高中数学复习参考资料

郭曙先等编

編者的话

本复习参考資料是根据中央教育部制訂的《中学数学教学大纲》、《1960年高等学校招生考試大纲》，以及现行中学数学課本的內容編写的。目的是为帮助高中毕业生复习。在編写过程中，注意到学生有限的复习时間，因而取材除力求全面、正确外，还注意內容叙述的簡炼和文字的通順。

本参考資料着重帮助学生扼要地复习中学数学教材中的基本概念、基本性质和运算法则。配置的例题，一方面充分体现上述基本知识的运用；另一方面注重解题的技能技巧和揭示规律。对于学生平时易犯的錯誤，有的明确指出，有的在叙述概念及例題演毕之后，适当地作出注释，以引起讀者的注意。为了减少閱读时間，所举例題的演算过程，均从簡要，有些只列出其中的关鍵部分。几何部分的例題，只指出分析思考过程，具体演证，均留給读者自己完成。

本参考資料的代数部分是由于云程(南京市一女中)、吉星(南京市七中)、郭曙先(南京市教师进修学院)編写，几何部分是由赵遂之(南京市四女中)編写，三角部分是由金懋曦(南京市二中)編写。我們在編写时虽然参考了許多有关的高中数学各科复习参考书，但限于編者水平，缺点和錯誤在所难免，希望读者提出意见，以便再版时研究修改。

目　录

代 数 部 分

一、数的概念的发展

在中学代数里，包括数的概念的发展、代数式的恒等变形、函数和方程等四个主要內容．而前面的两个部分又是后者的基础．

在复习数的概念时，应以数的概念的发展，实数的运算和复数的运算三部分为重点；并在复习过程中着重以下两点：

（1）理解引入新数的必要性，熟练它們的运算法則，弄清当数由实数集合扩充到复数集合时，哪些运算性质对于新数不能运用及其处理方法．

（2）在实数运算中，善于选择簡便合理的运算方法．

（一）基本知识

在中学代数里所研究的数，可概括成下列的数系表：

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{正、負整数}\\ \text{正、負分数}\\ \text{零}\end{array}\right\}\text{有理数}\\ \text{正、負无理数}\end{array}\right\}\text{实数}\\ \text{虚数}\end{array}\right\}\text{复数}$$

1．自然数　以 1 为单位由一个或若干个单位组成的数叫做自然数(也就是正整数)．自然数有下面三个主要性质：

（1）自然数有最小的一个数是 1，但沒有最大的数.

（2）任意两个自然数都能比較大小.

（3）在自然数范围內，永远可以施行加法和乘法两种运算.

2. 有理数　正負整数、正負分数和零，总称有理数. 有理数有下面主要性质：

（1）有理数沒有最小的数，也沒有最大的数.

（2）任意两个有理数都能比較大小.

（3）有理数与数軸上的点，不能建立一一对应关系，例如数軸上有一点对应于$\sqrt{2}$，但$\sqrt{2}$不是有理数.

（4）在有理数范围內，可以施行加、减、乘、除（除数不为零）四种运算.

3. 实数　无限不循环小数叫做无理数. 通常用具有一定精确度的有限小数来近似地表示无理数.

有理数和无理数总称实数. 实数有下面主要性质：

（1）实数沒有最小的数，也沒有最大的数.

（2）任意两个实数可以比較大小.

（3）实数与数軸上的点之間建立一一对应的关系.

（4）在实数范围內，可以施行加、减、乘、除（除数不为零）四种运算.

实数 a 的絕对値 $|a|$，就是在数軸上表示 a 这个点和原点的距离，

$$|a|=\begin{cases} a & \text{如果 } a>0, \\ 0 & \text{如果 } a=0, \\ -a & \text{如果 } a<0. \end{cases}$$

4. 复数

（1）重要概念　形式如 $a+bi$ 的数叫做复数（a、b都是实

数). 其实部 a 的单位是 1，虚部 bi 的单位是 $i\,(i^2=-1)$.

当 $b=0$ 时，則复数 $a+bi$ 就是实数.

当 $b\neq0$ 时，則复数 $a+bi$ 叫做虚数.

当 $a=0$ 时，則 $a+bi$ 叫做純虚数.

当 $a=0$，$b=0$ 时，則复数 $a+bi=0$.

复数 $a+bi$ 可以用复数平面內的点 M 来表示(如图 1). 在复数平面內，表示实数的点都在 X 軸上，表示純虚数的点都在 y 軸上.

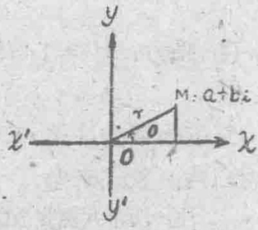

图 1

設点 M 表示复数 $a+bi$. 則 OM 的长 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做复数 $a+bi$ 的模数或絕对値，用符号 $|a+bi|$ 表示:

$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

X 軸的正方向 OX 和 OM 所夹的角 θ，叫做复数 $a+bi$ 的幅角. 如复数 $a+bi$ 不等于零，那末，它有无限个幅角，其中适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的幅角，叫做幅角的主値.

两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$，当 $a=c$，$b=d$ 时，它們相等. 不相等的两个复数沒有大小的比較.

虚数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 叫做共軛虚数. 两个共軛虚数在复数平面內所对应的点对称于 X 軸.

复数 $a+bi$ 可以通过复数平面用三角函数式表示:

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$.

在复数范围內，六种运算都可以施行.

(2) 复数的代数式运算

① 加法和减法:

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

② 乘法:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

③ 除法:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

④ 乘方: $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$.

(k 为整数)

复数的乘方,可按二項定理来計算,但比較麻煩, 一般地化为三角函数式来做.

注: 两个共軛复数的和与积,都是实数.

(3) 复数的三角函数式运算

① 乘法:

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

② 除法:

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]. \qquad (r_2\neq 0)$$

③ 乘方:

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin\theta)$$

(棣美弗定理)

④ 开方:

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

（其中 $k=0,1,2,\cdots\cdots n-1$）

注意：（1）在数的运算中，如果遇到有如$\sqrt{-3}$形式的，要先化成$\sqrt{3}\,i$，再进行計算。例如$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-12}=\sqrt{3}\,i\cdot\sqrt{12}\,i=\sqrt{36}\,i^2=-6$. 如果算成$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-12}=\sqrt{(-3)(-12)}=\sqrt{36}=6$那就錯了.

（2）在$\sqrt[n]{a}$中，a为虚数时，它就是多値的.

例1 已知$(3-x)+(2+x+2y)i=4(x+y)+3(x+y)i$，求实数$x$，$y$.

解 由两个复数相等的定义，得方程组：

$$\begin{cases}3-x=4(x+y)\\2+x+2y=3(x+y)\end{cases}\quad 解得：x=\frac{5}{3},\ y=-\frac{4}{3}.$$

例2 解方程：$2x+|x|=2+6i$.

解 設$x=a+bi$，則 $2(a+bi)+\sqrt{a^2+b^2}=2+6i$，

即 $2a+2bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+6i$.

由此得 $\begin{cases}2a+\sqrt{a^2+b^2}=2.\\2b=6.\end{cases}$

解得：$b=3$，$a=\dfrac{4\pm\sqrt{31}}{3}$.

验算后，知 $a=\dfrac{4+\sqrt{31}}{3}$是增根，

$$\therefore\quad x=\frac{4-\sqrt{31}}{3}+3i.$$

例3 化簡：$\dfrac{3+2i^{103}}{2-i^{92}}-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i}+\dfrac{1-4i^{33}}{5}$.

解 原式$=\frac{3-2i}{2-1}-\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}+\frac{1-4i}{5}$

$$=3-2i+\frac{1+2\sqrt{6}i}{5}+\frac{1-4i}{5}$$

$$=\frac{17}{5}+\left(\frac{2\sqrt{6}-14}{5}\right)i。$$

例4 計算$\frac{(\sqrt{3}+i)^{50}}{(1-i)^{100}}$.

解 原式$=\frac{[2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)]^{50}}{(\sqrt{2})^{100}[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]^{100}}$

$$=\frac{2^{50}(\cos 1500^\circ+i\sin 1500^\circ)}{2^{50}[\cos(-4500^\circ)+i\sin(-4500^\circ)]}$$

$$=\cos(1500^\circ+4500^\circ)+i\sin(1500^\circ+4500^\circ)$$

$$=-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

(二)参 考 题

1. 下列各数里，哪些是有理数？哪些是无理数？为什么？

(1) $\lg\operatorname{tg}(-840^\circ)$，　　(2) $2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{2}$，

(3) $\lg\frac{75}{16}+2\lg\frac{5}{9}+\lg\frac{16}{27}$，

(4) $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$.

2. 两个无理数的和、差、积、商，是否一定为无理数？試各举例说明.

3. 在实数范围内，解下列各方程：

(1) $|x+1|+|\sqrt{2}x+\sqrt{2}|+|\sqrt{3}x+\sqrt{3}|=0$，

(2) $|x-3|+\sqrt{2-x}=3$，

(3) $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{2x-4}+1=0$,

(4) $\dfrac{3x+2iy}{5i-2}=\dfrac{15}{8x+3iy}$.

4. 在复数范围内解方程:

(1) $|x|-x=1+2i$, (2) $(2+i)x^2-4x+(i-2)=0$.

5. 化簡下列各式:

(1) $\sqrt[3]{-8}-\sqrt{-8}+\sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2}-\sqrt[6]{\left(-\frac{1}{8}\right)^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}}$,

(2) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)^3}$,

(3) $\dfrac{(\sin\varphi+i\cos\varphi)(\sqrt{3}-i)^{100}}{(\cos\varphi-i\sin\varphi)(1+\sqrt{3}i)^{95}}$,

(4) $\dfrac{(1+i)^n}{(1+i)^{n-5}}$. ($n$ 为自然数)

6. 已知 x 和 y 是共轭虚数,并且 $(x+y)^2-3xyi=4-6i$,求 x 和 y 的值.

二、代 数 式

在复习这部分內容时,要求注意以下几点:

1. 要能正确熟练地应用代数式的恒等变换知识进行代数式的运算,并注意代数式里变量的允許值范围.

2. 正确理解根式的意义,注意根式的基本性质及其运算法則,特别是要弄清算术根的概念.

(一)基本知识

1. 代数式及代数式的值 用数字或者字母表示数,并且用指明运算的种类(加、減、乘、除、乘方、开方)和順序的符号把它們連結起来,所得到的式子,叫做代数式. 如果用数值代替

代数式里的字母，并且按照指定的顺序进行指定的运算，那末，所得的結果，就叫做代数式的值．求代数式的值时，一般先将代数式进行化簡，然后再行求值．例如：已知$m=5.3$，$n=0.3$，求 $2m(m+n)(m-n)+n(m-n)^2-2mn(2m-3n)-n^2(2n-m)-m^3$ 的值时，应先化簡为 $(m-n)^3$，然后再将数值代入得 $(5.3-0.3)^3=125$。

2．代数式的分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单項式}\\\text{多項式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

3．有理式　一个代数式，只含有加、减、乘(包括乘方)、除四种运算的，叫做有理代数式，簡称有理式．

(1) 整式　沒有含变数的字母組成的式子做除数的有理式，叫做有理整式，簡称整式．沒有加法和減法运算的整式，叫做单項式．若干个单項式的代数和，叫做多項式．因此单項式是多項式的特殊情形．多項式的次数，由各項里变数字母指数的和中最大的一項来决定，如 $3x^2y^3+2xy^2+y^4$，是x和y的五次式．

(2) 分式　在一有理式中，若含有以变数字母作除式时，就叫做有理分式，簡称分式．分式的分子可以是任何数值，分母可以是零以外的任何数值，如果分式的分母为零，分式就无意义．

分式有下面的基本性质：分式的分子和分母都乘以或者除以不等于零的同一个代数式，分式的值不变．它是通分和約分的依据，但必須注意那个乘式或除式不得为零．

4．根式　式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式．当n是奇数的时候，a可以是任何实数；当n是偶数的时候，a可以是任何正实数或零．

根据方根的定义可知，在$\sqrt[n]{a}$有意义的时候$(\sqrt[n]{a})^n=a$ (n是大于1的整数)；反之，若$a\geqslant0$的时候，有$\sqrt[n]{a^n}=a$ (n是大于1的整数)。所以当$a\geqslant0$时，不论n为偶数或奇数，$\sqrt[n]{a}$都有意义，由此得$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n$。若$a<0$，則当$n$为奇数时，$\sqrt[n]{a}$有意义，$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{-a}$，此时$(\sqrt[n]{a})^n=(-\sqrt[n]{-a})^n$ $=-(\sqrt[n]{-a})^n=-\sqrt[n]{(-a)^n}=\sqrt[n]{-(-a)^n}=\sqrt[n]{a^n}$；当$n$为偶数时，$\sqrt[n]{a}$无意义，此时$(\sqrt[n]{a})^n\neq\sqrt[n]{a^n}$。例如：

(1) $\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$； $(\sqrt{2})^2=2$。

$\therefore\ \sqrt{2^2}=(\sqrt{2})^2$。

(2) $\sqrt[3]{(-2)^3}=\sqrt[3]{-8}=-2$； $(\sqrt[3]{-2})^3=-2$。

$\therefore\ \sqrt[3]{(-2)^3}=(\sqrt[3]{-2})^3$。

(3) $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$； $(\sqrt{-2})^2=-2$。

$\therefore\ \sqrt{(-2)^2}\neq(\sqrt{-2})^2$。

(1) 根式的性质

① 算术根　非負数$x=\sqrt[n]{A}$，它的n次冪等于A($A\geqslant0$，n为自然数)，則称为A的n次算术根。正数开任意正整数次方，有唯一的算术根；負数开奇次方，可以化成和某一个算术根相反的数。例如：$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$，$\sqrt[5]{-2}=-\sqrt[5]{2}$等等，零的算术根就是零，但須注意算术根只是在实数范围内来定义的，在复数范围内，就无所謂算术根。

算术根的定义是一个很重要的概念，必須彻底掌握，弄清它的实质，以免在解題时发生錯誤。例如在計算$\sqrt{1-6a+9a^2}$ (已知$a=4$)的値时，如果把它写成$\sqrt{(1-3a)^2}=1-3a$来求値，就会产生錯誤。在化簡$x+\sqrt{(x-2)^2}$时，应当就$x\geqslant2$及$x<2$三种情况来分别求解。同样，在化簡$\sqrt[12]{(a-b)^4}$时，也应就$a\geqslant b$及$a<b$来分别求出其結果。至于把$\sqrt{x^2+a^2}$与$\sqrt[3]{a-x}$化为同次根式，对于$\sqrt[3]{a-x}$，决不能直接写成

$\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{(a-x)^2}$，而应当说明，如果 $a\geqslant x$，则 $\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{(a-x)^2}$；如果 $a<x$，则 $\sqrt[3]{a-x}=-\sqrt[3]{x-a}=-\sqrt[6]{(x-a)^2}$.

② 对于算术根来说，根式有如下的一些性质：

i　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$，（$p$ 为正整数）

ii　$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$，

iii　$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$　$(b\neq 0)$，

iv　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

如果被开方数是負数，这些式子就不一定成立，现分述如下：

i　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$，如果 $a^m<0$，则当 n、p 为奇数时，这个式子成立，否則就不成立。例如 $\sqrt[5]{(-2)^3}=\sqrt[15]{(-2)^9}$，但 $\sqrt[5]{(-2)^3}\neq\sqrt[10]{(-2)^6}$，$\sqrt{-2}\neq\sqrt[4]{(-2)^2}$.

ii　$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$（$a$、$b$ 至少有一个是負数），如果 $ab<0$，则当 n 为奇数时，这个式子成立，否則就不成立。例如 $\sqrt[3]{(-2)\cdot 3}=\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{3}$，但 $\sqrt{(-2)(-3)}\neq\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$.

iii　$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m$. 如果 $a^m<0$，则当 n 为奇数时，这个式子成立，否則就不成立。例如 $\sqrt[3]{(-2)^6}=(-2)^2$，但 $\sqrt{(-2)^6}\neq(-2)^3$.

iv　$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$（$b\neq 0$，且 a、b 至少有一个是負数），如果 $\dfrac{a}{b}<0$，则当 n 为奇数时，这个式子成立，否則就不成立。例如 $\sqrt[3]{\dfrac{-2}{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{3}}$，但 $\sqrt{\dfrac{-2}{-3}}\neq\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$.

（2）根式的化簡　根式的化簡，就是将根式化成最簡根式。最簡根式必須适合下列三个条件，即：

① 被开方数的指数和根指数是互质数;

② 被开方数的每一个因式的指数,都小于根指数;

③ 被开方数不含分母.

根指数相同的根式叫做同次根式. 几个根式化成最简根式以后,如果被开方数和根指数都相同, 那末,这个根式就叫做同类根式.

(二)代数式的运算

1. 整式的运算　除掉整式的加、减、乘、除四种最基本的运算外,还有下面几种重要的运算.

(1) 运用下面的乘法公式进行乘法:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

(2) 运用余数定理和綜合除法进行除法:

① 余数定理　多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数等于 $f(a)$. 据此,要使多項式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除,必須且只須 $f(a)=0$.

二項式 $x^m\mp a^m$ 能被 $x\mp a$ 整除的条件,如下表所示:

被除式	除式	能否整除	商式
x^m-a^m	$x-a$	能	$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\cdots+a^{m-1}$
	$x+a$	m为偶数时能; m为奇数时不能.	$x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\cdots+(-a)^{m-1}$
x^m+a^m	$x-a$	不能	
	$x+a$	m为偶数时不能; m为奇数时能.	$x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\cdots+(-a)^{m-1}$

例如， $x^3 \mp a^3=(x\mp a)(x^2\pm ax+a^2)$，

$x^4-a^4=(x\mp a)(x^3\pm ax^2+a^2x\pm a^3)$，

$x^5\mp a^5=(x\mp a)(x^4\pm ax^3+a^2x^2\pm a^3x+a^4)$。

例1 多項式 $f(x)$ 若以 $(x-a)$ 除之，余数为 A；若以 $x-b$ 除之，余数为 B，若以 $(x-a)(x-b)$ 除之，則余式为何？$(a\neq b)$

解 令所得余式为 R_1x+R_2，商式为 $Q(x)$，

則 $f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R_1x+R_2$，根据余数定理得：

$$f(a)=R_1a+R_2=A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$f(b)=R_1b+R_2=B\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解此方程组得： $R_1=\dfrac{A-B}{a-b}$； $R_2=\dfrac{aB-Ab}{a-b}$。

故所得的余式为 $\dfrac{A-B}{a-b}x+\dfrac{aB-Ab}{a-b}$。

例2 当 a 和 b 是什么数値的时候，多項式 $x^4+ax^3+2x^2+bx-2$ 能被 x^2-x-2 整除？

解 $\because x^2-x-2=(x-2)(x+1)$，依題意有：

$$f(2)=16+8a+8+2b-2=0;$$

及 $$f(-1)=1-a+2-b-2=0.$$

即： $$\begin{cases}8a+2b=-22\cdots\cdots\cdots(1)\\ a+b=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解此方程组得 $a=-4$，$b=5$。

例3 求一三次多項式 $f(x)$，已知当 $x=2$ 及 $x=3$ 时，其値为零；当 $x=0$ 时，其値为 6；当 $x=1$ 时，其値为 12。

解 $\because f(x)$ 为一个三次多項式，且能被 $(x-2)(x-3)$ 整除，故 $f(x)$ 可以写成 $f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3)$，

又 $\because f(0)=a_1(0-2)(0-3)=6$，由此得 $a_1=1$，又 $f(1)=(a_0+a_1)(1-2)(1-3)$，即 $a_0+a_1=6$，故得 $a_0=5$。因此，所求的多项式为 $f(x)=(5x+1)(x-2)(x-3)=5x^3-24x^2+25x+6$。

② 綜合除法　用綜合除法可求多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数及商式，但必須注意以下几点：

i　被除式遇到有缺項时，必須以零为系数表示缺項。

ii　因为 $x+a=x-(-a)$，故除式若为 $x+a$ 形式时，須將 a 改为 $-a$，再应用綜合除法。

iii　除式如果为 $ax-b(a\neq0)$ 的形式，应先把它变为 $a(x-\frac{b}{a})$，再用 $x-\frac{b}{a}$ 作除式进行演算，但所得商式的各項系数必須除以 a，而余数不变。这是因为 $f(x)=\phi(x)(x-\frac{b}{a})+R$

$$=\phi(x)\left(\frac{ax-b}{a}\right)+R=\frac{\phi(x)}{a}(ax-b)+R$$ 的原故。

例　求 $2x^4+5x^3-3x-4$ 除以 $2x+1$ 的商式和余数。

解

$$\begin{array}{r|l} 2+5+0-3-4 & -\frac{1}{2} \\ -1-2+1+1 & \\ \hline 2 \,\big|\, 2+4-2-2-3 & \\ \hline 1+2-1-1 & \end{array}$$

故商式为 x^3+2x^2-x-1，余数为 -3。

（3）多項式的因式分解　把一个多項式用几个式子的連乘积来表示，叫做多項式的因式分解．对于一个多項式能否分解因式，要根据問題中所要求的系数范围来考虑，在不同的数的范围內，有不同的結论。当問題要求系数在复数范围內分

解因式时，则須将多項式分解为若干个一次因式的連乘积为止。例如：分解 x^4-4y^4。

解：如果要求在有理数范围内分解，

则 $x^4-4y^4=(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)$。

如果要求在实数范围内分解，

则 $x^4-4y^4=(x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y)(x^2+2y^2)$。

如果要求在复数范围内分解，

则 $x^4-4y^4=(x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y)$

$(x-\sqrt{2}yi)(x+\sqrt{2}yi)$。

多項式的因式分解一般有下列几种方法（下面的例题，如果沒有特别说明，是指因式的系数在有理数范围內）：

① 提取公因式法：

例 分解 $24x^{5n+3}-40x^{n+2}$ 的因式。

解 原式 $=8x^{n+2}(3x^{4n+1}-5)$。

② 利用乘法公式分解法。

例1 分解 $x^4+y^4+(x+y)^4$ 的因式。

解 原式 $=[(x^2+y^2)^2-2x^2y^2]+(x+y)^4$

$=\{[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2\}+(x+y)^4$

$=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2+(x+y)^4$

$=2(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$

$=2[(x+y)^4-2xy(x+y)^2+x^2y^2]$

$=2[(x+y)^2-xy]^2$

$=2(x^2+xy+y^2)^2$。

例2 分解 $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ 的因式。

解 原式 $=[(x+a)(x+4a)][(x+2a)(x+3a)]+a^4$

$=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+4a^2+2a^2)+a^4$