高等数学78问

——数学考研辅导精编

赵振海 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学78问

——数学考研辅导精编

赵振海 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学78问/赵振海编著. —大连：大连理工大学出版社，2012.10
ISBN 978-7-5611-7374-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①高等数学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第234274号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路80号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:5.75 字数:144千字
2012年10月第1版 2012年10月第1次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:李 慧
封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-7374-9 定价:13.80元

前　言

本书是依据全国高等学校工科数学课程教学指导委员会所制订的《高等教学》教学基本要求和教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试大纲》(简称《数学考试大纲》),结合作者从事工科数学教学四十多年,考研大班辅导十多年(1993～2007),考研个人辅导 11 人十次(1982～2006)的教学经验和考研辅导经验编写而成的,本书具有如下特点:

1. 教会读书,教会学习

人的一生中,无师指导是长期的。因此,培养自己会读书、会学习是非常重要的。本书给出的 78 个问题都是作者多年来读书的心得和体会。

2. 教会归纳,教会总结

高等数学教材中的例题、书后习题、各类试题(包括考研试题)中常出现以下三种提法:

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导;

设 $f(x)$ 在 x_0 处的导数存在;

设 $f'(x_0) = A$(A 为常数) 等。

由导数定义及上述三种提法总结归纳出:

"问题 12:导数定义的增量比的极限有什么特点?"

"问题 13:导数在一点 x_0 处有定义的三种等价说法是什么?相当于给出什么条件",

"问题 18:求一点处的导数必须用导数定义(三步法则) 来求的四种情况是什么?"

"问题 70:求幂级数的和函数的三种方法是什么?"……

3. 突出传授解题技巧

做数学题的基本方法是:类型确定,解(证)法固定。如:

"问题22:什么类型题必须应用罗尔中值定理证明?证题时的四个步骤和三种方法是什么?"

"问题41:何谓积分变上限函数求导方法?积分变上限函数的四种题型是什么?"……

4. 注重提高解题能力

由于篇幅所限,有些问题只给出思路和解法,没有给出具体解题过程。读者可以根据书中给出的思路和解法,独立自主地解题,从而提高读者独立思考和解题能力。

本书依据《教学基本要求》和《数学考试大纲》编写,既是大学本科学生的学习指南,也可作为考研学生的辅导书。书中涉及的78个问题都是高等数学的重点和难点,可以加深青年教师对高等数学重点和难点的理解,因此本书也是青年教师的良师益友。

感谢"大连理工大学离退休人员科研基金会"对本书的资助。

本书缺点和错误在所难免,恳请同行与读者批评指正。

作者

2012.10

于大连市甘区金工街1号宅

目　录

一　函数、极限、连续

二　导数与微分

四 微分中值定理与导数的应用

五 一元函数积分学

六　多元函数微分学

七 重积分

八 曲线积分、曲面积分

九 无穷级数

十 微分方程

一 函数、极限、连续

问题1 关于函数的概念，何谓一个定义、五个理解与三个考点？

1. 定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的一个数集，如果对于任意 $x \in D$，变量 y 按照某种对应规律总有唯一的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$.

2. 五个理解：从上述函数定义不难得出下面五个理解：

(1) 函数的本质是对应关系（或映射关系）；

(2) 函数概念的两个要素：① 定义域：使函数 y 有对应值的自变量 x 的取值范围；② 对应关系：给定 x 值，求出 y 值的某种对应规律.

称 ①、② 为构成函数概念的两个要素，同时也是判断两个函数是否为同一个函数的准则.

一个函数只与构成函数的两个要素有关，而与自变量、因变量用什么字母表示无关，即 $f(x) = f(t) = f(u) = f(v) = \cdots$，简称为函数表示法的“无关性”. 函数表示法的“无关性”是由 $f[g(x)]$ 的表达式去求 $f(x)$ 的表达式的有效方法.

(3) 函数定义中的三个内容：

① 定义域及其求法；② 函数符号及其用法；③ 函数值及其求法.

(4) 函数是单值的.

(5) 函数在一点 x_0 处有定义是指函数在 x_0 处有对应值.

3. 三个考点：

(1) 函数的本质是对应关系. 在考研试题中常出现的两种题型：① 由 $f[g(x)]$ 表达式求出 $f(x)$ 的表达式；② 构造复合函数.

(2) 函数概念的两个要素及函数表示法的“无关性”.

(3) 函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处有定义是指函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有对应值.

【例1】 狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1,\ x\text{ 为有理数}\\0,\ x\text{ 为无理数}\end{cases}$,求 $D(100)$,$D(2\pi)$.

分析 函数的本质是对应关系;函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处有定义是指函数在 x_0 处有对应值.

解 当 $x=100$ 时,没有数学式计算,在1837年狄利克雷给出定义以前就说函数 $D(x)$ 在 $x=100$ 处没有定义.但函数的本质是对应关系,没有定义不完全取决于计算不出数值来,还要看函数在此处有没有对应值.因为 $x=100$ 是有理数,它的对应值为1,所以 $D(100)=1$,即函数 $D(x)$ 在 $x=100$ 处有定义.同理 $D(x)$ 在 $x=2\pi$ 处有对应值,且 $D(2\pi)=0$.

【例2】 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数,a,b 为常数,则 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=(\quad)$.

A. πab B. $\frac{ab}{2}\pi$ C. $(a+b)\pi$ D. $\frac{a+b}{2}\pi$

考察考点 函数表示法的“无关性”.

解 由函数表示法的“无关性”知

$$I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\begin{aligned}2I&=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_D (a+b)\mathrm{d}\sigma=(a+b)\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\pi(a+b),I=\frac{a+b}{2}\pi\end{aligned}$$

选D.

【例3】 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=$ ______.

分析 从 $f[g(x)]$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式.由于 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 表示关于“$x+\frac{1}{x}$”的对应值,理应它的右端为“$x+\frac{1}{x}$”的表达式,由于化简而变成现在的表达式右端的情形.

这是属于从 $f[g(x)]$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式的题型,若要

求出 $f(x)$ 的表达式，必须将 $f[g(x)]$ 的表达式还原为 $g(x)$ 的表达式. 因此有两种作法：① 凑出法；② 设出法.

解法 1(凑出法) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}+x}{\dfrac{1}{x^2}+x^2}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$，由函数表示法的“无关性”知，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$.

$$原式=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2-2)\Big|_2^{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$$

解法 2(设出法) 设 $u=x+\dfrac{1}{x}$，$u^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=u^2-2\Rightarrow f(u)=\dfrac{u}{u^2-2}\Rightarrow f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$，余下同解法 1.

【例 4】 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

分析 属于从 $f(\sin^2 x)$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式的题型，由 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，暗示 $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$.

解法 1(设出法) 设 $\sin^2 x=u$，则 $\sin x=\sqrt{u}$，$x=\arcsin\sqrt{u}$，从而 $f(u)=\dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，所以 $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x&=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x\\&=-2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x}\quad（分部积分）\\&=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c\end{aligned}$$

解法 2(凑出法) $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{\arcsin\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}=\dfrac{\arcsin\sqrt{\sin^2 x}}{\sqrt{\sin^2 x}}$

所以 $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，余下同解法 1.

小结 从 $f[g(x)]$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式的理论基础是

函数的本质是对应关系. 因为 $f[g(x)]$ 表示"$g(x)$"的对应值,理应 $f[g(x)]$ 的右端是"$g(x)$"的表达式,由于化简变为现在的形式,因此为了求出 $f(x)$ 的表达式,必须将 $f[g(x)]$ 的右端恢复为"$g(x)$"的表达式,再利用函数表示法的"无关性"便得所求. 而恢复的方法有两个:① 凑出法;② 设出法. 例3、例4是考研试题中出现的题型,在不同年度已经重复出现多次了.

【例5】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f\{f[f(x)]\}=$ ______.

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

分析　属于构造复合函数题型,由 $f(x)$ 的表达式求 $f[g(x)]$ 的表达式,解此类题型的关键是求中间变量的值域. 设 $y=f(u)$, $u=f[f(x)]$, $u=f(v)$, $v=f(x)$,因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,v 的值域为 0,1 两个数,所以 $|v|\leqslant 1$,从而 $u\equiv 1$, $x\in(-\infty,+\infty)$,所以 $y=f(u)\big|_{u=1}=1$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

故应选择 B.

小结　构造复合函数的实质也是函数符号的应用,其理论基础仍然是函数的本质是对应关系. 因为 $f(x)$ 是 x 的对应值,所以为了求出 $f[g(x)]$,需将 $f(x)$ 中的 x 换为 $g(x)$,便得出 $f[g(x)]$ 关于"$g(x)$"的表达式,化简,余下的问题是求关系式成立的条件,其关键是求中间变量的值域,从而问题便得到解决.

问题2　何谓分段函数?分段函数是客观存在的吗?五个考点是什么?用分段函数考什么概念?

1. 定义:如果一个函数在其定义域内,对应于不同的区间段有着不同的表达形式,则该函数称为分段函数.

2. 分段函数客观存在吗?它是否是人为的?

分段函数不完全是人为的. 事物发展有渐变和突变的过程,突变前后事物常常依不同的规律变化着,这就产生了以突变点为衔接点的分段函数. 如

$$P=\begin{cases}\dfrac{k}{V}, V\geqslant V_0\\ \dfrac{V}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2},\beta<V<V_0\end{cases}$$

这说明了分段函数是客观存在的.

3.分段函数在考研试题中出现的种类

(1) 显式(直接给出的分段函数)

【例1】 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 是分段函数显式,其定义域为$(-\infty,+\infty)$.称点 $x=0$ 为分段函数的衔接点.

一般地,关于点 x_0 的左、右表达形式不同,称此点 x_0 为分段函数的第一类衔接点.例1中 $x=0$ 为第一类衔接点.

【例2】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,此函数也是分段函数显式.称点 $x=0$ 为分段函数 $f(x)$ 的第二类衔接点.

(2) 隐式(间接给出的分段函数)

① 以极限形式给出的分段函数

【例3】 (1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ______;

(2) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内(   ).

A. 处处可导　　B. 恰有一个不可导点

C. 恰有两个不可导点　　D. 至少有三个不可导点

解 (1) 当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-1/n)x}{x^2+1/n}=\dfrac{1}{x}$;当 $x=0$ 时,$f(x)=0\Rightarrow f(x)=\begin{cases}1/x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,间断点为 $x=0$.

(2) 当 $|x|=1$ 时,$f(x)=1$;当 $|x|<1$ 时,$f(x)=1$;当 $|x|>1$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}|x|^3\sqrt[n]{1/|x|^{3n}+1}=|x|^3\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1\\ 1, & |x|\leqslant 1\\ x^3, & x>1\end{cases},$$

因为 $x=-1,1$ 为分段函数 $f(x)$ 的第一类衔接点，且左、右导数存在不相等，所以 $x=-1,1$ 是 $f(x)$ 的两个不可导点. 故选 C.

② 带有绝对值符号给出的分段函数

【例 4】 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解 $f(x)$ 是带绝对值符号给出的分段函数，即隐式. 应用时化为显式.

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x>0\\ 0, & x=0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

故选 C.

③ 用 max, min 符号给出的分段函数.

【例5】 (1) 求 $f(x)=\max\{1,x^2,x^3\}$的分段表达式；(2) 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$；(3) 计算 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$；(4) 计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解 (其中(2)、(3)、(4) 不在此解).

(1) 画出 $y=1,y=x^2,y=x^3$ 的图形(图 1.1). 由图 1.1 知

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<-1\\ 1, & |x|\leqslant 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$$

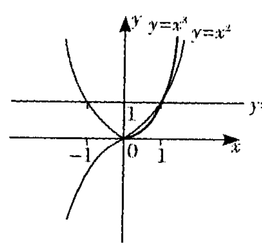

图 1.1

④ 用取整[　] 符号给出的分段函数.

【例 6】 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数.