

# 几何计算

何援军



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

# 几何计算

Jihe Jisuan

何援军



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容简介

本书讨论几何计算(geometric computing),其主体是几何,要解决的对象是几何的定义、构造、度量、变换与关系处理。几何计算在计算机图形学、计算机辅助设计与制造、计算几何以及图像处理等领域均有应用。

本书全面阐述一个基于“几何问题几何化”的几何计算理论体系与实施框架。全书分成导论、数学基础、几何基础、几何变换、二维几何、二维计算、三维几何、三维计算、二维造型、三维造型和曲线曲面等11章及算法索引、应用指南两个附录。

本书详细给出了二维、三维几何计算中300余个算法的原理与理论。以算法的形式去描述几何问题解,可能是提供从理论到实践的最佳解决方案。编制一个完整的代码并实现它,是对理论和算法认知的最高境界。本书提供大量这样的代码,使读者能更容易理解那些经典算法的原理并直接应用它们。

本书可作为高等学校几何设计与计算、计算机图形学、CAD等课程的教材或教学参考书,凡从事与几何数据的获取、表示、处理和分析相关的工程技术人员等都可直接使用本书提供的算法。

## 图书在版编目(CIP)数据

几何计算/何援军著. -- 北京:高等教育出版社, 2013.3  
ISBN 978-7-04-035502-4

I. ①几… II. ①何… III. ①计算图形学-研究生-教材 IV. ①O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第236982号

策划编辑 李文婷      责任编辑 李文婷      封面设计 张申申      版式设计 余杨  
责任校对 胡晓琪      责任印制 田甜

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印 刷 北京铭成印刷有限公司  
开 本 787 mm × 1092 mm 1/16  
印 张 22.5  
字 数 550千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landraco.com>  
<http://www.landraco.com.cn>  
版 次 2013年3月第1版  
印 次 2013年3月第1次印刷  
定 价 35.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 35502-00

# 前言

在人类的社会进步、经济建设和科技发展过程中，“计算”始终都扮演着非常重要的角色，几何计算(geometric computing)是其中之一。

本书讨论的就是几何计算，其主体是几何，要解决的对象是几何的定义、构造、度量、变换与关系处理。几何计算在计算机图形学、计算机辅助设计与制造、计算几何以及医学图像处理等领域均有广泛的应用。

但是，在如何进行几何计算这一命题上，却似乎陷入了一个已经延续了几个世纪的大争论之中<sup>[1-10]</sup>。几何与代数，作为数学的两个基本组成部分(数学的三大核心领域除了几何学、代数学外，还有分析学)，原本分别考虑“形”和“数”的问题，理论上应该各占半壁江山。然而，在历史上并不是这样，两者并不平衡。在笛卡儿把代数中形式化符号体系的表示方法引进到几何学之后，在他的“一切问题可以化为数学问题，一切数学问题可以化为代数问题，一切代数问题可以化为代数方程求解问题”<sup>[5-6]</sup>思想的统治下，代数几乎取代了经典几何的地位，几何走的基本上是“几何代数化”之路。这无意地掩盖了几何的自然属性，缩小了几何的作用范围，减弱了人类直觉这个最有力的武器。

历史是如此的混沌，本来几何研究“形”，代数研究“数”，画法几何是几何的一个分支。但是，数百年来几何走的是代数化道路，走到了极致，而画法几何走的是几何化道路，恰仿佛走到了尽头，阴差阳错。想这混沌世界，“空间”与“时间”而已，似乎只有“形”与“数”才能厘清。

这，就是本书撰写过程中的一些困惑。

实际上，数十年来我对这个问题的探索、研究和实践从未停止过。

20世纪70年代初，我负责当时国内第一台引进的大型数控绘图机的软件接收工作，由此开始了与计算机绘图及其后续科学研究的漫长科研路，从事CAD、计算机图形学的理论与软件系统的开发工作40余年。前30年基本上是从从事科学研究与工程应用工作，后10年在高校兼顾教学，在高校任教的后5年更专注于教学研究与教材的撰写。所有这些工作，可以说都是在形成和完善关于几何计算的理论与算法思想。

1974年，在我的手中用机器自动绘出了我国第一条以圆弧(含直线)描述的船体型线图，为数学船体线型数学放样提供了坚实的实践平台<sup>[51]</sup>，也为“计算几何”学科的形成提供了一定的支撑。

1980年开始的消隐算法研究是我首次在几何计算中引入几何的方向性概念，这不仅便于在计算机中对三维物体进行描述，更主要的是将国内当时对隐藏线原理的研究扩展到对消隐场景的规模性及消隐计算效率的探索上，最终将消隐计算归结为一维交集计算<sup>[45-46]</sup>。

1983年起我从几何的观点，采用对几何引入方向的方法，简单、完整、稳定地构建了点、直线、圆弧等二维基本几何元素的定义与相贯计算体系<sup>[44]</sup>，它们作为我研制的KerenCAD系

统的基础平台<sup>[32-50]</sup>，曾被列入“七五”、“八五”和“九五”期间全国规模的CAD推广计划中，也作为我第一本专著《计算机图形学算法与实践》<sup>[23]</sup>的主要内容，被当时的CAD软件开发者与CAD/CG方向的研究生产为应用。

21世纪初，我在撰写《计算机图形学》一书时，发现一些工程制图教材中关于“投影”及“投影变换”的一些说法过于强调矩阵化的描述，并出现了一些错误。例如，认为投影矩阵就是将齐次变换矩阵的某一列(行)强制置为零，而没有考虑这其实还导致了在三维处理中失去了深度坐标，损失了约1/3的有效信息，这就是被“几何代数化”误导的结果，也是将几何问题教条性地代数化的一个典型。其实，从几何的角度看，取点的3个坐标中的某2个坐标就是将点向坐标平面进行投射，并不需要作所谓的投影变换。2005年专门为此发表了3篇文章，系统地阐述了这些问题<sup>[29-31]</sup>。在这3篇文章中，还同时提出了“图形变换几何化表示”的观点，将图形变换与基本几何统一起来，给出了“向空间任意面投影”的简单方法。

2006年1月，我撰写的《计算机图形学》教材出版<sup>[20]</sup>。由于具有较好的科研基础及较多的工作积累，该教材被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材并被评为“2007年度普通高等教育精品教材”。2008年起，我对国内外计算机图形学教材重新进行了全面的考察，经过比较长时间的思考后，在上海交通大学学报上发表了《论计算机图形学的若干问题》<sup>[28]</sup>的文章，提出了“计算机图形学=几何+绘制”的观点，将几何与几何计算提到了相当的高度，明晰了它们在计算机图形学中的作用与地位，并以此架构修订了《计算机图形学》教材，于2009年2月出版发行第二版<sup>[21]</sup>，这是我对几何计算认识的一次质的飞跃。

在长期的科学探索与工程实践中，我越来越体会到从几何的角度审视几何问题的好处和乐趣，“几何解题是十分有吸引力的智力活动之一。图形的直观简明，推理的曲折严谨，思路的新颖巧妙，常给人以科学美的享受。”<sup>[15]</sup>几何问题几何化的思想也逐渐有了一个比较清晰的框架。2010年与2012年，先后在上海交通大学学报上发表了《几何计算及其理论研究》<sup>[25]</sup>与《对几何计算的一些思考》<sup>[24]</sup>两篇文章，系统阐述了我对几何问题几何化的一些考虑。“几何问题几何化及计算稳定性研究(61073086)”也被列入国家自然科学基金的资助项目，本书的出版也作为该项目的预期研究结果之一。

审视数百年来几何代数化之路，认为这无意中削弱了几何的作用范围，掩盖了几何的自然属性。一般地，几何涉及的是空间问题。几何从空间概念形象地审视问题，长处在于强调几何学本质的根源及其在空间中的直观性。人们努力将一些问题归结为几何形式，因为这样可以使使用人的直觉，直觉是人类最有力的武器。代数涉及的是符号的操作，长处在于统一与一般化。它线性、有序地处理问题，像一个个算式的依次运算。在将几何问题转化为代数计算时，本质上会不再思考其含义，不再用几何的观念去考虑问题。这种代数计算需要依靠复杂的多项式的展开和整合技术，计算并不带有几何意义。使用代数化计算进行几何推理时，这个缺陷更为明显，它产生的正确性往往值得怀疑。

本书无意否定几何代数化，但几何及几何计算是不应该全部被代数化的，应该顺其自然，回归几何，回归“形”与“数”，几何问题几何化，去寻求“从定性、直观的角度去思考，以定量、有序的方式去求解”——“定性思考、定量求解”的几何计算的理论和方法，达到“‘形’思考、‘数’计算”，复杂问题简单化的境界。这就是本书讨论几何计算的认识基础。对数学以及几何(含画法几何)、代数之历史的通读升华了我对几何计算的认识，也使得本书

的框架更加清晰。

应该看到,在查找算法资源,评价其适用性、有效性和正确性,以及将它们改编以适应自己的需求等方面所花费的时间可能远远超过在其他任务上所用的时间。为此,本书以大量算法去描述几何问题的解,提供了一个较好的从理论到实践的解决方案。编制一个完整的代码并实现它,可能是对理论和算法认知的最高境界。本书提供了大量这样的代码,使读者能更容易理解那些经典算法的原理并直接应用它们。著名的计算机软件和理论学家、图灵奖(turing award)得主 C. A. R. Hoare (Tony Hoare) 曾经说过<sup>[18]</sup>: “There are two ways of constructing a software design, one way is to make it so simple that there are obviously no deficiencies; the other is to make it so complicated that there are no obvious deficiencies.” (有两种方式构建软件设计,一种是把软件做得很简单以至于明显没有缺陷,另一种是把它做得很复杂以至于没有明显缺陷)。天下大事,必作于细;天下难事,必成于易。读者将会看到,“简单”是本书所提供算法的一个鲜明特点。当你读懂它们,理解这短短的代码里承载了如此巧妙的思想时,你会发现你所花时间的回报是巨大的。

在本书的撰写过程中,网上的资源提供了许多信息,特别是数学史方面。代数的时间属性与几何的空间属性代表了数学中两种不同的观念,构成了数学王国互相垂直的两个方面。因此过去数学家之间关于代数和几何相对重要性的争论或者对话代表了某些非常基本的东西。沉浸于几何与代数发展的百年历史长河中,体验从几何为主到几何代数化的微妙转变,与诸多大家——牛顿、莱布尼兹、笛卡儿、霍金“对话”,令人十分陶醉。有时,情不自禁地也会作一番站队——我是几何学家,还是代数学家,或者愿意成为一个代数学家还是一个几何学家?最后的选择当然还是宁愿两者都是,即以几何学家的思路去考虑问题——宏观而缜密,以代数学家的方式去解决问题——严格而有序,在几何的框架下,按照代数方式有序地求解问题。

本书全面阐述了一个基于“几何问题几何化”的几何计算理论体系与实施框架,全书分成导论、数学基础、几何基础、几何变换、二维几何、二维计算、三维几何、三维计算、二维造型、三维造型和曲线曲面等11章与算法索引、应用指南两个附录,给出了二维和三维几何定义、度量及相互关系处理等几何计算的300余个算法的理论及原理,大部分算法提供了源代码。

本书可作为几何设计与计算、计算机图形学、CAD等课程的教材与教学参考书,凡从事与几何信息的获取、表示、处理和分析相关的研究人员及工程设计人员等都可直接使用本书提供的算法。

本书的一些观点与内容曾在 CADDM、ChinaGraph、ChinaGraphics、机械类课程报告论坛、国际几何与图学会议、上海交通大学-大阪大学学术研讨会等国内外学术活动中作过演讲,与同行们作了不少的交流。以“几何计算”的方式阐述几何算法还是首次,书中不当之处,希望读者不吝指正。

本书得到国家自然科学基金项目“几何问题几何化及计算稳定性研究(61073086,2011—2013)”及上海交通大学985项目“985工程三期研究生课程体系建设项目(TS0220303011)”的资助。

何援军

2012年6月5日

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 目 录

<b>第 1 章 导论</b> .....	1	6.1 判断计算 .....	150
1.1 认识几何计算 .....	1	6.2 几何裁剪 .....	159
1.2 几何计算的基础 .....	5	6.3 几何度量 .....	173
1.3 几何问题几何化 .....	10	6.4 包围盒(圆、球、体) .....	181
1.4 几何计算的理论框架 .....	18	6.5 多边形的三角化 .....	192
1.5 本书的任务 .....	19	<b>第 7 章 三维几何</b> .....	199
1.6 参数约定 .....	21	7.1 点与向量 .....	199
1.7 数据结构 .....	23	7.2 空间直线 .....	200
<b>第 2 章 数学基础</b> .....	27	7.3 平面 .....	203
2.1 空间点与向量 .....	27	7.4 三维基本计算 .....	206
2.2 矩阵 .....	33	7.5 三维几何度量 .....	208
2.3 工具函数 .....	34	<b>第 8 章 三维计算</b> .....	215
<b>第 3 章 几何基础</b> .....	38	8.1 三维判断计算 .....	215
3.1 基本几何元素的表述 .....	38	8.2 三维相交计算 .....	226
3.2 几何数 .....	43	8.3 三维裁剪 .....	235
3.3 基于几何数的几何奇异处理 .....	51	8.4 三维包围盒 .....	240
<b>第 4 章 几何变换</b> .....	55	<b>第 9 章 二维造型</b> .....	242
4.1 几何变换的理论基础 .....	55	9.1 二维布尔运算 .....	242
4.2 变换的几何化表示 .....	61	9.2 变形造型 .....	250
4.3 二维变换 .....	63	9.3 尺规作图 .....	252
4.4 三维变换 .....	70	<b>第 10 章 三维造型</b> .....	274
4.5 轴测变换 .....	80	10.1 物体描述 .....	274
4.6 透视变换 .....	85	10.2 平行扫掠造型 .....	278
4.7 罗盘变换 .....	95	10.3 旋转扫掠造型 .....	284
4.8 视图变换 .....	97	10.4 场景装配 .....	290
<b>第 5 章 二维几何</b> .....	106	<b>第 11 章 曲线曲面</b> .....	294
5.1 点的建立 .....	106	11.1 样条曲线拟合 .....	295
5.2 直线的建立 .....	126	11.2 双圆弧逼近 .....	304
5.3 圆和圆弧的建立 .....	134	11.3 圆的直线逼近 .....	308
<b>第 6 章 二维计算</b> .....	150	11.4 Bézier 曲线 .....	310



11.5	Bézier 曲面 .....	317	附录 A	算法索引 .....	326
11.6	B-Spline 曲线 .....	318	附录 B	应用指南 .....	337
11.7	B 样条曲面 .....	322	参考文献	.....	346
11.8	曲面的三角化表示 .....	324	科研支撑	.....	350

在人类的社会进步、经济建设和科技发展过程中，“计算”始终都扮演着非常重要的角色。人类的计算能力与计算工具密切相关，计算机的出现大大提高了人类的计算能力，也促进了科学技术的迅猛发展。“X 计算”已是计算机广为应用的一个概念，例如科学计算、网格计算、平行计算、脑计算、生物计算、语言计算、智能计算、云计算、DNA 计算等，几何计算 (geometric computing) 是其中之一。

几何计算是科学与工程计算的基础与支撑，在计算机图形学、计算机辅助设计与制造、计算几何以及医学图像处理、建筑设计、运动学与机器人等领域均有重要作用与应用。

本章讨论几何计算的一些基本问题，给出它的定位与定义，指出它的主要问题，对几何计算的科学与工程基础进行梳理；审视了延续几个世纪的关于几何与代数的大讨论，分析几何代数化带来的一些问题，从人类认知的角度探索几何问题几何化之路；阐述几何与画法几何的共性问题，讨论画法几何理论在几何计算中的作用；从构造的角度阐述几何奇异的几何本质，认识几何奇异的根本性，提高几何计算的正确性；引入“几何基”与“几何数”，构筑一个几何问题几何化的框架，建立几何计算的基础理论与实施方法。

## 1.1 认识几何计算

### 1.1.1 定位与定义

社会已进入一个数字化时代，这个时代是“图形/图像时代”，它的主要认知方式是视觉形象方式。这是一种全球化的联络模式，语言的阻隔被打破，文字的垄断被消解。传统文学借助于文本对人世的间接性和想象性体会与感悟，转变为借助于图形/图像对现实的记录、展示和消费。“虚拟空间”介入了现实空间，成为对现实的演绎、复制和扭曲。它改变了文化活动的样式，传统的文化活动主要借助于语言、文字和表演，图形/图像的应用则表现在社会生活和生产的各个领域、各个层面上。

科学与工程计算常基于模型，我们看到的各种光彩的图形/图像都是由各种模型支撑的，实体模型、表面模型、点模型等。而模型又是由各种几何构造的，点、直线、曲线、平面、曲面等。因此模型的本质是几何，没有几何，图形/图像将是无本之木，所谓的像素、光照、阴影等皆无意义。几何精度的提升对图形/图像质量的贡献远比其他层面的努力明显得多。

几何的定义、构造、度量、显示以及相关处理(几何相交、几何碰撞、几何分析等)就是几何计算。与数字计算是以“数字”作为计算对象不同，几何计算以各种“几何”作为计算对象，研究基于“几何(元)”计算的理论与方法。

几何计算是科学与工程计算的基础与支撑，涉及计算机应用的各个方面，例如 CAD/

CAE——造型、仿真、碰撞检测等；计算机图形学——求交、裁剪、光照模型、造型和绘制等；计算几何——曲线/曲面生成与求交等；地理信息系统——区域搜索、最近邻居等。几何计算也是科学可视化、计算机视觉、仿真与模拟、虚拟现实、运动学、动画、医学图像处理、细胞生物学、建筑设计等的冲突检测与模式匹配等诸多方面的基础问题之一。

与几何计算有关的学科与理论始于20世纪70年代中期，名为“计算几何(computational geometry)”，主要讨论几何问题的算法设计与分析，有些问题已经获得了很好的结果，但还有很多问题有待解决。

国内的计算几何理论一般基于数学家苏步青教授于1981年所著的《计算几何》<sup>[1]</sup>中的概念与理论。1981年1月，苏先生等的《计算几何》专著出版，定位于“对直到1980年，国际上关于计算几何中的理论、方法和应用的综合介绍，也包括了苏老等的研究成果”<sup>①</sup>。当时计算几何在美国通常被称为计算机辅助几何设计(computer aided geometric design, CAGD)，专门研究“几何图形信息(曲面和三维实体)的计算机表示、分析、修改和综合”。因此，计算几何是在计算机大量普及的情况下对几何的一种新的需求，是对计算与计算机的一种新的适应，像计算数学一样，更偏重于学科层面。该书的另一成果是将当时国内在船舶、航空等行业大规模实施的关于数学放样及曲线、曲面光顺性理论的研究上升到计算几何的学科层面，而专著的内容本身则偏重于几何的创建(主要是曲线曲面)，弱于几何的处理。

文献[2]比较系统地讨论了几何计算的理论，总结并提供了大量的几何算法，只是它采用的方法似乎过于复杂，算法也只涉及常规处理，没有提及算法的正确性问题。

文献[3]“属于欧几里得的几何构造，即由算法和复杂性分析所组成”。突出Shamos定义的几何计算中研究的几何问题的算法与复杂性理论，如欧几里得货郎担问题、最小生成树问题等。该书较好地提及了算法在理论状态下的正确性。

文献[21,24,25]阐述了几何计算的定位与作用，强调了计算的复杂性与正确性问题。

在应用层面，几何计算有更宽泛的含义，被更多的人所提及。表1.1.1列出了几何计算在计算机图形学中的一些应用<sup>[19-51]</sup>。

表 1.1.1 几何计算在计算机图形学中的作用

计算机图形学的内容	几何计算	其他理论与方法
图形变换	仿射几何、投影	代数
光栅化	几何插值	显示
图形裁剪	几何求交	编码技术
基本几何的相交、相切计算	几何求交	几何
二、三维几何造型	几何求交、线面方程	拓扑、数据结构
隐藏线消除	几何求交、线面方程	变换、显示
光照模型	法向计算、几何插值	颜色、光学等
透明效果	法向计算、几何插值	颜色、光学等

① 作者语。

续表

计算机图形学的内容	几何计算	其他理论与方法
阴影显示	几何求交	颜色、显示等
纹理映射	几何求交、几何插值	颜色、显示等
交互设计	几何求交、参数方程	人机界面、交互技术
曲线、曲面	计算几何理论	微分几何等
动画	运动轨迹、几何插值	变换、物理(运动轨迹)

### 1.1.2 关键问题

计算的复杂性与稳定性是几何计算的两个关键问题。一种计算方法的提出，一个算法的设计，首先要考虑的因素是较低的计算复杂性、较高的计算稳定性，然后考虑易读性、可交流性等伴随要求。

**计算复杂性**包括空间复杂性和时间复杂性。

**空间复杂性**系指存储量的问题。工程上，如果要画一条船的网状立体图，将船的纵向进行 207 等分、高度方向进行 30 等分，那么网格点数就达  $207 \times 30 \times 2 = 12\,420$  个，仅几何信息所需的数据存储量就达  $12\,420 \times 3 \times 4 \text{ bytes} = 149\,040 \text{ bytes}$ 。图 1.1.1 给出了一些用三角面片表示曲面的例子。在实际应用中，比这复杂的例子很多。



图 1.1.1 用三角面片表示的曲面

**时间复杂性**则是指计算工作量，或计算的复杂度，常以计算(记录)个数  $n$  表述，例如  $O(n^3)$ 、 $O(n^2)$ 、 $O(n)$ 、 $O(\log_2 n)$  等。将计算个数降低一级将是巨大的成功，通常  $O(n)$  与  $O(\log_2 n)$  的降级是追求的目标。因此，降维是降低计算复杂度的指标和目标。

一般从量与质两个方面去降低计算的复杂度，或者减少计算对象的数目，或者降低参与计算对象的复杂度。

可采用一些预处理方法使主计算(如相交计算)限定在“最小”的范围内进行。所谓的最小最大判别原理就是先以较小的代价迅速剔除那些不可能有主计算的几何实体的一种拒绝判定，以减少计算对象的数目。对于相交的情况，则是找到关于交点数目上限的一个好的估计值以及对交点的可能位置的好的初始逼近等。

设法将几何分割成简单的形状就可以降低参与计算对象的复杂度，如将任意非凸多边形分割成凸多边形。因为对于  $n$  条边的多边形一般可以用  $O(n)$  的时间解决，而对于两个任意非凸多边形，就要花  $O(n^2)$  的时间，可能形成达  $n^2/4$  个不相叠的凸多边形。三角形是最简单的凸多边形，曲面、有限元分析中的几何常被三角化。

随着计算机硬件性能的飞速发展，在某种程度上来说降低时间复杂性的需求比降低空间复杂性的需求更广一些。因此，人们将大部分努力都花在降低时间复杂性上，因为一个不大的  $n$  就可能造成计算的失败。

计算稳定性问题是一个长期的难题，其本质是计算正(准)确性问题。即使在一些已被广泛使用的大型应用系统中，也存在几何引擎的稳定性问题。这里有理论问题，也有实施问题。

例如，长期以来我国市场上流行的三维 CAD 软件底层核心大都基于 ACIS、ParaSolid 等几何引擎。但是，即使在大型应用系统中，由几何奇异引起的几何引擎的稳定性问题也并未解决。图 1.1.2 和图 1.1.3 所示两个例子表面上是显示及  $z$  缓冲冲突等引起的，但其本质上是由几何造型系统底层核心的稳定性问题引起，即依赖于几何计算的鲁棒性。

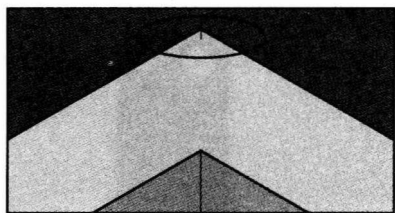


图 1.1.2 高亮显示的边穿透了面，这是不希望看到的

(摘自 Autodesk 公司 2008 年 12 月的技术文档)

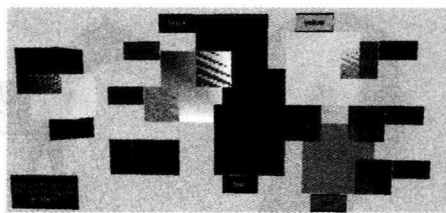


图 1.1.3 缓冲冲突导致的不良现象

(<http://en.wikipedia.org/wiki/Z-fighting>)

导致几何计算不稳定主要有两个原因，即由数字计算误差引起或由几何本身原因引起。

如图 1.1.4 所示，设有半径  $R = 70$  的圆柱体，用 30 等份的多面体逼近，若通过点 1、2、3 求取该圆柱顶面的方程系数(这在理论上是对的)，并用此平面方程系数去计算点 A 到该顶面的距离，结果将为  $1.2569430E - 3$ 。若设几何误差  $\varepsilon = 1.0E - 5$ (这已经很精确了)，将得到点 A “不在该圆柱顶面上”的结论，这显然是错的。问题的原因很简单，点 1、2、3 很接近，因此以此 3 点求取的平面方程系数不准确。这种不稳定常被认为是由计算机采用约翰·冯·诺依曼(John Von Neumann, 1903—1957)<sup>[17]</sup> 的用二进制数制表示浮点数所引起的，经过大量的浮点运算使对所得结果的有效数字难以作出有效、精确的判断。其实，用任何有限数制近似表示浮点数都会有误差，这是导致几何计算稳定性，特别是检测层次稳定性降低的一个重要原因。属于数字计算引起的不稳定，主要体现在实施方法层面。

图 1.1.5 显示了两个图形边界(其中一个图形为用细线绘制的矩形)的位置关系，两图中

所有的交点(空心圆点)均为奇异交点, 由于几何间的重叠(共点、共线、共面等), 对这两个图形进行布尔运算时边界走向会不确定。这属于几何本身原因的不稳定, 主要体现在科学理论层面。

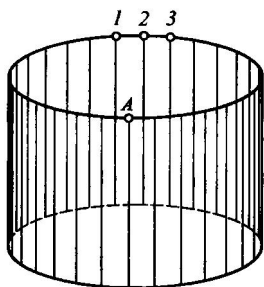


图 1.1.4 数字计算误差引起的问题

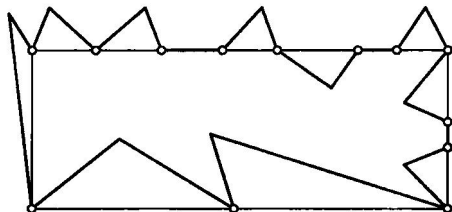


图 1.1.5 几何奇异引起的问题(空心圆点均为奇异点)

降低计算复杂性与提升计算稳定性是空间几何计算的关键问题, 对空间几何直接降维是降低几何复杂度的首选方法, 这在表面上就将  $O(n^3)$  复杂度降为  $O(n^2)$  复杂度了。如果能将空间几何下降到平面进行描述, 对几何本身的描述“降维”了, 解决几何问题的复杂性也“降维”了。而且, 由于几何奇异问题也被转化到二维平面上, 难度一般也会降低, 这有助于提升计算的稳定性。

需要有一个简洁、统一的理论支持因计算机数字计算误差及几何位置的奇异两者引起的几何计算的不稳定性问题。

## 1.2 几何计算的基础

通常认为几何计算的基础是数学, 其实, 人类的计算能力与计算工具密切相关。数学是研究现实世界“数”与“形”的科学。几何是研究形的学科, 代数是研究数的学科, 画法几何也是研究形的学科。数百年来, 几何主要走的是代数化之路, 而画法几何走的是几何化之路。本书将回归“形”与“数”, 回归几何, 淡化代数运算, 也利用画法几何“以平面上的‘形’去解读三维空间”的基本方法, 并综合几何(含画法几何)、代数及计算机科学等的优势, 在“从定性、直观的角度去思考, 以定量、有序的方式去求解”的思想指导下, 达到“‘形’思考、‘数’计算”的境界, 实现“定性规划、定量求解”, 用最成熟的理论、最简单的工具实现几何计算, 使复杂问题简单化。

### 1.2.1 几何与代数

几何和代数是数学的两个支柱, 都有悠久的历史。几何学可以追溯到古希腊甚至更早的时期, 代数学则源于古阿拉伯人和古印度人。

“几何”的西文名称是 geometria, 源于古希腊大数学家欧几里得(Euclid)的巨著《几何原本(Elements)》<sup>[4]</sup>。《几何原本》是古希腊数学家欧几里得的一部不朽之作, 是世界数学史上影响最为久远、最大的一部数学教科书, 集整个古希腊数学的成果和精神于一书。它既是数学巨著又是哲学巨著, 并且第一次完成了人类对空间的认识。除《圣经》之外, 没有任何其他著作,

其研究、使用和传播之广泛能够与《几何原本》相比。

1607年,明末科学家徐光启(1562—1633)和意大利传教士利玛窦(R. Matteo, 1552—1610)在《几何原本》的译本中确定了这一学科的中文名称为“几何”<sup>[4-6]</sup>。后人对他们这个翻译的解释是:取“geo”的音为“几何”,而“几何”二字中文原意又有“衡量大小”的意思。所以用“几何”译“geometria”(英文 geometry),音义兼顾,被后人称为神来之笔,推崇备至。也存在着另一种译名“形学”,如狄考文、邹立文、刘永锡编译的《形学备旨》。

在《几何原本》里,欧几里得将人们公认的一些事实列成定义和公理,以形式逻辑的方法,用这些定义和公理来研究各种几何图形的性质,从而建立了一套从定义、公理出发,论证命题得到定理的几何学论证方法,形成了一个严密的逻辑体系——几何学。

直到笛卡儿在我们现在称为的笛卡儿平面中引入代数坐标之前,它一直是纯几何的。

“代数”的西文名称为 algebra,来源于9世纪阿拉伯数学家阿尔·花拉子米的重要著作的名称。该著作名为“ilm al-jabr wa'l muqabalah”,原意是“还原与对消的科学”。这本书传到欧洲后,简译为 algebra。清初曾传入中国两卷无作者的代数学书,被译为《阿尔热巴拉新法》。清代数学家李善兰(1811—1882)和英国人韦列亚力改译为《代数学》(李善兰译,1853)。

初等代数是算术的继续和推广,对全部的初等代数有十条规则,包括五条基本运算律(加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、分配律)、两条等式基本性质(等式两边同时加上一个数,等式不变;等式两边同时乘以一个非零的数,等式不变)和三条指数律(同底数幂相乘,底数不变、指数相加;指数的乘方,底数不变,指数相乘;积的乘方等于乘方的积)。

17—18世纪中期,代数学被理解为在代数符号上进行计算的科学,用来研究与解方程有关的问题。自19世纪初,群论、代数数论和线性代数等几方面的工作引起代数学的变革并最终导致抽象代数学产生。到19世纪末,代数学从方程理论转向代数运算的研究。

中国古代在代数学方面有光辉的成就。在古代数学名著《九章算术》(公元1世纪)中,记载了用算筹解一次联立方程组的一般方法。在所采用的“正负术”中给出了负数的概念,建立了正、负数的运算法则。中国古代把开各次方和解二次以上的方程统称为“开方”。

宇宙,一切空间和时间的综合。宇是空间,宙是时间,合为宇宙。几何涉及的是空间问题,代数涉及的是时间的操作。

### 1.2.2 画法几何

在几何的大家族中,有一个不为人注意的分支——画法几何(投影几何)<sup>[7-9]</sup>。

早在1103年,中国宋代李诫所著《营造法式》中的建筑图基本上符合几何规则,但在当时尚未形成画法的理论。

在画家的写生过程中,物体的长度与角度已被扭曲,可是仍常可在画布上看出各物体间的相对位置、原物的几何结构。这主要是因为存在一个“在射影下不变的”几何性质,这些性质在像上仍然不变,因而我们能认识原物。投影几何学的原始动机是帮助画家,它发展的目的就是发现并解析这些不变性。

白马非马,现在似乎没有人将画法几何列入几何的范畴。其实,画法几何研究的基本对象也是几何,也是研究形的科学。17世纪一些几何学家将它的方法与结论视为欧几里得几何学的一部分,直到1799年法国几何学家加斯帕·蒙日(Gaspard Monge, 1746—1818)非数学地阐

述了投影理论,使画法几何(descriptive geometry)成为一门独立学科。19世纪更发展出投影几何(projective geometry),使这些方法与结论被发展为另一支几何学,它的结论与所用的方法更偏重于几何化。但是那时流行的是“以代数方法处理几何问题,即坐标几何”,真正的几何则偏重于解析方法。而投影几何是以综合法得到一些定性的关系,所以在对代数与微积分的偏爱下投影几何失宠。因此还原历史,应该回归画法几何的几何学地位。

画法几何以“正投影”理论为基础,通过投影将空间物体转换成平面图形,引导人们在平面上去虚构三维物体,解读三维空间。维数的降低将导致信息的缺失,因而需要多个视图表述三维物体,引发“2D/3D对应”理论的出现,它是将视图“还原”成三维物体的理论基础。三维问题转化为平面问题以后,基本上只要考虑平面图形的点、线、弧(圆)等基本几何元素,因此导致“尺规作图”理论的诞生,即由几种基本的作图方法即可作出大部分平面图形。

采用画法几何的尺规作图方法只需几种基本作图方法就可完成平面上一类图形的作图。下面给出利用尺规作图理论作图的例子。

**例 1.2.1** 已知3条平行直线 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ ,求作正 $\triangle ABC$ ,使3个顶点分别落在3条平行线上。

[作法一(图 1.2.1a)] ①在 $L_1$ 上任取一点 $D$ 作为顶点,作正三角形 $\triangle DBE$ ,使点 $B$ 、 $E$ 落在 $L_2$ 上(图中虚线为正三角形简易作法);②作过点 $D$ 、 $E$ 的直线交 $L_3$ 于点 $C$ ;③以点 $B$ 为圆心、 $BC$ 为半径作弧交 $L_1$ 于点 $A$ ,连接点 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 成 $\triangle ABC$ 。

[作法二(图 1.2.1b)] ①在 $L_2$ 上任取一点 $B$ 作3条平行线的公垂线交 $L_1$ 于点 $E$ ,交 $L_3$ 于点 $D$ ;②作线段 $EB$ 的垂直平分线 $L_4$ ;③过点 $D$ 作直线 $DG$ 使 $\angle EDG = 30^\circ$ ,并交 $L_4$ 于点 $G$ ;④过点 $B$ 、 $G$ 作直线交 $L_1$ 于点 $A$ ;⑤以点 $B$ 为圆心、 $BA$ 为半径作弧交 $L_3$ 于点 $C$ ,连接点 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 成 $\triangle ABC$ 。

尺规作图本质上是用几何方法处理几何问题,它走的是几何化之路,偏重于定性而不是定量地考虑问题。

### 1.2.3 几何代数化之路

几何学在希腊科学中占统治地位,其威力之大,以至于纯算术或代数的问题都被转译为几何语言:量被解释为长度,两个量之积被解释为矩形、面积等。现代数学中保留的称二次幂为“平方”,三次幂为“立方”就源于此。

17世纪初,解析几何之父勒内·笛卡儿(René Descartes, 1596—1650)<sup>[10]</sup>在《方法论》的附录《几何》中,将坐标引入几何,把代数中形式化符号体系的表示方法引进几何学中<sup>[11]</sup>,将“形”变成了“数”,实现了形与数的紧密结合,使得几何间的计算也能用代数的形式实现。

笛卡儿认为可以把代数中形式化的符号体系的表示方法引进到几何学中,使得几何间的计

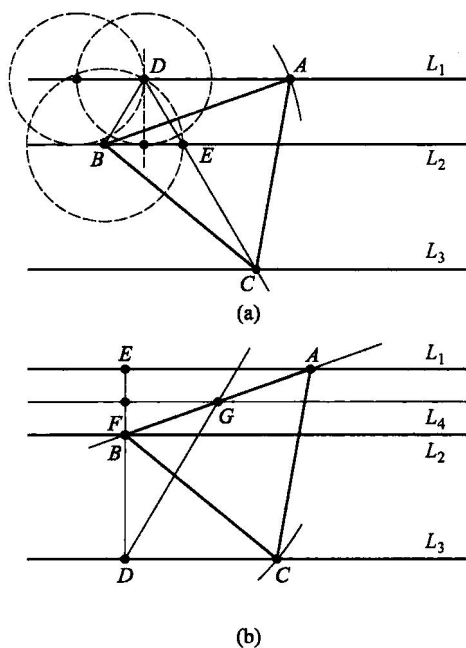


图 1.2.1 3 顶点在 3 条平行线上的正三角形的作法



算也能用代数的形式实现。他认为，当知道了一些几何线段的长度，便足以作出它的图形。几何作图要求对线段作加减乘除，对个别的线段取平方根，而这些几何作图的步骤是可以代数的术语来表示的。而且，由于在几何作图中引进了代数术语，从而使几何作图的步骤变得更为明晰。因此在几何作图中，再没有必要像以往那样必须一步一步地把线绘在纸上，而只需把每一线段用一个文字表示出来。这样两条线段相加可表示为  $a + b$ ， $a - b$  则表示从  $a$  线段中减掉  $b$  线段，而  $ab$  表示线段  $a$  为  $b$  所乘， $a/b$  则表示  $a$  线段为  $b$  线段所除， $a^2$  表示线段  $a$  为它本身所乘，等等。

笛卡儿不仅使在几何中可以引用代数的符号表示方法，更重要的是可以进一步用代数方程来表示几何曲线，这种思想在笛卡儿用代数方法解决几何作图的问题时就呈现出来。他认为在考虑作图问题时必须假定问题已经解决，而用字母表示所有那些看来是作图所必需的已知和未知的线段。然后，不管线段是已知的还是未知的，弄清楚这些线段之间的相互关系，使得同一个量能够用两种方式表示出来，这样就得到一个方程，然后求出与未知线段数目相同的方程。如果方程不止一个，就把它们组合起来。

这实现了“几何代数化”。

用数值运算来替代几何关系计算是代数化计算的本质思想，这是数学史上最丰富和最有效的创造之一。在笛卡儿“一切问题可以化为数学问题，一切数学问题可以化为代数问题，一切代数问题可以化为方程组求解问题”思想的统治下，代数基本上取代了经典几何的地位<sup>[10]</sup>。

几百年来，“数”占了统治地位，“形”变得从属了。几何与代数之间出现了一种令人感到不太自然的关系。长期以来，人们总以这样的思路去解决几何问题，这无意地削弱了几何的作用范围，掩盖了几何的自然属性。计算机的发展使得这一“偏向”加剧了，现代计算机用一系列 0 和 1 来反映其信息并由此给出问题的答案，不需要人们进行过多的“理解”。

有时，一句话、一个词可能改变历史，如果不是当年徐光启设定“几何”一词，可能数学就分成“形学”——研究“形”的科学（现在的“几何”）、“数学”——研究“数”的科学（现在的“代数”）两部分，这样似乎更实至名归，而且“形学”更能统一“画法几何”与“几何学”。

#### 1.2.4 代数化还是几何化

作为数学的两个重要基本组成部分，几何与代数原本分别考虑形和数的问题，各司其职，它们的概念及方法都是研究科学和工程问题的重要数学工具，理论上应该各占半壁江山，各有其自己的问题域和发展空间，对应的也有其自己的理论基础和方法学。然而，历史并不是这样，两者并不平衡<sup>[10-12]</sup>。关于几何与代数的大讨论似乎已经延续了几个世纪，艾萨克·牛顿（Isaac Newton, 1642—1727）与戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716）是这个争论的两个代表人物<sup>[12]</sup>。

牛顿基本上是一个几何学家。他的几何学，或者说是由他发展起来的微积分学，都是用来描述自然规律的数学尝试。他关心的是广泛意义下的物理以及几何世界中的物理。在他看来，如果有人想了解事物，他就得用物理世界的观点来思考它，用几何图形的观点来看待它。在他发展微积分的时候，他想要发展的是微积分的一种能尽可能贴近隐藏在其后的物理内蕴的表现