中学数学课外读物

DAISHU
FANGCHENG
YU
FANGCHENGZU

QIAOFENGZHU BIAN

代数方程与方程组

内蒙古人民出版社

代数方程与方程组

乔凤珠

内蒙古人民出版社

一九八六年·呼和浩特

中学数学课外读物

代数方程与方程组

乔凤珠 编

*

内蒙古人民出版社出版

（呼和浩特市新城西街82号）

内蒙古新华书店发行 内蒙古新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11.875 字数：250千

1987年1月第一版 1987年2月第1次印刷

印数：1—8,158册

统一书号：7089·399 每册：1.70元

前　　言

方程是中学代数的一个重要内容，世界上第一部“代数学”（约820年）是古代阿拉伯人阿里藉立兹米（Alchwarizmi）所著，它的书名就是“还原与对消”（Algebra and Almukabalan）。所谓“还原”就是“移负项于方程另一边变正”；所谓“对消”就是“消去方程两边相同的项”，这都是解方程所必须经过的步骤，同时，我们还知道：解方程可以导出新数，比如解方程$x+4=1$，导出负数“-3”，而且，解方程必然要用到恒等变换。再有，方程本身就揭示了量与量之间的相依关系。因此，方程与代数中其它三个主要内容（数的概念的发展，恒等变换和函数）具有极其密切的关系。不仅如此，由于19世纪30年代伽罗华（Galois，法兰西人，1811年—1832年）从理论上证明了五次和五次以上一元方程没有根式解，而使代数进入到新的范畴。一百多年来，伽罗华理论的思想在近代代数中一直占据着统治地位，起着主导作用。因而在代数中，方程无论在实践上或在理论上都占有重要的位置。

在这本书里，用了较大的篇幅讲方程的应用。列方程解应用题是把实际问题化成数学问题的一种较好的基本训练，它可以培养把实际问题转化为数学模型的本领，从而使我们体验到数学与实际之间的密切联系。虽然书中已经给出了一些例题，但是要培养和提高分析问题和解决问题的能力，关键还

是实践.在实践中可以提高解题的技巧，也可以获得解题后的欢乐和喜悦，激发求知渴望，唤起思考数学问题的兴趣，提高探求科学奥秘的能力.

本书参照中学数学教学大纲来编写的.对方程应用题进行了较详细的分类，并精选一百多道例题.同时适当补充、加深了中学课本中的有关内容（如方程的同解性，韦达定理，高次方程和线性方程组）.有关理论部分叙述力求通俗、简明、严密.为了触类旁通，加强练习，编排了二百多道习题，书后附有提示或答案.

该书是在教学实践的基础上写成的，可作为学生课外、青年自学和教师教学的参考资料.在编写中，参考了张立仁教授编写的有关教材，在此，表示感谢。

目　　录

第一章　方程(组)基本知识的简要介绍

一、定　　义

对以下几个基本概念要深入理解，分辨清楚．读者自己还可以举出正、反例子加以比较和辨别。

1　**解析式**　由一系列运算符号把数和用字母表示的数连结起来的表达式叫做**解析式**．如$\frac{1}{2}gt^2$，$\sin x+\operatorname{arc\,tg} x$，$a^{\log_2 x}$等。

2　**等式**　两个解析式被等号连结起来所成的式子叫做**等式**．

3　**方程**　含有未知数的等式叫做**方程**．具体说，形式如：

$$f(x,\ y,\ \cdots,\ w)=g(x,\ y,\ \cdots,\ w)$$

的等式叫做方程．

其中$f(x,\ y,\ \cdots,\ w)$和$g(x,\ y,\ \cdots,w)$是以它们的未知数$x,\ y,\ \cdots,\ w$的允许值集合*的公共部分为允许值集合的两个解析式．

4　**恒等式**　一个对于字母取任意允许值时都正确的等式以及不含字母的正确的等式都叫做**恒等式**．如$2^6=4^3$，$(x-1)^2=x^2-2x+1$，$\lg xy=\lg x+\lg y$等。

5　**矛盾式**　一个对于字母取任意允许值时都不正确的

等式叫做矛盾式。如$3x=3x+1$，$x^{-1}=0$等。

6　**条件等式**　一个对于字母在允许值集合内只取某些特殊数值时，才正确的等式叫做**条件等式**。如$3x=2x+1$，$\cos x=\sin x$等。

注　把恒等式，矛盾式和条件等式中的字母看作未知数时，它们就都是方程。前两者分别叫做**恒等方程**和**矛盾方程**。

7　**方程的解和根**　能使方程左右两边的值相等的未知数的值叫做方程的一个**解**。如$x=-1$，$y=1$是方程$2x+3y=1$的一个解。只含有一个未知数的方程的一个解也叫做方程的一个**根**。如$x=1$是方程$3x=2x+1$的一个根。如果一个只含有一个未知数的方程有两个或多个相同的根，那么就把这个相同的根叫做方程的**重根**。这个相同的根共有n个时，就叫做方程的**n重根**。这个相同的根的个数，就叫做这个根的**重数**。如3是方程$x^2-6x+9=0$的重根，且为2重根，重数是2。

注　恒等方程有无穷多个解。矛盾方程没有解。

8　**解方程**　求方程的所有的解的过程或确定方程无解的过程，叫做**解方程**。

注　解方程总是在某一个指定的数集里进行的。同一个方程在不同的数集里讨论，其解可能不相同。如方程$x^2(5x+$

---

*解析式$f(x,y,\cdots,w)$的未知数$x,y,\cdots,w$的允许值集合指能使解析式$f(x,y,\cdots,w)$的值有意义的字母$x,y,\cdots,w$所取的值组$x=a$，$y=b$，$\cdots,w=l$的全体所构成的集合，即为

$$\{(a,b,\cdots,l)\mid f(a,b,\cdots,l)\text{ 有意义}\}$$

3）$=3(5x+3)$在有理数集里讨论，其解为$x=-\frac{3}{5}$，但在实数集里讨论，其解为$x_1=-\frac{3}{5}$，$x_2=\sqrt{3}$，$x_3=-\sqrt{3}$。

9　代数式和代数方程　用有限个代数运算（指加、减、乘、除、乘方和开方）符号把数和表示数的字母连结而成的式子叫做**代数式**。如$\frac{1}{2}gt^2+\sqrt[5]{3a^2}$等。两边都是代数式的方程叫做**代数方程**。

注　解析式里出现的运算除代数运算以外还可以有超越运算。

10　有理式和有理方程　无理式和无理方程（或根式方程）一个字母部分没有开方运算的代数式叫做**有理式**。如$\frac{\sqrt[3]{2}a+\sqrt{2}b^2}{c}$等。两边都是有理式的方程叫做**有理方程**。含有对字母部分求开方运算的代数式叫做**无理式**。如$\sqrt{a^2+b^2}$。根号里含有未知数的方程叫做**无理方程**。如$\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}=3$。

11　整式和整式方程　分式和分式方程　分母中不含有字母的有理式叫做**整式**。如$\frac{1}{2}gt^2$等。两边都是整式的方程叫做**整式方程**。分母中含有字母的有理式叫做**分式**。如$\frac{a+b}{cx^2+dx}$等。含有分式的方程叫做**分式方程**。

12　n元方程　n次方程　高次方程　含有n个未知数的方程叫做**n元方程**。未知数的最高次数是n的整式方程叫做**n次方程**。三次或三次以上的一元方程叫做**高次方程**。

13　**超越方程**　含有对未知数的超越运算（指无理数次乘方、对数运算、三角运算和反三角运算)的方程叫做**超越方程**。如$\log_a(\sin x+\cos x)=b$，$\sqrt{3}\sin a^x+\cos a^x=b$等。

注　方程分类：

- 等式
  - 方程
    - 代数方程
      - 有理方程
        - 整式方程
        - 分式方程
      - 无理方程
    - 超越方程
  - 不含未知数的等式

整式方程中最简单的最基本的是一元一次方程。然后从增高次数和增加元数两个方面来发展，就有一元二次方程、一元三次方程一直到一元高次方程；还有二元一次方程组、三元一次方程组一直到一般线性方程组。当然还有次数和元数同时增多的方程组，如二元二次方程组、多元的高次的方程组。

二、同解定理、增根和丢根

为什么我们解方程(组)时，采用了移项、乘以整式、因式分解、乘方、代入消元和加减消元等做法而不改变原方程（组）的解，或者不会使原方程（组）的解丢掉呢？下面给

出它的理论根据。

定义 两个方程（组），如果第一个方程（组）的任意一个解都是第二个方程（组）的解；反之，第二个方程(组)的任意一个解也都是第一个方程（组）的解，那么就说这两个方程（组）同解，而且这两个方程（组）叫做同解方程（组）。

注

① 若两个方程有重根，则当每一个方程的任何一个根都是另一个方程的同一重数的根时，才是同解的。

② 讨论同解方程必须在某一指定的数集里。比如，方程$x^2(5x+3)=3(5x+3)$与方程$5x+3=0$在有理数集里是同解的，但在实数集里就不同解。

解方程时，一般要把原方程变形成为新方程，新方程与原方程可能不同解，产生了增根或丢根，什么原因呢？

例 1 解分式方程

$$\frac{x^2+2x}{x+2}=3$$

（未知数允许值集合是除-2以外的全体实数）两边乘以$x+2$，得新方程

$$x^2-x-6=0$$

（未知数允许值集合是全体实数）其解为$x_1=3$，$x_2=-2$。但$x_2=-2$不是原方程的解，产生了增根。我们发现未知数允许值集合扩大了。

例 2 解方程$x^2=x$（未知数允许值集合是全体实数），如果两边乘以$\frac{1}{x}$，得新方程$\frac{x^2}{x}=\frac{x}{x}$（未知数允许值集合是除0以外的全体实数），其解为$x=1$，而原方程的解$x=0$

不是新方程的解，产生了丢根．我们发现未知数允许值集合缩小了．

例 3 解方程

$$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{x+5} \qquad (1)$$

把(1)变形为

$$\sqrt{(x-1)(x+1)}=\sqrt{x+5} \qquad (2)$$

其解为$x_1=3$，$x_2=-2$，但$x_2=-2$不是原方程的解，产生了增根．我们发现(1)的未知数允许值集合是$[1,+\infty)$，但(2)是$[1,+\infty)$，$[-5,-1]$，因而未知数允许值集合扩大了．

从上面三个例子可见，产生增根或丢根的原因就在于新方程与原方程的未知数允许值集合发生了变化．若扩大，可能增根，就要把所求得的根进行检验，舍去增根；若缩小，可能丢根，就要看缩小的那部分数值，有没有原方程的根，如果有，就是丢根，要把它找回来．那么，什么样的方程变形不改变未知数的允许值集合，而使新方程与原方程同解呢？什么样的方程变形又不行呢？下面我们逐步来阐明这些问题．

定理 1 方程

$$f(x,\ y,\ \cdots,\ w)=g(x,\ y,\ \cdots,\ w) \qquad (1)$$

与方程

$$f(x,\ y,\ \cdots,\ w)+\varphi(x,\ y,\ \cdots,\ w)$$
$$=g(x,\ y,\ \cdots,\ w)+\varphi(x,\ y,\ \cdots,\ w) \qquad (2)$$

其中$\varphi(x,\ y,\ \cdots,\ w)$是一个整式，同解．

证 设 $x=a$，$y=b$，$\cdots$，$w=l$ 是(1)的任意一个解，有

$$f(a, b, \cdots, l) = g(a, b, \cdots, l) \tag{3}$$

因为$\varphi(x, y, \cdots, w)$是一个整式，所以$\varphi(a, b\cdots, l)$是一个有意义的数。把(3)的两边同加上数$\varphi(a, b, \cdots, l)$，得

$$f(a, b, \cdots, l) + \varphi(a, b, \cdots, l) = g(a, b, \cdots, l) + \varphi(a, b, \cdots, l)$$

从而$x = a$，$y = b$，$\cdots$，$w = l$也是(2)的一个解。

反之，设$x = a'$，$y = b'$，$\cdots$，$w = l'$是(2)的任意 一个解，有

$$f(a', b', \cdots, l') + \varphi(a', b', \cdots, l') = g(a', b', \cdots, l') + \varphi(a', b', \cdots, l')$$

两边减去同一个数$\varphi(a', b', \cdots, l')$，得

$$f(a', b', \cdots, l') = g(a', b', \cdots, l')$$

从而$x = a'$，$y = b'$，$\cdots$，$w = l'$也是(1)的一个解。根据同解定义，知(1)与(2)同解。证完。

注

① 定理 1 给出了移项不改变整式方程的解的理论根据。

② 定理 1 中的$\varphi(x, y, \cdots, w)$必须是整式。比如方程 $x - 5 + \frac{1}{x-7} = 2 + \frac{1}{x-7}$与方程$\left(x - 5 + \frac{1}{x-7}\right) - \frac{1}{x-7} = \left(2 + \frac{1}{x-7}\right) - \frac{1}{x-7}$（未知数允许值集合扩大了）就不同解，产生了增根。方程 $x - 5 = 2$与方程$(x-5) + \sqrt{x-8} = 2 + \sqrt{x-8}$（未知数允许值集合缩小了）也不同解，产生了丢根。

③ 由注②知把方程两边加上同一个分式或无理式，可

能增根或丢根．但是如果所加的分式或无理式对于原方程的未知数的任意允许值都有意义，就不可能丢根．读者自证．

定理 2 如果解析式$h(x,y,\cdots,w)$对于方程$f(x,y,\cdots,w)=g(x,y,\cdots,w)$的未知数的所有允许值都有意义，并且它的值都不等于零，那么，方程

$$f(x,y,\cdots,w)=g(x,y,\cdots,w) \tag{1}$$

与方程

$$f(x,y,\cdots,w)h(x,y,\cdots,w)=g(x,y,\cdots,w)h(x,y,\cdots,w) \tag{2}$$

同解．

证 设$x=a$，$y=b,\cdots,w=l$是(1)的任意一个解，有

$$f(a,b,\cdots,l)=g(a,b,\cdots,l) \tag{3}$$

由题设知$h(a,b,\cdots,l)$有意义，把(3)的两边乘上同一个数$h(a,b,\cdots,l)$，得

$$f(a,b,\cdots,l)h(a,b,\cdots,l)=g(a,b,\cdots,l)h(a,b,\cdots,l)$$

所以，$x=a$，$y=b$，$\cdots$，$w=l$也是(2)的一个解．

反之，设$x=a',y=b',\cdots,w=l'$是(2)的任意一个解，有

$$f(a',b',\cdots,l')h(a',b',\cdots,l')=g(a',b',\cdots,l')h(a',b',\cdots,l') \tag{4}$$

由题设知$h(a',b',\cdots,l')\neq 0$，把(4)的两边乘上同一个数$\dfrac{1}{h(a',b',\cdots,l')}$，得

$$f(a',b',\cdots,l')=g(a',b',\cdots,l')$$

所以，$x=a'$，$y=b'$，$\cdots$，$w=l'$也是(1)的一个解．从而

(1)与(2)同解．证完．

注

① 定理 2 给出了方程两边乘以不等于零的数不改变方程的解的理论根据．

② 定理 2 中的$h(x, y,\cdots,w)$必须对原方程的未知数的所有允许值都有意义，且其值都$\neq 0$．不然，可能产生增根或丢根．

比如方程

$$(x+1)(x-2)=x+1 \tag{5}$$

与方程

$$(x+1)(x-2)\frac{1}{x+1}=(x+1)\frac{1}{x+1} \tag{6}$$

（未知数允许值集合缩小了）不同解．因为（6）的解是$x=3$，但（5）的解是$x_1=3$，$x_2=-1$（丢根），就因为$\frac{1}{x+1}$，当x取-1时，无意义，不满足定理 2 的条件．因而在解方程时，切不可把方程两边的相同的整式因式约去，不然，可能产生丢根（还可参看前面的例 2）．

又比如方程

$$x+1-\frac{6}{x+3}=\frac{2x}{x+3} \tag{7}$$

与方程

$$\left(x+1-\frac{6}{x+3}\right)(x+3)=\frac{2x}{x+3}(x+3) \tag{8}$$

（未知数允许值集合扩大了）不同解．(7)的解是$x=1$，但(8)的解是$x_1=1$，$x_2=-3$（增根），就因为$x+3$，当x取-3时，其值为零，不满足定理 2 的条件．但是这种变形，

会不会产生丢根呢？不会的. 即给出方程

$$f(x, y, \cdots, w)=g(x, y, \cdots, w) \tag{9}$$

和方程

$$f(x, y, \cdots, w)h(x, y, \cdots, w) \\ =g(x, y, \cdots, w)h(x, y, \cdots, w) \tag{10}$$

其中$h(x, y, \cdots, w)$对方程（9）的未知数的所有允许值都有意义，那么，（9）的解都是(10)的解. 其理由见定理2的证明中的第一部分. 这就给出分式方程的一个解法的理论根据，但必须检验，舍去增根.

定理3 方程

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)=0 \tag{1}$$

与s个方程

$$f_1(x)=0, f_2(x)=0, \cdots, f_s(x)=0 \tag{2}$$

在方程(1)的未知数x的允许值集合里是同解方程.

证 设 $x=a$是(1)的任意一个解，有

$$f_1(a)\ f_2(a)\cdots f_s(a)=0$$

所以必至少有一个$f_i(a)=0$，$1\leqslant i\leqslant s$，从而$x=a$是$f_i(x)=0$的解，因而$x=a$也是(2)的解.

反之，设$x=b$是(2)的任意一个解，则必有某一个$f_j(b)=0$。因为b在(1)的未知数的允许值集合里，所以$f_1(b)$，$f_2(b)$，…，$f_{j-1}(b)$，$f_{j+1}(b)$，…，$f_s(b)$都有意义，从而

$$f_1(b)f_2(b)\cdots f_j(b)\cdots f_s(b)=0$$

因而$x=b$也是(1)的解. 所以(1)与(2)同解. 证完.

注 定理3给出了利用因式分解的方法解一元高次方程的理论根据. 欲求方程

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)=0$$