积 分 变 换

刘 鹏 程 编

西 北 电 讯 工 程 学 院

1 9 7 6

毛主席语录

斯大林曾经说过，脱离实际的理论是空洞的。空洞的理论是没有用的，不正确的，应该抛弃。

学制要缩短。课程设置要精简。教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

自力更生，艰苦奋斗，破除迷信，解放思想。

中国靠我们来建设，我们必须努力学习。

前　　言

本讲义是我院组织编写的专业数学的一部分，各部分编写提纲，是由数学教员和专业教员共同商定的，然后分头执笔编写。该部分内容并不是数学领域中积分变换的全部，而是通讯专业中常遇到的几种积分变换。

为适应教育革命的需要，使数学理论与专业内容做到有机的结合，从应用的角度出发，编写了这部分内容。它主要做为工农兵学员和有关专业教学人员的参考书。

编写中尽力遵循了伟大领袖毛主席所教导的理论联系实际的原则，绝大部分内容都是从实际出发，引出数学理论，而后，又应用数学理论去解决专业中的实际问题。书后并附有一定量的习题，可培养学生活用这部分内容的能力。

由于个人的政治思想水平和业务能力都很低，还不能完全冲破传统习惯的束缚，在对数学理论和专业内容的结合上做的是很不够的，希望工农兵学员和教员多提批评意见，今后共同努力，对这部分内容做更彻底的改革。

编写本讲义得到数学教研室大力协助。

编　者

目　录

第一章　拉氏变换

第二章　付氏变换

附　　录

第一章　拉氏变换

§1　拉氏变换的概念

一、拉氏变换的引入

线性电路常用线性微分方程来描述，线路分析则归结为解线性微分方程的问题。解简单线路的微分方程并不困难。但是，当输入信号或线路较复杂时，描述它们的微分方程也复杂起来，解微分方程变得十分困难。随着微分方程阶数的增加，计算上的困难也越来越大。实践上的困难，促使人们想办法解决。于是一些工程技术人员首先提出了拉氏变换的方法。当时还没有什么严密的理论根据。现在的一套理论都是后来逐渐发展的。

拉氏变换是一种运算方法，它能把微分方程化为代数方程，解决问题的手续大大简化了。这类似于在代数学里将过繁的乘除运算，通过对数的方法，化乘除为加减。后面讲到拉氏变换的微分性时，通过对微分方程的处理，就能看出这种优越性来。

二、拉氏变换的定义

拉氏变换的定义，应用到不同学科，有不同的物理解释。这里给拉氏变换下一个纯数学定义。用其解决电方面问题时，再说明电学对它的物理解释。

定义：设 t 的实函数 $f(t)$，在 $(0, \infty)$ 区间给出，用 e^{-st}乘$f(t)$后，再对t由0到∞进行积分。若此积分收敛，则

此积分确定了一个 S 的函数F(s)。叫 F(s)为f(t)的拉氏变换式。用下面记号表示。

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

f(t)是原函数,经过变换后所得的函数称为象函数。因此每个 f(t) 对应了一个确定的 F(s)。二者对应关系可用确定的对应记号 $\doteq$ 或 $\div$ 表示。即

$$f(t) \doteq F(s) \text{或} f(t) \div F(s)$$

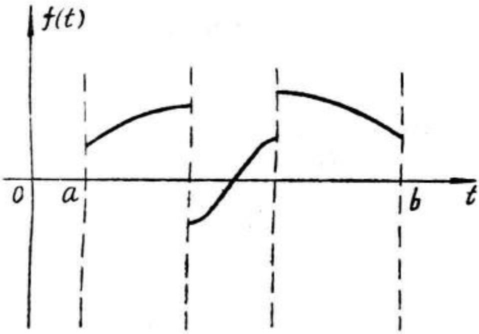
普通s 为一复数 ($s = \sigma + j\omega$)。这里我们假定它为实数。

三、拉氏变换的存在问题

在很多情况下，拉氏变换式不存在。譬如：函数f(t)在 (0, ∞) 区间上有无限次间断，或者 f(t) 是一个随时间而迅速增长的函数，虽然有衰减因子e^{-st}与其相乘，但因e^{-st}的衰减速度还抑制不住f(t)的增长速度，使积分无法收敛。因此，对拉氏变换的存在问题应进行讨论。在给出存在定理以前，先介绍下面两个概念。

i) 分段连续：若函数 f(t) 在某一区间 (a, b) 上，只能有有限个跳跃间断点，且f(t)在每相邻两个间断点之间是连续的。如下图所示：

ii) 指数级：若函数f(t)是随时间而增长的函数,则必有一个增长因素$e^{s_0 t}$,写成明显的函数形式为$f(t) = 0(e^{s_0 t})$。这种形式称为指数级。s_0是f(t)的增长指数,它随f(t)所表示的具体函数的不同而不同。为使拉氏变换式积分收敛，要求



分段连续图

$s>s_0$而对$s<s_0$积分不存在。$s>s_0$数值的全体称为f(t)的拉氏变换的收敛域。可以证明满足i)、ii)条件的函数，其拉氏积分就一定收敛。描述电路的时间函数，绝大多数是满足i)、ii)条件的。

定理：设函数f(t)：

①在$t\geq 0$的任何一个有限区间上分段连续。

② $t\to\infty$时是指数级的，即$f(t)=0(e^{s_0 t})$。

则 $$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \cdot \quad s>s_0$$ 存在。(证明从略)。

应着重说明，定理中给出的二个条件，是充分条件，而并非必要的。如无间断点的一类函数，其拉氏变换式显然存在。定理指出能进行拉氏变换的函数的范围特别宽广。

四、一些函数的拉氏变换

1．常数的拉氏变换：常数A是最简单的时间函数，电池电压在寿命以内可以认为是一个常数。

$$F(s)=\int_0^{\infty}Ae^{-st}dt=\frac{A}{-s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}=\frac{A}{s}$$

$$L(A)=\frac{A}{S}\qquad s>0$$

当$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\1 & t>0\end{cases}$时，称f(t)为单位阶跃函数。

令A＝1则得单位阶跃函数的拉氏变换。

$$L(1)=\frac{1}{s}\qquad s>0$$

2．指数函数的拉氏变换：振荡电路在激励信号断开后振荡振幅是随时间而做指数形衰减。即$f(t)=e^{-at}$。

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-(a+s)t}dt$$

$$=\frac{1}{s+a}\qquad s>a。$$

3．三角函数的拉氏变换：电路分析常用到正弦和余弦波的拉氏变换。

设 $f(t)=\sin\omega t$

$$L(\sin\omega t)=\int_0^{\infty}\sin\omega t e^{-st}dt$$

$$=\frac{e^{-st}(-S\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2} \qquad s>0$$

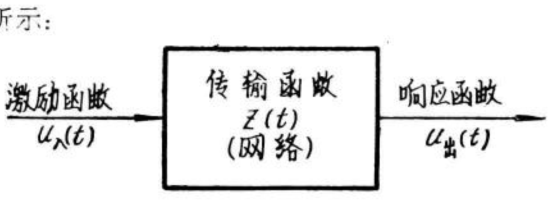
同理 $L(\cos\omega t)=\frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad s>0$

在今后的实际工作中，并不要求我们用求广义积分的办法，去寻求函数f(t)的拉氏变换式。而有现成的表可查，就如同三角函数表，对数表，积分表一样。今将原函数与象函数对,列表附后,以供查阅。表中略去收敛域。因为电路中绝大多数情况是满足需要的。

§2 拉氏变换的反演

由象函数求原函数叫做拉氏变换的反演。这一节通过分析实际问题的反演过程，掌握反演概念。

我们知道，网络的输入端加一输入信号（激励函数），而网络受激，在输出端产生一个输出信号(响应函数)。输出信号是输入信号与网络本身特性共同作用的结果。表示网络特性用传输函数。输入信号与输出信号常是电压形式出现。如下图所示:



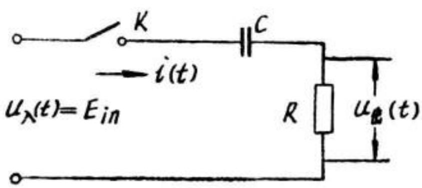
网络分析中，传输函数定义为响应函数与激励函数之比。即：

$$Z(t)=\frac{u_{出}(t)}{u_{入}(t)}$$

如果网络的传输函数已知，对给定的输入信号，而输出信号为：　　$u_{出}(t)=Z(t)u_{入}(t)$

如果网络复杂，则传输函数的表示式就复杂起来，而$u_{入}(t)$的表示式若含有微分、积分、三角……等项，采用微分方程求输出信号相当复杂，甚至不能求出。应用拉氏变换的方法，将表示式的各项变为代数形式，即由微积分运算变成代数的乘除运算，运算手续惊人地简化。解出的输出信号将为 s 的函数。再进行反变换即得到时间函数。结合具体问题，详细讨论反演过程如下：

例：



如图示RC电路，设$u_{入}(t)=E_{in}=$常数。开关K在$t=0$时闭合。$t<0$时电容器C上没有充电。试确定$u_{出}(t)$的表示式。

分析：令回路电流为$i(t)$，故$u_{出}(t)=R\cdot i(t)$。问题关键要确定$i(t)$。根据克希霍夫定律，电路总的压降，应等于外加电压。

$$U_{入}(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

该方程式的电压、电流为时间函数，通过查表变方程式各项为 s 的函数。

$$\left.\begin{array}{l} u_{入}(t) \longrightarrow \dfrac{E_{in}}{s} \\ Ri(t) \longrightarrow RI(s) \\ \dfrac{1}{C}\int i(t)dt \longrightarrow \dfrac{I(s)}{cs} \end{array}\right\} \text{代入上面方程得：}$$

$\dfrac{E_{in}}{s} = RI(s) + \dfrac{I(s)}{cs}$。由这个式子解出I(s)来，纯属代数运算，很容易做到。

$$I(s) = \frac{E_{in}}{s\left(R + \frac{1}{cs}\right)} = \frac{E_{in}}{R} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}.$$

I(s)表示式是$\dfrac{E_{in}}{R}$与含有 s的一项之乘积，之所以要变为这个形式，是为了含有 s 的一项符合表中所给出的形式。由表中查到：

$$\frac{1}{S + \frac{1}{RC}} \longrightarrow e^{-\frac{1}{RC}t}$$

则
$$\frac{E_{in}}{R} \cdot \frac{1}{S + \frac{1}{RC}} \longrightarrow \frac{E_{in}}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t)=\frac{E_{in}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}。$$

$$u_{出}(t)=i(t)\cdot R=R\cdot\frac{E_{in}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}=E_{in}e^{-\frac{t}{RC}}。$$

由这个题目的求解过程，可以看到，虽然含有积分运算，但采用了拉氏变换，避免了这种复杂运算，只有代数运算，整个求解过程基本上是在查表。

§3 拉氏变换的线性性质，有理分式函数的反演

一、线性性质

$$L[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)+\cdots+a_nf_n(t)]=a_1Lf_1(t)+a_2Lf_2(t)+\cdots+a_nLf_n(t)。$$

（该性质很容易根据定义证明，同学自理）

二、有理分式函数的反演（海氏反演）

我们之所以研究这种类型函数的反演，是因为集中参数网络，其传输函数可以写成有理分式的形式。分两种情况来讨论。

①设：
$$F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$$

给定：i) $p(s)$、$q(s)$皆为多项式。

ii) $p(s)$的方次小于$q(s)$的方次。

iii) $q(s)$的诸因子不重复。即：

$$q(s)=(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)\cdots(s-a_n)\cdots(s-a_m)。$$

对 $F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$做成m 个分式之合：

$$\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{c_1}{s-a_1}+\frac{c_2}{s-a_2}+\frac{c_3}{s-a_3}+\cdots+\frac{c_n}{s-a_n}+$$

$$\cdots+\frac{c_m}{s-a_m}。$$

由数学理论知道，满足等式的常数c_1，c_2，c_3，c_4，…$c_n \cdots c_m$是存在的。

设 $\phi(s)$ 为$\frac{p(s)}{q(s)}$的分母诸因子中抽去 $(s-a_n)$ 的因子所形成的新函数。则有：

$$\frac{\phi(s)}{s-a_n}=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{c_n}{s-a_n}+\left[\frac{c_1}{s-a_1}+\frac{c_2}{s-a_2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{c_m}{s-a_m}\right]=\frac{c_n}{s-a_n}+h(s)$$

两边同时用$(s-a_n)$乘，且令 $s \to a_n$ 可得：

$$\phi(a_n)=c_n$$

对应于m 个分式中，第 n 个分式，(即$\frac{c_n}{s-a_n}$的分式)的反函数为：$\phi(a_n)e^{a_n t}$。则有：

$$L^{-1}\left[\frac{p(s)}{q(s)}\right]=\sum_{n=1}^{m}\phi(a_n)e^{a_n t}$$

其中 $\phi(a_n)$为分式$\frac{p(s)}{q(s)}$的分母因子中，抽出 $(s-a_n)$ 因子后，在a_n点的数值。故我们归纳如下法则：

法则：F(s)是两个多项式的商。q(s) 的方次高于 p(s) 的方次

$(s-a_n)$ 是$q(s)=(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)\cdots$诸因子中任一个因子。在原函数$f(t)$中对应于 $(s-a_n)$ 项为：

$$\phi(a_n)e^{a_n t}$$

② 设：　　$F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$。

给定：i) $p(s)$，$q(s)$皆为多项式。

ii) $q(s)$的方次高于$p(s)$的方次。

iii) 分母多项式有r个相同的因子。即

$q(s)=(s-a)^r(s-b_1)(s-b_2)\cdots(s-b_m)$ 。

设函数 $\phi(s)=\frac{p(s)}{q(s)}(s-a)^r$，则 有：

$$F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{\phi(s)}{(s-a)^r}$$

将 $F(s)$表示成分式之合的形式：

$$\frac{\phi(s)}{(s-a)^r}=\frac{p(s)}{q(s)}=\left[\frac{A_r}{(s-a)^r}+\frac{A_{r-1}}{(s-a)^{r-1}}+\frac{A_{r-2}}{(s-a)^{r-2}}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{A_3}{(s-a)^3}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\frac{A_1}{(s-a)}\right]+h(s)$$

A_1，A_2，A_3，$\cdots A_{r-2}$，A_{r-1}，A_r是常数。$h(s)$是对应于$q(s)$中的 $(s-a)^r$以外的诸因子各分式之合。用 $(s-a)^r$乘上面等式两边，得：

$\phi(s)=[A_r+A_{r-1}(s-a)+A_{r-2}(s-a)^2+A_{r-3}(s-a)^3+\cdots+A_3(s-a)^{r-3}+A_2(s-a)^{r-2}+A_1(s-a)^{r-1}]+(s-a)^r h(s)$ 。

令$s=a$得：$A_r=\phi(a)$ 。

对两边施行（r－n）次导数，且令$s=a$可得第n个分式的待定系数A_n。即：

$$A_n=\frac{1}{(r-n)!}\phi^{r-n}(a)。$$

$\phi^{r-n}(a)$的右上角的（r－n）是表示的（r－n）次导数

故 $$\frac{p(s)}{q(s)}=\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{(r-n)!}\phi^{r-n}(a)\cdot\frac{1}{(s-a)^n}+h(s)。$$

进行拉氏反变换为：

$$L^{-1}F(s)=e^{at}\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{(r-n)!}\phi^{r-n}(a)\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+L^{-1}h(s)。$$

我们归纳如下法则：

法则：设$\phi(s)$是$\frac{p(s)}{q(s)}$的分母中抽出r个相同因子后的函数。

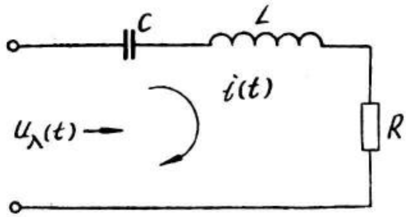
在$F(s)$的原函数$f(t)$中与$(s-a)^n$所对应的项为：

$$e^{at}\sum_{n=1}^{r}\frac{\phi^{r-n}(a)}{(r-n)}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

附录§3的运算阻抗应用举例是根据这里的海氏反演理论，这里不再举例说明。

§4 拉氏变换的微分性质及应用于解微分方程

电路分析中，电容器和电感器两端的电压用对电流的积分和微分表示。如下图：



根据克希霍夫定律有：

$$u_入(t)=i(t)R+\frac{1}{c}\int i(t)dt+L\frac{di(t)}{dt}。$$

若将上面时间域的函数变为 s 域的函数，就要遇到对微分和积分的拉氏变换。故下面讨论函数f(t)的微分性，下一节再讨论积分性。

一、拉氏变换的微分性质

设：$f(t)\geqslant 0$，且$Lf(t)=F(s)$。

利用分部积分法来讨论：

$$\int udv=uv-\int vdu。$$

令：$u=f(t)$，则有：$du=f'(t)dt$

$dv=e^{-st}dt$，则有：$v=\frac{-e^{-st}}{s}$ 。

$$F(s)=\int_0^\infty udv=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=uv\Big|_0^\infty-\int_0^\infty vdu$$

$$=f(t)\cdot\frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{-e^{-st}}{s}f'(t)dt$$