H.B.FINE

范氏大代數

駱師曾吳維一譯　莊禮深校訂

$x+y=0$

世界書局發行

中華民國三十七年十二月新廿二版

范氏大代數

外加運費匯費

原著者 Henry Burchard Fine

譯者 駱師曾 吳維一

校訂者 莊禮深

發行人 張靜江

出版者 世界書局

發行所 世界書局

譯者例言

(一)譯書當以信達流暢爲主。譯者筆拙,雖未能流暢,但於信達一點,則力求與原書意義並無參差或遺漏之處。

(二)本書術語,多採吾國最通行者。如一名已有數譯,則始終採用一名,以表一致。其尙無適當譯名者,則由譯者意譯。且於每一術語之初譯處附以原文,以免讀者混淆而生隔賅之弊。

(三)本書頁碼悉依原著。卽每頁內容均與原書相同,以便讀者對照。

(四)原文有英文索引一項,本書亦附以中文譯名,以便查閱。

目　錄

第一編　數

頁

第二編　代數

第一編　數

I. 自然數——數法，加法與乘法

事物之羣及其基數

事物之羣． 依吾人日常之經驗，事物之呈現於當前而引 1
起吾人之注意者，不僅單獨的，但亦有集合而成羣或團者．

如手之指，家畜之羣，多角形之頂皆爲事物羣之例．

當某事物與其他事物非個別的而從其全體區別，且使成爲吾人注意之單獨目的物時，則某事物可視作構造一羣．

爲便利計，構成一羣之事物，名爲此羣之元素．

等羣．逐一對應． 文字 ABC 及 DEF 之二羣有關係， 2
卽可由一羣各元素與他羣各元素，依一元素與一元素相匹配而將其所有元素組合成對．例如 A 與 D, B 與 E, 及 C 與 F 可匹配．

無論何時，如二羣之一切元素，皆能如此匹配者，則稱此二羣相等；而諸元素之匹配方法稱爲使二羣成一對一關係，或逐一對應之關係．

3 **定理.** 設二羣皆等於同一第三羣,則互相等.

因依假設,可使其二羣中每一羣與第三羣逐一對應,但設其中二元素與第三羣相同元素視爲成偶,則此二羣當互相逐一對應.

4 **基數.** 吾人可設想所有可能的事物之羣,係分配於等羣之類,而任何二已知羣之屬於同類或異類,依是否可能使其逐一對應而定之.

例如,文字 $ABCD$ 與 $EFGH$ 之二羣屬於同類,而二羣 $ABCD$ 及 EFG 則爲異類.

一類諸羣公有之性質,而從他類諸羣分別者,爲一羣事物之數或其基數.換言之,

一羣中事物之數或其基數,爲其本羣及可與其逐一對應之各羣公有之性質.

或可說:"事物羣之基數,爲此羣之性質,其中事物,設重行排列,或以他事物逐一代換而仍不變者";又可說"此爲羣之性質,而此羣不關係於事物本身之特性及其羣中之排列".

因排列事物或以他事物逐一代換,則僅能變爲一等羣(§2).且當其羣中一切如此變化而性質不變,是必無關於事物之特性及其排列.

部分. 第一羣之元素有若干而非全體,爲第二羣之元素時,則稱第一羣爲第二羣之一部分. 5

例如,羣 ABC 爲羣 $ABCD$ 之一部分。

由此定義遂得:

設第一羣爲第二羣之一部分,而第二羣又爲第三羣之一部分,則第一羣亦爲第三羣之一部分. 6

有限羣及無限羣. 當一羣或團不等於其本身諸部分之一時,則稱爲有限;當等於其本身之某一部分時,則稱爲無限.* 7

例如,羣 ABC 爲有限,因不能使其與 BC 或其任何部分逐一對應.

但記號或符號之任何不盡連續,例如不盡數串 1, 2, 3, 4……,爲一無限團.

例如,可於全團 1, 2, 3, 4,……及自 2 起之部分間成立一對應關係.

即於　　1, 2, 3, 4, 5,……　　(a)

及　　2, 3, 4, 5, 6,……　　(b)

之間. (a) 中之 1 與 (b) 中之 2 匹配, (a) 中之 2 與 (b) 中之 3 匹配, 餘類推, —— 對於 (a) 中所可任擇之數,在 (b) 中有其對應數.

故團 (a) 等於其部分 (b). 因此 (a) 爲無限.

小基數及大基數. 令 M 及 N 表任何二有限羣,則必爲下列情形之一. 8

1. M 及 N 相等,

或　2. M 等於 N 之一部,

或　3. N 等於 M 之一部.

---

* 當然不能將一無限羣,——多稱爲團之一切元素——計及.當已有定則而能由此斷言已知事物是否屬於此團時,則吾人視如此之團,其意義已定.

於第一情形，稱 M 及 N 有同基數 (§ 4)，或等基數；於第二情形，稱 M 之基數小於 N 之基數；於第三情形，稱 M 之基數大於 N 之基數.

例如，設 M 爲文字 abc 之羣，及 N 爲羣 $defg$，則 M 等於 N 之一部分．例如等於部分 def.

故 M 之基數小於 N 之基數，而 N 之基數大於 M 之基數.

9 **註** 由 §7 有限羣之定義，此處所定"等"，"大"及"小"之關係，不可含混．例如，此定義不能使 M 之基數同時等於及小於 N 之基數，因如此則 M 等於 N 亦等於 N 之一部分，故 N 等於其本身之一部分 (§ 3)，而其終，N 爲無限 (§ 7).

10 **系.** 設三基數之第一數小於第二數，而第二數小於第三數，則第一數亦小於第三數.

設 M, N, P 表任何事物羣之基數，M 等於 N 之一部分，而 N 等於 P 之一部分；則 M 等於 P 之一部分 (§§ 3, 6).

11 **基數系.** 由含一元素之一羣開始，而屢次"加"一新事物，導得基數表如下：

1. 一"羣"之基數，如 |，即含一元素.
2. 一羣之基數如 ||，即加一元素於第一種之羣而得者.
3. 一羣之基數如 |||，即加一元素於第二種之羣而得者.
4. 如此類推，不止.

吾人名此種連續基數爲"一"，"二"，"三"，……，而以記號 1, 2, 3, …… 表之.

就此系觀察． 任何有限羣之基數，名爲有限基數，下列觀察，視爲由上述基數表而得者： 12

第一． 此表中之各基數，皆爲有限．

如羣 | 有限，因其不能等於其一部分 (§ 7) 故也；而其後各羣爲有限，因加一新事物於有限羣仍爲有限故也．*例如 | 爲有限羣，故 || 爲有限羣；因 || 爲有限羣，故 ||| 爲有限羣，餘依此類推．

第二． 各有限基數皆含於此表內．

蓋依定義，各有限基數爲若干有限羣之基數，如 M．但可於 M 中每一物作一標記，作成一標記羣 | ……| 等於任何已知有限羣 M，此標記羣必有一最後標記，故必含於 § 11 之表內，蓋若標記無盡，則其本羣爲無限，而 M 亦爲無限故也 (§ 7)．

第三． 諸基數中無二個相等．

此可由 § 8 定義而知之．蓋因已證明一切羣 |，||，|||，……皆爲有限，而其中每二羣之一等於他羣之一部分爲眞確故也．

---

*可證明如下 (G. Cantor, Math. Ann; 46 卷, 490 頁)：

設 M 表一有限羣，而 e 爲單一事物，則羣 Me 爲加 e 於 M 而得，亦爲有限．

令 $G=H$ 表羣 G 及 H 相等．

設 Me 爲無限，則必等於其一部分 (§ 7)．

令 P 表此部分，則 $Me=P$．

(1) 假定 P 不含 e．

令 f 表 P 內與 Me 中之 e 匹配之元素，而以 P_1 表 P 之餘部．

則因 $Me=P_1f$ 而 $e=f$，得 $M=P_1$．

但此爲不可能，因 M 爲有限羣而 P_1 爲 M 之一部分 (§ 7) 故也．

(2) 假定 P 含 e．

則 P 中之 e 不能與 Me 中之 e 匹配，因若能配合，則 P 之餘部亦爲 M 之一部，而等於 M 矣．但可假定 P 中之 e 與他元素如 Me 中之 g 匹配及 Me 中之 e 與 P 中之 f 匹配．

設 $Me=P$ 在此假設爲眞，則設再組合諸元素 e, f, g 使 P 中之 e 與 Me 中之 e 匹配及 P 中之 f 與 Me 中之 g 匹配亦眞．但適如前證，P 之一部分將等於 M 矣，故此假設亦不可能．

自然記法．方程及不等式

13 自然數。符號 1, 2, 3,……或其名“一”,“二”,“三”,……，謂之正整數或自然數．故

一自然數爲一基數之記號或符號．

14 自然記法． 排列此諸數使其次序對應於 § 11 所代表之已知基數，則得不盡之連續記號

1, 2, 3, 4, 5,……,

或“一”,“二”,“三”,“四”,“五”,……，此名自然記法，或自然數之記法．

15 記法內各記號表其中已定部分之記號數．

例如，4 表記號 1, 2, 3, 4 之數，因此記號 1, 2, 3, 4, 之數，與羣 |, ||, |||, |||| 之數相同，易言之，卽與最後羣之標記數 |||| 相同 (§ 8)，普通皆如是．

16 記法之次序性質． 自然記法，就其本身而言，僅爲不同記號之團，其第一記號爲 1；繼其後之一定記號卽 2；再繼其後之一定記號卽 3；如此無止境．

易言之，自然記法僅爲不同記號之團，依一定且已知次序一個隨一個而來，且有第一記號而無最後記號．

自其觀察點而論，自然數本身，僅爲有次序之標記，卽當默誦此記法時——關於時間——其次序自能呈現．

17 顯然可見，此記法與普通一切之團，其元素依一定且已知次序而排列者，皆有下列性質：

1. 任何二元素可稱爲其一在“前”而他一在“後”，此“前”“後”之語，應用於任一對元素與應用於任何其他一對，有同一意義.

2. 設任何二元素爲已知，則常可定其孰前孰後.

3. 設 $a, b,$ 及 c 表任何三元素而 a 在 b 前，及 b 在 c 前，則 a 在 c 前.

一團有已知其具上述性質者，或可由選擇排列方法而置之如是者.此種情形，皆稱此團爲次序系.

第一類之例，如 (1) 自然記法本身；(2) 時間內之連續事件；(3) 沿水平線由左至右排成之點列.第二類之例，爲按諸人之姓名字母依次排列者之一羣.

一團亦可有“一致”之元素，如在事物之羣，有二事或諸事可同時發生. 18

當上述關係 1, 2, 3, 保持於不一致元素中——卽不一致元素之眞確如下者，則稱此團爲依次序.

4. 設 a 與 b 一致，及 b 與 c 一致，則 a 與 c 一致.

5. 設 a 與 b 一致，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前.

基數中之大小關係，用自然數依記法中次序關係表示之. 19
因任何二已知基數之一，其在自然數記法中較後者必較大.

且“設三基數之第一個小於第二個，而第二個小於第三個，則第一個小於第三個”之關係，可以記法中“設 a 在 b 前，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前”之關係代表之.

實則罕用任何別法以比較基數，吾人不用 §8 之方法，直接比較物羣之基數．反言之，卽以合宜之自然數代表，而由其自然數在記法中之關係次序，推知孰大孰小．此事不必思索，因記法深印腦中，故當述及任何二自然數時，卽可認識其孰前孰後。例如設述及 A, B 二城，A 之人口爲 120000，而 B 爲 125000，則可立卽斷定 B 城居民較多，因知 125000 於記法中在 120000 之後故也．

20 **數之方程及不等式．** 以後凡言"數"者，皆指自然數（§13）；而文字 a, b, c, 表此任何數。

21 當欲使 a 及 b 表同數或自然記法中之"一致之數"，應用**方程**．

$$a=b,\ \text{讀作“}a\ \text{等於}\ b\text{”}.$$

22 但當使自然記法中表 a 在前而 b 在後時，應用**不等式**

$$a<b,\ \text{讀作“}a\ \text{小於}\ b\text{”};$$

$$b>a,\ \text{讀作“}b\ \text{大於}\ a\text{”}.$$

23 依嚴格而論，此"等於""小於"及"大於"諸語，自不涉於記號 a 及 b 之本身，但指其所代表之基數；例如"a 小於 b"一語，僅爲"a 所表之基數小於 b 所表之基數"之略語而已。

但一切不等式 $a<b$ 於記號 a 及 b 本身之意義，爲於記法中 a 在 b 前。

24 **方程及不等式之規則．** 由 §§17, 18 及 §§21, 22 之定義，卽得

1 設 $a=b$ 及 $b=c$，則 $a=c$.

2. 設 $a<b$ 及 $b<c$，則 $a<c$.

3 設 $a=b$ 及 $b<c$，則 $a<c$.

數　法

算術之主旨，在論自然數中存在之次序關係，及諸數可組合者之若干演算法． 25

算術之演算，以數法為起原．

數法． 欲發覺已知物羣之基數為何，則數此羣． 26

此運算為人所熟知．先取諸物之一標"一"，次取另一物標"二"，如此至諸物無遺而止．——如用口述記號「一」「二」……則須依記法中次序，愼勿遺漏；但選擇諸物，則依任何次序，或從其便，如此則最後所得之記號，即所求者——此羣中基數之名．蓋由於記法之基數次序，此最後記號表已數過若干記號(§ 15)，從而此羣內有若干物 (§ 8)．

此數法之運算，可認為引導所計算之羣與自然數法之一部分一一對應(§ 2) ——此部分自"一"起而以計算時所用最後數為止．

觀察自然數用於數法，有二重目的：(1) 僅用其某一羣為運算時之數碼，及 (2) 應用最後一字以記錄此記法之結果．

前已熟知諸物之選擇，與其次序無關．此可證明如下：

定理． 有限物羣無論依如何次序選擇諸物，其數法之結果皆同． 27

例如，假定依次序 P 選擇諸物時，一定羣數法之結果為 99，但依他次序 Q，則為 97．

則在次序 P 中前 97 物所成之羣，將與次序 Q 中之全羣相等，蓋依假設，二者皆有與自然記法之前 97 數相匹配者 (§ 3).

但此爲不可能，因如此則將使此羣之一部分等於其全體；實則由假設，此羣爲有限羣 (§ 7) 故也.

28 **基數之另一定義.** 適所證明之定理，可作爲一有限羣基數定義之基礎，即：

有限物羣之基數爲此羣之性質，不論以任何次序數此羣，均可由此性質達到同一自然數.

設以如 § 16 所定之自然記法，爲論數之起點，則此爲自然所趨之基數定義.

加法

29 **加法定義.** 加 3 於 5，意即求自然記法中，5 以後何數佔第三位置.

在記法中，自 6 起，向前數三數，如：6, 7, 8，可求得此數 8.

表此演算用符號 +，讀作"加"，書作 $5+3=8$.

就一般而言，加 b 於 a 意即求自然記法中，a 以後何數佔第 b 位置.

因此記法中無最後之符號，故此數常可求得。稱之爲 a 及 b 之和，而於其 a 與 b 之關係，以式 $a+b$ 表之.

30 **註**　求 $a+b$ 之方法，即於自然記法中，以 b 物一羣之元素逐步對照而加於 a 物之一羣。故 (1) 此方法最後之結果，爲 $a+b$ 物之一羣 (§ 8)，及 (2) 設 a 及 b 係有限基數，則 $a+b$ 亦然，參看 5 頁腳註.

因 $a+1$, $a+2$ 等等，表 a 以後之第一，第二等數，故連續數 $a+1$, $a+2$,……表記法中 a 以後之一切部分. 31

故 a 以後之任何已知數，可以形式 $a+d$ 表之，此處 d 表一定自然數.

演算. 用數法加大數，必致困難，故須記憶若干小數之和(加法表)，而應用下節說明所謂加法"定律"者，以導出大數之和. 32

加法定律. 加法爲"交換"及"結合"之演算；卽依下列二定律: 33

交換定律. $$a+b=b+a.$$ 34

加 b 於 a 與加 a 於 b 之結果相同.

結合定律. $$a+(b+c)=(a+b)+c.$$ 35

先加 c 於 b 再加所得之和於 a, 與先加 b 於 a 再加所得之和於 c, 其結果相同.

註 實際可以 $a+b+c$ 代式 $(a+b)+c$. 蓋吾人領悟式 $a+b+c+\cdots\cdots$ 表加 b 於 a, 再加 c 於所得之和等等之結果. 36

定律之證明. 吾人可證明此諸定律如下: 37

第一. 交換定律: $a+b=b+a$.

例如，$3+2$ 之和與 $2+3$ 相等.

因 $3+2$ 表自然記法中先數三數，再數二數；卽

所數之羣	1, 2, 3,	4, 5,	(a)
數號	1, 2, 3.	1, 2.	(b)

但於記號 (a) 及 (b) 之二羣間，爲一對一之關係，而每一對一之關係爲交互的 (§2), 故可互換 (a) 及 (b) 之工作；則設 (b) 爲所數之羣，則 (a) 表數號之羣.

故求 $3+2$ 等於數其記號羣 $\quad 1,\ 2,\ 3, \quad 1,\ 2.$ (b)

同理,求 $2+3$ 等於數其羣 $\quad 1,\ 2, \quad 1,\ 2,\ 3.$ (c)

但(b)及(c)由同記號而成,僅其記號之排列不同,故數法之結果相同(§ 27);即
$$3+2=2+3.$$
任何二自然數 a 及 b 仿此。

第二. 結合定律: $a+(b+c)=(a+b)+c.$

先於 a 以後數至第 b 記號,即至 $a+b$,而於其後再數至第 c 記號,即至 $(a+b)+c$,則已共計算 $b+c$ 個記號於 a 以後達到第 $(b+c)$ 記號,即至第 $a+(b+c)$.

基數之觀念包含於上述之證明中,但可舍此觀念而下加法之定義及建立其定律,如下列腳註以明之.*

---

*意大利數學家裴亞諾氏立自然數系不用基數之觀念,另用一種"公法"如以下所述者——其中之"數"均指"自然數".

1. 記號 1 爲一數.
2. 各數 a 後有一繼續數,——稱之爲 $a+$.
3. 此數 $a+$ 永不爲 1. 4. 設 $a+=b+$,則 $a=b$.
5. 每一已知數 a 在順序 $1,\ 1+,\ (1+)+,\cdots\cdots$ 中,諸數 $2,\ 3,\cdots$ 定之如下
$$2=1+,\ 3=2+,\cdots\cdots$$

和 $a+b$ 意謂由一串公式 $a+1=a+,\ a+2=(a+1)+,\cdots$ 所定之數(由 5 推出).上述一串公式,等於簡單公式

6. $a+(b+1)=(a+b)+1.$

由 6 用"數學歸納法",導出加法定律:

7. $a+(b+c)=(a+b)+c.$ 8. $a+b=b+a.$

第一. 設 $c=k$ 時 7 爲眞,則 $c=k+1$ 時亦眞,因由 6 及 7,
$$a+[b+(k+1)]=a+[(b+k)+1]=[a+(b+k)]+1$$
$$=[(a+b)+k]+1=(a+b)+(k+1).$$
但 $c=1$ 時由 6, 7 爲眞.

故當 $c=2$ 時 7 爲眞, $\therefore$ 當 $c=3$ 時,$\cdots\therefore c=$ 任何數時,則依 6 知 7 亦爲眞.

第二. 先證 8 之特殊情形: $8'.\ a+1=1+a.$

於 $a=k$,設 $8'$ 爲眞,則依 6 知 $(k+1)+1=(1+k)+1=1+(k+1).$

故於 $a=k$ 而 $8'$ 爲眞,則於 $a=k+1$ 亦爲眞.因 $8'$ 於 $a=1$ 爲眞,故於 $a=2$ 亦眞, $\therefore a=3\cdots\cdots$ 皆眞.

最後,設於 $b=k$ 而 8 爲眞,則於 $b=k+1$ 亦眞.由 7 及 $8'$.
$$a+(k+1)=(a+k)+1=1+(a+k)$$
$$=1+(k+a)=(1+k)+a=(k+1)+a.$$
因 $b=1$ 時 8 爲眞(由 $8'$),故於 $b=2$ 亦眞, $\therefore$ 於 $b=3,\cdots\cdots$ 皆眞.

參看史托耳氏及葛梅尼氏理論算術 13 頁及其後所引證裴亞諾氏之處;亦可參看罕亭吞氏在美國數學會之報告第 IX 編 40 頁,格拉斯曼氏(算術讀本)首先自 6 導出 7 及 8.