的集合。对(16)作变换 $Z=V+\varepsilon^{k}(V,\bar{V})$。由定理 3 知，变换后的方程中的 $2m+1$ 次齐次项为

$$g^{2m+1}(Z,\bar{Z})=f^{2m+1}(Z,\bar{Z})-D_{Z}\varepsilon^{k}(Z,\bar{Z})g^{2m+2-k}_{m+1}(Z,\bar{Z})$$

$$-D_{\bar{Z}}\varepsilon^{k}(Z,\bar{Z})\,g^{2m+2-k}_{m+1}(Z,\bar{Z}),$$

其中 f^{2m+1} 为 $g^{2}_{m+1}(Z+\varepsilon^{k}(Z,\bar{Z}),\bar{Z}+\varepsilon^{k}(Z,\bar{Z}))+\cdots$

$+g^{2m+1}_{m+1}(Z+\varepsilon^{k}(Z,\bar{Z}),\bar{Z}+\varepsilon^{k}(Z,\bar{Z}))$ 展开式中的 $m+1$ 次齐次多项式。当 k 为偶数时，$g^{2m+2-k}_{m+1}=0$，$f^{2m+1}=g^{2m+1}_{m+1}$，于是 $g^{2m+1}=g^{2m+1}_{m+1}$。在 g^{2m+1} 中的 $Z^{m+1}\bar{Z}^{m}$ 的系数仍为 $A^{(m+1)}_{m+1,m}$

而当 k 为奇数时

$$g^{2m+1}=g^{2m+1}_{m+1}+D_{Z}g^{l}_{m+1}\varepsilon^{k}+D_{\bar{Z}}g^{l}_{m+1}\varepsilon^{k}$$

$$-D_Z\xi^k\cdot g^l_{m+1}-D_{\bar{Z}}\xi^k\,\bar{g}^l_{m+1},$$

其中 $l=2m+2-k$, 设 $s=[\frac{l}{2}]$, $t=[\frac{k}{2}]$, $A=A^{(m+1)}_{s+1,s}$ 并设 ξ^k 中 $Z^{t+1}\bar{Z}^t$ 的系数为P。则 g^{2m+1} 中 $Z^{m+1}\bar{Z}^m$ 的系数为

$$A_{m+1,m}=A^{(m+1)}_{m+1,m}+sA(p+\bar{p})-tp(A+\bar{A})\text{。}$$

由于 $\mathrm{Re}\ A=\mathrm{Re}\ A^{(m+1)}_{s+1,s}=0$, 故 $\mathrm{Re}\ A_{m+1,m}=\mathrm{Re}\ A^{(m+1)}_{m+1,m}$

注意到当我们对(13)依次做变换 $Z=V+\xi^k(V,\bar{V})$, $k=m+2,\cdots,2m+1$ 时，每一步得到的新方程的形式都与(13)的相同，而且低于 $m+1$ 次项的系数都不变。前面的论证表明 $\mathrm{Re}\ A^{(2m+1)}_{m+1,m}=\mathrm{Re}\ A^{(m+1)}_{m+1,m}$

证毕。

推论2。如果方程(11)的细焦点（原点）的阶数低于 m（≥ 1）的焦点量都为0，那么它的第 m 阶焦点量为

$$V_{2m+1}=2\pi\Big(\mathrm{Re}\ A^{(m)}_{m+1,m}-\mathrm{Im}\sum_{\substack{i+j=m+1\\ i>\frac{m}{2}+1}}A^{(m)}_{i,j}\,A^{(m)}_{j+1,i-1}\Big)$$

例4、(11)的细焦点（原点）的前三个焦点量是

$$V_3=2\pi(\mathrm{Re}\ A^{(1)}_{21}-\mathrm{Im}\ A^{(1)}_{20}A^{(1)}_{11}),$$

$$V_5=2\pi(\mathrm{Re}\ A^{(2)}_{32}-\mathrm{Im}\ A^{(2)}_{30}A^{(2)}_{12}),\ (\text{当 } V_3=0 \text{ 时})$$

$$V_7 = 2\pi\left(\operatorname{Re} A^{(3)}_{43} - \operatorname{Im}\left(A^{(3)}_{40}A^{(3)}_{13} + A^{(3)}_{31}A^{(3)}_{22}\right)\right),\quad (\text{当} V_3 = V_5 = 0 \text{时})$$

例 5、Bautin 计算过二次系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \lambda_1 x - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5) xy + \lambda_6 y^2 \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4) xy - \lambda_2 y^2 \end{cases}$$

的焦点量。用例 4 的公式。我们利用微机和符号计算软件 Reduce 算得

$$V_3 = -\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6),\quad \text{当} \lambda_1 = 0 \text{ 时},$$

$$V_5 = \frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6) \quad \text{当} \lambda_1 = \lambda_5 = 0 \text{时}$$

$$V_7 = \frac{25\pi}{32}\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_6)^3(\lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2),$$
$$\text{当} \lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = 0 \text{时}.$$

我们得到了与文〔10〕相同的结论：Bautin 的公式中 V_7 不仅符号错了，而且差了一个常数倍。

参考文献

〔1〕V. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1982

〔2〕R. Cushman and J. Sanders, Nilpotent normal forms and representation theory