大学数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解（上册）

同济·四、五版

主编 陶伟

- 全解同济·四、五版习题
- 涵盖同济·二、三版习题
- 精选历年考研试题
- 遴选国内外竞赛试题

国家行政学院出版社

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解（上册）

同济·四、五版

主编　陶　伟

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解/陶伟主编. －北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 7-80140-335-5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 陶…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-解题　Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 046616 号

高等数学习题全解（上册）
陶　伟　主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：88517082，68729778
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×960　1/16 开本　57.5 印张　1430 千字
2005 年 3 月第 2 版　2005 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-335-5/O·33　　定价（上、下册）：48.00 元

前　言

高等数学是近代数学的基础，也是当代大学生的重要基础课和硕士研究生入学考试的重要科目。为了帮助广大读者全面系统地学习、掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和技巧，我们组织**清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航天航空大学、北京理工大学、北京交通大学**等院校一批具有丰富教学经验的青年教师编写了这本习题集。

本书是教材《高等数学》（同济·四、五版）的习题全解。

本书旨在帮助读者提高分析问题的能力和掌握解题方法和技巧，加深对教材基本内容的理解和掌握，提高学习效率。

我们希望读者先自行思考，自己亲自动手解题，然后与本书题解进行对照。如果自己不动手去做题，而只是为了完成老师布置的作业照抄本书题解，是有害无益的。

本书编写结构：

本书严格按教材各章节习题顺序编排，与教材的题号一致，部分题目有一题多解。在有些题解中给出了评注，旨在指出读者易犯的错误和应当注意的事项。

本书各章节习题题解按以下三项进行编写：

一、教材《高等数学》（同济五版）的试题及题解。

二、教材《高等数学》（同济二、三、四版）的习题及题解。注：该项为教材第二、三、四版中未被列入第五版的习题及其他高等院校比较典型的高等数学习题。

三、考研试题精选。我们按考研试题所考查的知识点，将其编排

在教材相应的章节，以便读者了解硕士研究生入学考试命题方向和规律。

本书具有以下特点：

1. 题材丰富，题量大，可读性强。本书不仅包含了**同济大学**高等数学（**四、五版**）中所有习题，而且也参考了**北京大学、清华大学、北京航天航空大学、北京交通大学、四川大学、浙江大学、华中科技大学、西安交通大学**等院校的高等数学习题。另外，还选编了历年全国硕士研究生入学考试试题和国内外高等数学竞赛题。

2. 题型多样，方法典型、新颖，解答简捷，论证严谨，富有启发性。对备考硕士研究生的应试者和正在学习《高等数学》的广大在校学生，把握课程重点，扩大视野，启迪思维，提高分析问题和解决问题的能力，都会有指导作用。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

2005 年 3 月

目 录

第一章 函数与极限 …… (1)

§1 映射与函数 …… (1)

一、习题1-1（同济五版） …… (1)

二、习题1-1（同济二、三、四版） …… (8)

三、考研试题精选 …… (17)

§2 数列的极限 …… (19)

一、习题1-2（同济五版） …… (19)

二、习题1-2（同济二、三、四版） …… (20)

三、考研试题精选 …… (21)

§3 函数的极限 …… (23)

一、习题1-3（同济五版） …… (23)

二、习题1-3（同济二、三、四版） …… (25)

三、考研试题精选 …… (25)

§4 无穷小与无穷大 …… (26)

一、习题1-4（同济五版） …… (26)

二、习题1-4（同济二、三、四版） …… (28)

三、考研试题精选 …… (29)

§5 极限运算法则 …… (30)

一、习题1-5（同济五版） …… (30)

二、习题1-5（同济二、三、四版） …… (32)

三、考研试题精选 …… (33)

§6 极限存在准则 两个重要极限 …… (34)

一、习题1-6（同济五版） …… (34)

二、考研试题精选 …… (37)

§7 无穷小的比较 …… (41)

一、习题1-7（同济五版） …… (41)

二、习题1-7（同济二、三、四版） …… (43)

三、考研试题精选 …… (45)

§8　函数的连续性与间断点 …………………………………………………………………… (48)
一、习题 1－8（同济五版） ……………………………………………………………………… (48)
二、习题 1－8（同济二、三、四版） …………………………………………………………… (51)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………………………… (53)
§9　连续函数的运算与初等函数的连续性 …………………………………………………… (55)
一、习题 1－9（同济五版） ……………………………………………………………………… (55)
二、习题 1－9（同济二、三、四版） …………………………………………………………… (57)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………………………… (58)
§10　闭区间上连续函数的性质 ……………………………………………………………… (60)
一、习题 1－10（同济五版） …………………………………………………………………… (60)
二、习题 1－10（同济二、三、四版） ………………………………………………………… (61)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………………………… (64)
§11　总习题一（同济五版） …………………………………………………………………… (64)
考研试题精选 ……………………………………………………………………………………… (68)

第二章　导数与微分 ………………………………………………………………………… (71)
§1　导数概念 ………………………………………………………………………………………… (71)
一、习题 2－1（同济五版） ……………………………………………………………………… (71)
二、习题 2－1（同济二、三、四版） …………………………………………………………… (74)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………………………… (80)
§2　函数的求导法则 ……………………………………………………………………………… (88)
一、习题 2－2（同济五版） ……………………………………………………………………… (88)
二、习题 2－2（同济二、三、四版） …………………………………………………………… (93)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………………………… (96)
§3　高阶导数 ………………………………………………………………………………………… (97)
一、习题 2－3（同济五版） ……………………………………………………………………… (97)
二、习题 2－3（同济二、三、四版） …………………………………………………………… (99)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………………………… (100)
§4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率 ………………………………… (102)
一、习题 2－4（同济五版） ……………………………………………………………………… (102)
二、习题 2－4（同济二、三、四版） …………………………………………………………… (106)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………………………… (107)
§5　函数的微分 ……………………………………………………………………………………… (111)

一、习题2－5（同济五版） …………………………………………………… (111)
二、习题2－5（同济二、三、四版） ………………………………………… (116)
三、考研试题精选 …………………………………………………………… (121)
§6　总习题二（同济五版） ……………………………………………………… (122)

第三章　微分中值定理与导数的应用 ………………………………………… (127)
§1　微分中值定理 …………………………………………………………… (127)
一、习题3－1（同济五版） …………………………………………………… (127)
二、习题3－1（同济二、三、四版） ………………………………………… (130)
三、考研试题精选 …………………………………………………………… (141)
§2　洛必达法则 ……………………………………………………………… (150)
一、习题3－2（同济五版） …………………………………………………… (150)
二、习题3－2（同济二、三、四版） ………………………………………… (152)
三、考研试题精选 …………………………………………………………… (157)
§3　泰勒公式 ………………………………………………………………… (161)
一、习题3－3（同济五版） …………………………………………………… (161)
二、习题3－3（同济二、三、四版） ………………………………………… (164)
三、考研试题精选 …………………………………………………………… (172)
§4　函数的单调性与曲线的凹凸性 ………………………………………… (176)
一、习题3－4（同济五版） …………………………………………………… (176)
二、习题3－4（同济二、三、四版） ………………………………………… (182)
三、考研试题精选 …………………………………………………………… (187)
§5　函数的极值与最大值最小值 …………………………………………… (190)
一、习题3－5（同济五版） …………………………………………………… (190)
二、习题2－5（同济二、三、四版） ………………………………………… (195)
三、考研试题精选 …………………………………………………………… (202)
§6　函数图形的描绘 ………………………………………………………… (211)
一、习题3－6（同济五版） …………………………………………………… (211)
二、习题3－6（同济二、三、四版） ………………………………………… (214)
三、考研试题精选 …………………………………………………………… (214)
§7　曲率 ……………………………………………………………………… (216)
一、习题3－7（同济五版） …………………………………………………… (216)
二、习题3－7（同济二、三、四版） ………………………………………… (219)

§8　方程的近似解 …………………………………………………………………… (219)

一、习题3－8（同济五版） ……………………………………………………… (219)

§9　总习题三（同济五版） ………………………………………………………… (221)

第四章　不定积分 ……………………………………………………………………… (227)

§1　不定积分的概念与性质 ………………………………………………………… (227)

一、习题4－1（同济五版） ……………………………………………………… (227)

二、习题4－1（同济二、三、四版） ………………………………………… (229)

三、考研试题精选 …………………………………………………………………… (234)

§2　换元积分法 ……………………………………………………………………… (236)

一、习题4－2（同济五版） ……………………………………………………… (236)

二、习题4－2（同济二、三、四版） ………………………………………… (241)

三、考研试题精选 …………………………………………………………………… (253)

§3　分部积分法 ……………………………………………………………………… (255)

一、习题4－3（同济五版） ……………………………………………………… (255)

二、习题4－3（同济二、三、四版） ………………………………………… (257)

三、考研试题精选 …………………………………………………………………… (261)

§4　有理函数的积分 ………………………………………………………………… (265)

一、习题4－4（同济五版） ……………………………………………………… (265)

二、习题4－4（同济二、三、四版） ………………………………………… (270)

三、考研试题精选 …………………………………………………………………… (274)

§5　积分表的使用 …………………………………………………………………… (275)

一、习题4－5（同济五版） ……………………………………………………… (275)

§6　总习题四（同济五版） ………………………………………………………… (277)

第五章　定积分 ………………………………………………………………………… (284)

§1　定积分的概念与性质 …………………………………………………………… (284)

一、习题5－1（同济五版） ……………………………………………………… (284)

二、习题5－1（同济二、三、四版） ………………………………………… (288)

三、考研试题精选 …………………………………………………………………… (291)

§2　微积分基本公式 ………………………………………………………………… (295)

一、习题5－2（同济五版） ……………………………………………………… (295)

二、习题5－2（同济二、三、四版） ………………………………………… (299)

三、考研试题精选 …………………………………………………………………………（304）
§3　定积分的换元法和分部积分法 ……………………………………………………（318）
一、习题5－3（同济五版）………………………………………………………………（318）
二、习题5－3（同济二、三、四版）……………………………………………………（324）
三、考研试题精选 …………………………………………………………………………（329）
§4　反常积分 …………………………………………………………………………………（336）
一、习题5－4（同济五版）………………………………………………………………（336）
二、习题5－4（同济二、三、四版）……………………………………………………（338）
三、考研试题精选 …………………………………………………………………………（339）
§5　反常积分的审敛法　Γ函数 ……………………………………………………（342）
一、习题5－5（同济五版）………………………………………………………………（342）
二、习题5－5（同济二、三、四版）……………………………………………………（344）
三、考研试题精选 …………………………………………………………………………（345）
§6　总习题五（同济五版）…………………………………………………………………（346）

第六章　定积分的应用 ………………………………………………………………………（354）
§2　定积分在几何学上的应用 ………………………………………………………………（354）
一、习题6－2（同济五版）………………………………………………………………（354）
二、习题6－2（同济二、三、四版）……………………………………………………（364）
三、考研试题精选 …………………………………………………………………………（370）
§3　定积分在物理学上的应用 ………………………………………………………………（386）
一、习题6－3（同济五版）………………………………………………………………（386）
二、习题6－3（同济二、三、四版）……………………………………………………（391）
三、考研试题精选 …………………………………………………………………………（398）
§4　总习题六（同济五版）…………………………………………………………………（401）

第七章　空间解析几何与向量代数 …………………………………………………………（405）
§1　向量及其线性运算 ………………………………………………………………………（405）
一、习题7－1（同济五版）………………………………………………………………（405）
二、习题7－1（同济二、三、四版）……………………………………………………（408）
§2　数量积　向量积　混合积 ………………………………………………………………（409）
一、习题7－2（同济五版）………………………………………………………………（409）
二、习题7－2（同济二、三、四版）……………………………………………………（412）

三、考研试题精选 ………………………………………………………………… (417)
§3 曲面及其方程 ………………………………………………………………… (417)
一、习题 7-3（同济五版）……………………………………………………… (417)
二、习题 7-3（同济二、三、四版）…………………………………………… (421)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………… (423)
§4 空间曲线及其方程 …………………………………………………………… (424)
一、习题 7-4（同济五版）……………………………………………………… (424)
二、习题 7-4（同济二、三、四版）…………………………………………… (427)
§5 平面及其方程 ………………………………………………………………… (429)
一、习题 7-5（同济五版）……………………………………………………… (429)
二、习题 7-5（同济二、三、四版）…………………………………………… (431)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………… (435)
§6 空间直线及其方程 …………………………………………………………… (436)
一、习题 7-6（同济五版）……………………………………………………… (436)
二、习题 7-6（同济二、三、四版）…………………………………………… (441)
三、考研试题精选 ………………………………………………………………… (447)
§7 总习题七（同济五版）……………………………………………………… (448)

第一章 函数与极限

§1 映射与函数

一、习题1－1(同济五版)

1 设$A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3]$，写出$A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$及$A\backslash(A\backslash B)$的表达式．

【解】 $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$，

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$．

2 设A、B、C是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$．

【证】 先证：$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$．

$\forall x\in(A\cap B)^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^C$或$x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$．

再证：$A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$．

$\forall x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C$或$x\in B^C\Rightarrow x\notin A$或$x\notin B\Rightarrow x\notin(A\cap B)\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$．

3 设映射$f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$，证明：

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$； (2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$．

【证】 (1) $\forall y\in f(A\cup B)=\{y\mid y=f(x),x\in A\cup B\}$

$=\{y\mid y=f(x),x\in A$或$x\in B\}$

$\Leftrightarrow y\in\{y\mid y=f(x),x\in A\}$或$y\in\{y\mid y=f(x),x\in B\}$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$．

(2) $\forall y\in f(A\cap B)=\{y\mid y=f(x),x\in A\cap B\}$

$=\{y\mid y=f(x),x\in A$且$x\in B\}\subset\{y\mid y=f(x),x\in A\}$

$\cap\{y\mid y=f(x),x\in B\}$

$\Rightarrow y\in\{y\mid y=f(x),x\in A\}=f(A)$且$y\in\{y\mid y=f(x),x\in B\}=f(B)$

$\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$．

4 设映射$f:X\to Y$，若存在一个映射$g:Y\to X$，使$g\circ f=I_X$，$f\circ g=I_Y$，其中I_X、I_Y分别是X、Y上的恒等映射，即对每一个$x\in X$，有$I_Xx=x$；对每一个$y\in X$，有$I_Yy=y$．证明：f是双射，且g是f的逆映射：$g=f^{-1}$．

【证】 要证f为双射，只须证f为满射且为单射．

$\forall y\in Y$，则$I_Yy=y$．而$I_Y=f\circ g$，于是$(f\circ g)(y)=y$，即$f[g(y)]=y$，令$x=g(y)$，则$f(x)=f(g(y))=y$，由于$g:Y\to X$，于是$x=g(y)\in X$．故$\forall y\in Y$，$\exists x\in X$，使$f(x)=y$．由定义知：f为满射．

$\forall x_1,x_2\in X$，且$x_1\neq x_2$，则$I_Xx_1\neq I_Xx_2$．

$I_X = g \circ f \Rightarrow g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)] \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

否则,若$f(x_1) = f(x_2)$,则$g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$矛盾. 故由定义知:f为单射.

要证g为f的逆映射,已知:f为单射,$R_f = Y$,由定义,只须证:

$g: Y \to X$,对$\forall y \in Y$,规定$g(y) = x$,则x满足$f(x) = y$.

因为:$y = I_Y y = f \circ g(y) = f[g(y)] = f(x)$,即$f(x) = y$.

5 设映射$f: X \to Y, A \subset X$,证明:

(1)$f^{-1}(f(A)) \supset A$; (2) 当f是单射时,有$f^{-1}(f(A)) = A$.

【证】 (1) 令$B = f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$,则

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}.$$

$\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) = B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$,故$A \subset f^{-1}(f(A))$.

(2) 已知f是单射,则 $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \exists y \in f(A)$,有$f^{-1}(y) = x$,即$f(x) = y$.

设$x' \in A, f(x') = y$,由于f是单射,则$x = x' \in A$.

于是$f^{-1}(f(A)) \subset A$,又由(1) 知:$f'(f(A)) \supset A$,故$f^{-1}(f(A)) = A$.

6 求下列函数的自然定义域:

(1)$y = \sqrt{3x+2}$; (2)$y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

(3)$y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$; (4)$y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5)$y = \sin\sqrt{x}$; (6)$y = \tan(x+1)$;

(7)$y = \arcsin(x-3)$; (8)$y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$;

(9)$y = \ln(x+1)$; (10)$y = e^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) 因$3x+2 \geqslant 0$,即$x \geqslant -\dfrac{2}{3}$,故函数的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

(2) 因$1-x^2 \neq 0$,即$x \neq \pm 1$,故函数的定义域为

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

(3) 因$\begin{cases} 1-x^2 \geqslant 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 即$-1 \leqslant x \leqslant 1$且$x \neq 0$,故函数的定义域为 $[-1,0) \cup (0,1]$.

(4) 由$4-x^2 > 0$,得$-2 < x < 2$,故函数的定义域为$(-2,2)$.

(5) 要使函数有意义,必须$x \geqslant 0$,故定义域为$[0, +\infty)$.

(6) 要使函数有意义,必须$x+1 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$,即$x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1, k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$.

(7) 要使函数有意义,必须$|x-3| \leqslant 1$,即$-1 \leqslant x-3 \leqslant 1$,亦即$2 \leqslant x \leqslant 4$,故定义域为$[2, 4]$.

(8) 由$\begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 故定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, 3)$.

(9) 由$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$,故定义域为$(-1, +\infty)$.

(10) 由$x \neq 0 \Rightarrow$ 定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

7 下列各题中,函数$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, \quad g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, \quad g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x) = 1, \quad g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

【解】 两函数相同,必须定义域相同,对应法则也相同.

(1) 不同. 因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域是$(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

(2) 不同 . 因为对应法则不同,$f(x) = x$,而 $g(x) = -x$(当 $x < 0$ 时).

(3) 相同 . 因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同 . 因为$g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x = \dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$,分母不所为零,即$x \neq k\pi + \dfrac{1}{2}\pi$,故$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同 .

8 设$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ 求$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\varphi(-2)$,并作函数$y = \varphi(x)$ 的图形.

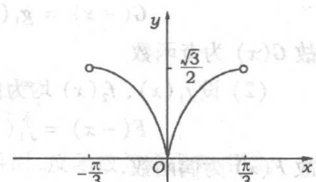
【解】 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right| = \dfrac{1}{2}$,

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(-2) = 0$.

$y = \varphi(x)$ 图像如右.



第 8 题图

9 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1)$y = \dfrac{x}{1-x}$,$(-\infty,1)$;   (2)$y = x + \ln x$, $(0,+\infty)$.

【证】 (1) 设$x_1 < x_2$,且$x_1,x_2 \in (-\infty,1)$,由于

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_1x_2 - x_2 + x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0,$$

即$f(x_1) < f(x_2)$,故$y = \dfrac{x}{1-x}$在$(-\infty,1)$ 单调增加 .

(2) 设$x_1 < x_2$,且$x_1,x_2 \in (0,+\infty)$,则有

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \ln x_1) - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2).$$

由于$y = \ln x$ 为单调增加函数,所以$(\ln x_1 - \ln x_2) < 0$.

又 $(x_1 - x_2) < 0$,所以$(x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2) < 0$.

故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,即$f(x_1) < f(x_2)$.

10 设$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明:$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

【证】 因$f(x)$在$(-l,l)$上为奇函数,所以对任意$x \in (-l,l)$,有

$$f(-x) = -f(x).$$

对任意$x_1,x_2 \in (-l,0)$,当$x_1 < x_2$时,即$-x_1 > -x_2$,且$-x_1,-x_2 \in (0,l)$,由于$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,所以$f(-x_1) > f(-x_2)$,即$-f(x_1) > -f(x_2)$,亦即$f(x_1) < f(x_2)$. 故$f(x)$在$(-l,0)$内单调增加.

11 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

【证】 (1) 设$f_1(x)$, $f_2(x)$均为偶函数,令$F(x) = f_1(x) + f_2(x)$,因

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x),$$

故$F(x)$为偶函数.

设$g_1(x)$,$g_2(x)$均为奇函数,令$G(x) = g_1(x) + g_2(x)$,因

$$G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x),$$

故$G(x)$为奇函数.

(2) 设$f_1(x)$, $f_2(x)$均为偶函数,令$F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$,因

$$F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x),$$

故$F(x)$为偶函数.

设$g_1(x)$,$g_2(x)$均为奇函数,令$G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$,因

$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)] \cdot [-g_2(x)] \\ &= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x), \end{aligned}$$

故$G(x)$为偶函数.

设$f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,令$H(x) = f(x) \cdot g(x)$,因

$$H(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -f(x)g(x) = -H(x),$$

故$H(x)$为奇函数.

12 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1)$y = x^2(1 - x^2)$; (2)$y = 3x^2 - x^3$;

(3)$y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$; (4)$y = x(x-1)(x+1)$;

(5)$y = \sin x - \cos x + 1$; (6)$y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

【解】 由奇、偶函数的定义来判断.

(1)$f(-x) = (-x)^2[1 - (-x^2)] = x^2(1 - x^2) = f(x)$, 故$f(x)$为偶函数;

(2)$f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3 \neq f(x)$且$\neq -f(x)$, 故$f(x)$既非奇函数又非偶

函数；

(3)$f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，故$f(x)$为偶函数；

(4)$f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，故$f(x)$为奇函数；

(5)$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$且$\neq -f(x)$，故$f(x)$即非奇函数又非偶函数；

(6)$f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，故$f(x)$为偶函数．

13 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数，指出其周期．

(1)$y=\cos(x-2)$；　(2)$y=\cos 4x$；　(3)$y=1+\sin\pi x$；

(4)$y=x\cos x$；　(5)$y=\sin^2 x$．

【解】 (1)$y=\cos(x-2)$是周期函数,周期$l=2\pi$；

(2)$y=\cos 4x$是周期函数,周期$l=\dfrac{\pi}{2}$；

(3)$y=1+\sin\pi x$是周期函数,周期$l=2$；

(4)$y=x\cos x$不是周期函数；

(5)$y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$是周期函数,周期$l=\pi$．

14 求下列函数的反函数：

(1)$y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3)$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$,并问当a,b,c,d满足什么条件时,反函数与原函数相同；

(4)$y=2\sin 3x$；　(5)$y=1+\ln(x+2)$；　(6)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 (1) 由$y=\sqrt[3]{x+1}$解出$x=y^3-1$,故所求反函数为$y=x^3-1$.

(2) 由$y=\dfrac{1-x}{1+x}$解出$x=\dfrac{1-y}{1+y}$,故所求反函数为$y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$解出$x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$,故所求反函数为$y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$ $\left(x\neq\dfrac{a}{c}\right)$.

再令 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{b-dx}{cx-a}$，　得 $(ac+cd)x^2+(d^2-a^2)x-(ab+bd)=0$,

则有 $\begin{cases}ac+cd=0,\\ d^2-a^2=0,\\ ab+bd=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c(a+d)=0,\\ (a+d)(a-d)=0,\\ b(a+d)=0.\end{cases}$

1) 当$a+d=0$时,上述3个方程都满足；

2) 当$a+d\neq 0$时,则可得$b=c=0,a=d\neq 0$. 因此,反函数与原函数是同一函数的条件是$a+d=0$或$b=c=0,a=d\neq 0$.

(4)$y=2\sin 3x$改写为$x=2\sin 3y$,得反函数$y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$；

(5)$y = 1 + \ln(x+2)$ 改写为 $x = 1 + \ln(y+2)$，得反函数 $y = \dfrac{e^x}{e} - 2$；

(6)$y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$ 改写为 $x = \dfrac{2^y}{2^y+1}$，得反函数 $y = \log_2 \dfrac{x}{1-x}$.

15 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性．已知 $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$，对任意 $x \in X$，取 $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$，则 $|f(x)| \leqslant M$，对任意 $x \in X$，有界.

必要性．已知 $f(x)$ 有界，即对任意 $x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$，故既有上界 $M_1 = -M$，也有下界 $M_2 = M$，得证．

16 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1)$y = \mu^2$，　$\mu = \sin x$，　$x_1 = \dfrac{\pi}{6}$，　$x_2 = \dfrac{\pi}{3}$；

(2)$y = \sin \mu$，　$\mu = 2x$，　$x_1 = \dfrac{\pi}{8}$，　$x_2 = \dfrac{\pi}{4}$；

(3)$y = \sqrt{\mu}$，　$\mu = 1 + x^2$，　$x_1 = 1$，　$x_2 = 2$；

(4)$y = e^{\mu}$，　$\mu = x^2$，　$x_1 = 0$，　$x_2 = 1$；

(5)$y = \mu^2$，　$\mu = e^x$，　$x_1 = 1$，　$x_2 = -1$.

【解】 (1) 复合函数为 $y = \sin^2 x$. 当 $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ 时，$y = \dfrac{1}{4}$；　当 $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$ 时，$y = \dfrac{3}{4}$.

(2) 复合函数为 $y = \sin 2x$. 当 $x_1 = \dfrac{\pi}{8}$ 时，$y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　当 $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$ 时，$y = 1$.

(3) 复合函数为 $y = \sqrt{1+x^2}$. 当 $x_1 = 1$ 时，$y = \sqrt{2}$；　当 $x_2 = 2$ 时，$y = \sqrt{5}$.

(4) 复合函数为 $y = e^{x^2}$. 当 $x_1 = 0$ 时，$y = 1$；　当 $x_2 = 1$ 时，$y = e$.

(5) 复合函数为 $y = e^{2x}$. 当 $x_1 = 1$ 时，$y = e^2$；　当 $x_2 = -1$ 时，$y = e^{-2}$.

17 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1)$f(x^2)$；　(2)$f(\sin x)$；

(3)$f(x+a)\ (a>0)$；　(4)$f(x+a) + f(x-a)\ (a>0)$.

【解】 (1) 由 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$，得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，故 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(2) 由 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，得 $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (k 为整数).

(3) 由 $0 \leqslant x + a \leqslant 1$，得 $-a \leqslant x \leqslant 1 - a$，　故 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-a, 1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant 1 - a, \\ a \leqslant x \leqslant 1 + a, \end{cases}$ 注意到 $a > 0$，只可能有两种情形：

当 $1 - a < a$ 时，即 $a > \dfrac{1}{2}$ 时，上面不等式组无解；

当 $1 - a \geqslant a$ 时，即 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时，上面不等式组的解为 $a \leqslant x \leqslant 1 - a$.