

— 数学考研辅导精编

赵振海 编著

高等数学 78问



大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

— 数学考研辅导精编

赵振海 编著

高等数学 78 问



大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 78 问 / 赵振海编著. — 大连 : 大连理工大学出版社, 2012. 10

ISBN 978-7-5611-7374-9

I. ①高… II. ①赵… III. ①高等数学—高等学校—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 234274 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 147mm×210mm	印张: 5.75	字数: 144 千字
2012 年 10 月第 1 版	2012 年 10 月第 1 次印刷	

责任编辑: 王 伟

责任校对: 李 慧

封面设计: 季 强

ISBN 978-7-5611-7374-9

定价: 13.80 元

前 言

本书是依据全国高等学校工科数学课程教学指导委员会所制订的《高等数学》教学基本要求和教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试大纲》(简称《数学考试大纲》),结合作者从事工科数学教学四十多年,考研大班辅导十多年(1993~2007),考研个人辅导 11 人十次(1982~2006)的教学经验和考研辅导经验编写而成的,本书具有如下特点:

1. 教会读书,教会学习

人的一生中,无师指导是长期的。因此,培养自己会读书、会学习是非常重要的。本书给出的 78 个问题都是作者多年来读书的心得和体会。

2. 教会归纳,教会总结

高等数学教材中的例题、书后习题、各类试题(包括考研试题)中常出现以下三种提法:

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导;

设 $f(x)$ 在 x_0 处的导数存在;

设 $f'(x_0) = A$ (A 为常数)等。

由导数定义及上述三种提法总结归纳出:

“问题 12:导数定义的增量比的极限有什么特点?”

“问题 13:导数在一点 x_0 处有定义的三种等价说法是什么?相当于给出什么条件”,

“问题 18:求一点处的导数必须用导数定义(三步法则)来求的四种情况是什么?”

“问题 70:求幂级数的和函数的三种方法是什么?”……

3. 突出传授解题技巧

做数学题的基本方法是:类型确定,解(证)法固定。如:

“问题 22:什么类型题必须应用罗尔中值定理证明?证题时的四个步骤和三种方法是什么?”

“问题 41:何谓积分变上限函数求导方法?积分变上限函数的四种题型是什么?”……

4. 注重提高解题能力

由于篇幅所限,有些问题只给出思路和解法,没有给出具体解题过程。读者可以根据书中给出的思路和解法,独立自主地解题,从而提高读者独立思考和解题能力。

本书依据《教学基本要求》和《数学考试大纲》编写,既是大学本科学生的学习指南,也可作为考研学生的辅导书。书中涉及的 78 个问题都是高等数学的重点和难点,可以加深青年教师对高等数学重点和难点的理解,因此本书也是青年教师的良师益友。

感谢“大连理工大学离退休人员科研基金会”对本书的资助。

本书缺点和错误在所难免,恳请同行与读者批评指正。

作者

2012.10

于大连市甘区金工街 1 号宅

目 录

一 函数、极限、连续

问题 1

关于函数的概念,何谓一个定义、五个理解与三个考点? /1

问题 2

何谓分段函数? 分段函数是客观存在的吗? 五个考点是什么? 用分段函数考什么概念? /4

问题 3

如何求反函数? 反函数有哪些性质? 反函数的两个考点是什么? /7

问题 4

如何正确理解数列极限的概念? 如何根据“ ϵN ”定义验证极限? /9

问题 5

函数极限“ $\epsilon\delta$ ”定义中“设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义(点 x_0 可除外)”的含义是什么? /10

问题 6

求极限的首要问题是什么? 极限存在的两个准则是什么? /11

问题 7

何谓“ 1^∞ ”型未定式快速求极限方法? /13

问题 8

学习无穷小比较应注意什么? /14

问题 9

讨论函数极限时,何时要考虑左、右极限? /19

问题 10

等价无穷小在判别间断点类型中有何应用? /20

问题 11

何谓两个有界性? 有什么用处? /21

二 导数与微分

问题 12

导数定义的增量比的极限有什么特点?(即什么类型的极限是导数定义?)/23

问题 13

导数在一点 x_0 处有定义的三种等价说法是什么? 相当于给出什么条件? /25

问题 14

如何应用导数概念求有关极限问题? 解这类问题的关键是什么? /27

问题 15

已知有关极限值, 求可导函数在一点处导数的问题, 其关键是什么? /28

问题 16

两曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在一点处相切, 相当于给出什么条件? /29

问题 17

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续不可导, 则 $F(x)=f(x)g(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是什么? /30

问题 18

一点处的导数必须用导数定义(三步法则)来求的四种情况是什么? /32

问题 19

何谓反函数求导法则? 如何利用反函数求导法则求反函数的二阶以上的导数? /34

问题 20

为什么分段函数在衔接点 x_0 处的导数必须用导数定义(三步法则)求? 能否用学过的高等数学知识解释? 何谓分段函数求导方法? /36

问题 21

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的含义是什么? /38

三 微分中值定理

问题 22

什么类型的题必须应用罗尔中值定理证明? 证题的四个步骤和三种方法是什么? /40

问题 23

什么类型的题应用拉格朗日中值定理证明? 证题的两种方法是什么? /44

问题 24

什么类型的题应用柯西中值定理证明? /47

问题 25

什么类型的题应用泰勒公式证明? 证题的三种题型是什么? /48

四 微分中值定理与导数的应用

问题 26

何谓“微分中值定理的综合应用”? /54

问题 27

应用洛必达法则求极限时应注意什么? /56

问题 28

极限式中常数如何确定? /60

问题 29

由微分中值定理导出的判断函数性态的定理有哪些? /63

问题 30

解最大(小)值应用问题的一般步骤是什么? /68

问题 31

如何应用导数定义研究函数的零点或方程的根? /70

五 一元函数积分学

问题 32

何谓不定积分? $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数的必要条件是什么? /72

问题 33

如何记忆不定积分的基本公式? /73

问题 34

何谓第一换元积分法? 其解题思路是什么? /74

问题 35

何谓第二换元积分法? 何谓解题思路是什么? /75

问题 36

何谓分部积分法? 哪些类型的积分可用分部积分法? 在分部积分法中, u 和 dv 应该如何选取? /76

问题 37

何谓分部积分法中的“抵消法”破译? /79

问题 38

何谓不定积分的待定系数法? /81

问题 39

定积分是和式极限,有何应用? /83

问题 40

为什么说定积分是个数,在算题中有何应用? /85

问题 41

何谓积分变上限函数求导方法? 积分变上限函数的四种题型是什么? /85

问题 42

如何计算积分区间关于原点对称的定积分? /91

问题 43

周期函数在定积分计算中的两个性质是什么? /92

问题 44

如何计算分段函数的积分? /94

问题 45

如何求分段函数的变限积分? /96

问题 46

如何计算被积函数中含有“积分变上限函数”的定积分? /97

问题 47

积分变上限函数在应用微分中值定理证明中有何应用? /98

问题 48

学习广义积分时应注意什么? /100

六 多元函数微分学

问题 49

多元函数在概念和方法上会出现哪些新问题? 它与一元函数有什么区别? /103

问题 50

多元复合函数的三种类型是什么? 如何求多元复合函数的偏导数? /105

问题 51

多元隐函数是怎样构成的? 如何求多元隐函数的偏导数? /108

问题 52

方向导数与梯度有什么区别? 方向导数与梯度有什么关系? 梯度与等值线(或等量面)有什么关系? /110

问题 53

如何求二元函数的极值? /112

问题 54

如何求多元函数的最大值和最小值? /114

七 重积分

问题 55

为什么说二重积分是个数？在算题中有什么应用？ /116

问题 56

如何计算二重积分？其关键是什么？ /117

问题 57

为什么交换二重积分的二次积分的次序？如何交换？ /118

问题 58

如何计算被积函数为二元分段函数的二重积分？ /119

问题 59

何谓空间直角坐标系与球面坐标系或柱面坐标系间换算公式的匹配关系？它有什么应用？ /121

八 曲线积分、曲面积分

问题 60

平面对坐标的非闭曲线积分有多少种算法？平面对坐标的闭曲线积分有多少种算法？ /124

问题 61

从《高等数学》(六版, 同济大学编写)P205 例 4 中能得出哪些结论和解题经验？ /126

问题 62

空间对坐标的非闭曲线积分有多少种算法？空间对坐标的闭曲线积分有多少种算法？ /131

问题 63

空间对坐标的非闭曲面积分有多少种算法？空间对坐标的闭曲面积分有多少种算法？ /134

问题 64

积分是如何分类的？ /138

问题 65

从《高等数学》(六版, 同济大学编写)P136 例 5 和例 6 中能得出哪些结论？有什么应用？ /141

九 无穷级数

问题 66

如何求无穷小的阶？无穷小的阶在判别级数敛散性时有何应用？ /144

问题 67

判断一个数项级数敛散性时，解题的程序是什么？ /147

问题 68

阿贝尔定理有什么应用？ /148

问题 69

将函数 $f(x)$ 展开成幂级数的两种方法是什么？ /150

问题 70

求幂级数的和函数的三种方法是什么？ /151

问题 71

求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和的四种方法是什么？ /155

十 微分方程

问题 72

如何理解一阶齐次微分方程的“齐次”？ /159

问题 73

如何理解一阶线性微分方程的“线性”？ /160

问题 74

齐次线性微分方程的解有哪些性质？其通解是怎样构成的？ /162

问题 75

非齐次线性微分方程的解有哪些性质？其通解是怎样构成的？ /163

问题 76

如何由特征根或解函数建立微分方程？ /164

问题 77

多元函数微积分学在建立微分方程中有何应用？ /165

问题 78

常微分方程有何应用？ /168

参考文献 /172

一 函数、极限、连续

 **问题 1** 关于函数的概念,何谓一个定义、五个理解与三个考点?

1. 定义:设 x 和 y 是两个变量, D 是给定的一个数集,如果对于任意 $x \in D$, 变量 y 按照某种对应规律总有唯一的数值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为 $y = f(x)$.

2. 五个理解:从上述函数定义不难得出下面五个理解:

(1) 函数的本质是对应关系(或映射关系);

(2) 函数概念的两个要素:① 定义域:使函数 y 有对应值的自变量 x 的取值范围;② 对应关系:给定 x 值,求出 y 值的某种对应规律.

称 ①、② 为构成函数概念的两个要素,同时也是判断两个函数是否为同一个函数的准则.

一个函数只与构成函数的两个要素有关,而与自变量、因变量用什么字母表示无关,即 $f(x) = f(t) = f(u) = f(v) = \dots$,简称为函数表示法的“无关性”.函数表示法的“无关性”是由 $f[g(x)]$ 的表达式去求 $f(x)$ 的表达式的有效方法.

(3) 函数定义中的三个内容:

① 定义域及其求法;② 函数符号及其用法;③ 函数值及其求法.

(4) 函数是单值的.

(5) 函数在一点 x_0 处有定义是指函数在 x_0 处有对应值.

3. 三个考点:

(1) 函数的本质是对应关系.在考研试题中常出现的两种题型:

① 由 $f[g(x)]$ 表达式求出 $f(x)$ 的表达式;② 构造复合函数.

(2) 函数概念的两个要素及函数表示法的“无关性”.

(3) 函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处有定义是指函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有对应值.

【例 1】 狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 求 $D(100), D(2\pi)$.

分析 函数的本质是对应关系; 函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处有定义是指函数在 x_0 处有对应值.

解 当 $x = 100$ 时, 没有数学式计算, 在 1837 年狄利克雷给出定义以前就说函数 $D(x)$ 在 $x = 100$ 处没有定义. 但函数的本质是对应关系, 没有定义不完全取决于计算不出数值来, 还要看函数在此处有没有对应值. 因为 $x = 100$ 是有理数, 它的对应值为 1, 所以 $D(100) = 1$, 即函数 $D(x)$ 在 $x = 100$ 处有定义. 同理 $D(x)$ 在 $x = 2\pi$ 处有对应值, 且 $D(2\pi) = 0$.

【例 2】 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = (\quad)$.

- A. πab B. $\frac{ab}{2}\pi$ C. $(a+b)\pi$ D. $\frac{a+b}{2}\pi$

考察考点 函数表示法的“无关性”.

解 由函数表示法的“无关性”知

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ 2I &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma + \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ &= \iint_D (a+b) d\sigma = (a+b) \iint_D d\sigma = \pi(a+b), I = \frac{a+b}{2}\pi \end{aligned}$$

选 D.

【例 3】 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x+x^3}{1+x^4}$, 则 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 从 $f[g(x)]$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式. 由于 $f\left(x + \frac{1}{x}\right)$ 表示关于“ $x + \frac{1}{x}$ ”的对应值, 理应它的右端为“ $x + \frac{1}{x}$ ”的表达式, 由于化简而变成现在的表达式右端的情形.

这是属于从 $f[g(x)]$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式题型, 若要

求出 $f(x)$ 的表达式, 必须将 $f[g(x)]$ 的表达式还原为 $g(x)$ 的表达式. 因此有两种作法: ① 凑出法; ② 设出法.

$$\text{解法 1(凑出法)} \quad f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \frac{x + \frac{1}{x}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}, \text{由函}$$

数表示法的“无关性”知, $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$.

$$\text{原式} = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 - 2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2) \Big|_2^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 3$$

$$\text{解法 2(设出法)} \quad \text{设 } u = x + \frac{1}{x}, u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, x^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$u^2 - 2 \Rightarrow f(u) = \frac{u}{u^2 - 2} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}, \text{余下同解法 1.}$$

$$\text{【例 4】} \quad \text{设 } f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}, \text{求 } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx.$$

分析 属于从 $f(\sin^2 x)$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式题型, 由 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 暗示 $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$.

解法 1(设出法) 设 $\sin^2 x = u$, 则 $\sin x = \sqrt{u}$, $x = \arcsin \sqrt{u}$, 从而 $f(u) = \frac{\arcsin \sqrt{u}}{\sqrt{u}}$, 所以 $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx &= \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x} \quad (\text{分部积分}) \\ &= -2 \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$\text{解法 2(凑出法)} \quad f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{\arcsin \sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{\arcsin \sqrt{\sin^2 x}}{\sqrt{\sin^2 x}}$$

所以 $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, 余下同解法 1.

小结 从 $f[g(x)]$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式的基础是

函数的本质是对应关系. 因为 $f[g(x)]$ 表示“ $g(x)$ ”的对应值, 理应 $f[g(x)]$ 的右端是“ $g(x)$ ”的表达式, 由于化简变为现在的形式, 因此为了求出 $f(x)$ 的表达式, 必须将 $f[g(x)]$ 的右端恢复为“ $g(x)$ ”的表达式, 再利用函数表示法的“无关性”便得所求. 而恢复的方法有两个: ① 凑出法; ② 设出法. 例 3、例 4 是考研试题中出现的题型, 在不同年度已经重复出现多次了.

【例 5】 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

A. 0 B. 1 C. $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

分析 属于构造复合函数题型, 由 $f(x)$ 的表达式求 $f[g(x)]$ 的表达式, 解此类题型的关键是求中间变量的值域. 设 $y = f(u)$, $u = f[f(x)]$, $u = f(v)$, $v = f(x)$, 因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, v 的值域为 0, 1 两个数, 所以 $|v| \leq 1$, 从而 $u \equiv 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 所以 $y = f(u)|_{u=1} = 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

故应选择 B.

小结 构造复合函数的实质也是函数符号的应用, 其理论基础仍然是函数的本质是对应关系. 因为 $f(x)$ 是 x 的对应值, 所以为了求出 $f[g(x)]$, 需将 $f(x)$ 中的 x 换为 $g(x)$, 便得出 $f[g(x)]$ 关于“ $g(x)$ ”的表达式, 化简, 余下的问题是求关系式成立的条件, 其关键是求中间变量的值域, 从而问题便得到解决.

 **问题 2** 何谓分段函数? 分段函数是客观存在的吗? 五个考点是什么? 用分段函数考什么概念?

1. 定义: 如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数.

2. 分段函数客观存在吗? 它是否是人为的?

分段函数不完全是人为的. 事物发展有渐变和突变的过程, 突变前后事物常常依不同的规律变化着, 这就产生了以突变点为衔接点的分段函数. 如

$$P = \begin{cases} \frac{k}{V}, & V \geq V_0 \\ \frac{V}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}, & \beta < V < V_0 \end{cases}$$

这说明了分段函数是客观存在的.

3. 分段函数在考研试题中出现的种类

(1) 显式(直接给出的分段函数)

【例 1】 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 是分段函数显式,

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 称点 $x = 0$ 为分段函数的衔接点.

一般地, 关于点 x_0 的左、右表达形式不同, 称此点 x_0 为分段函数的第一类衔接点. 例 1 中 $x = 0$ 为第一类衔接点.

【例 2】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 此函数也是分段函数显

式. 称点 $x = 0$ 为分段函数 $f(x)$ 的第二类衔接点.

(2) 隐式(间接给出的分段函数)

① 以极限形式给出的分段函数

【例 3】 (1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2 + 1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x =$ _____;

(2) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ().

A. 处处可导

B. 恰有一个不可导点

C. 恰有两个不可导点

D. 至少有三个不可导点

解 (1) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-1/n)x}{x^2 + 1/n} = \frac{1}{x}$; 当 $x = 0$ 时,

$$f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 间断点为 } x = 0.$$

(2) 当 $|x| = 1$ 时, $f(x) = 1$; 当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = 1$; 当 $|x| > 1$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^3 \sqrt[n]{1/|x|^{3n} + 1} = |x|^3 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^3, & x < -1 \\ 1, & |x| \leq 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases},$$

因为 $x = -1, 1$ 为分段函数 $f(x)$ 的第一类衔接点, 且左、右导数存在不相等, 所以 $x = -1, 1$ 是 $f(x)$ 的两个不可导点. 故选 C.

② 带有绝对值符号给出的分段函数

【例 4】 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为().

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 $f(x)$ 是带绝对值符号给出的分段函数, 即隐式. 应用时化为显式.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x^3, & x < 0 \end{cases}$$

故选 C.

③ 用 max, min 符号给出的分段函数.

【例 5】 (1) 求 $f(x) = \max\{1, x^2, x^3\}$ 的分段表达式; (2) 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$; (3) 计算 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$; (4) 计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

解 (其中(2)、(3)、(4)不在此解).

(1) 画出 $y = 1, y = x^2, y = x^3$ 的图形 (图 1.1). 由图 1.1 知

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 1, & |x| \leq 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$$

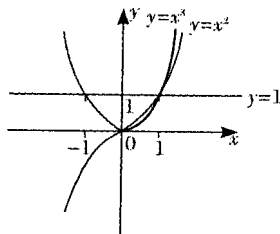


图 1.1

④ 用取整 $[]$ 符号给出的分段函数.

【例 6】 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数.