



普通高校“十二五”规划教材

周 锐 陈宗基 编著

自适应技术的理论及应用

——控制、滤波、预报

(第2版)



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

013031393

TP273
108-2



普通高校“十二五”规划教材

自适应技术的理论及应用 ——控制、滤波、预报 (第2版)

周 锐 陈宗基 编著



北京航空航天大学出版社

TP273
108-2



北航

C1636844

010031388

内 容 简 介

本书介绍自适应控制、自适应预报、自适应滤波的理论与方法。内容包括:绪论;模型参考自适应控制系统的理论基础;模型参考自适应控制系统;在线参数估计;自校正控制系统;多模型自适应控制系统;自适应反演控制系统;自适应滤波和预报。本书叙述方式由浅入深,既介绍基本理论、基本方法和基本方案,又介绍该领域一些较新的研究成果以及自适应控制、预报与滤波等技术在实践中的一些成功应用。

本书可以作为理工科高等院校控制理论、控制工程、信息工程以及系统工程等专业高年级学生或研究生的教材;对于从事各类控制系统设计、制造和运行维护的工程技术人员,也是一本有益的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

自适应技术的理论及应用:控制、滤波、预报/周锐等编著. —2版. —北京:北京航空航天大学出版社, 2013.3

ISBN 978-7-5124-1059-6

I. ①自… II. ①周… III. ①自适应控制—高等学校—教材 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 026026 号

版权所有,侵权必究。

自适应技术的理论及应用

——控制、滤波、预报

(第 2 版)

周 锐 陈宗基 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×960 1/16 印张:18.5 字数:414 千字

2013 年 3 月第 2 版 2013 年 3 月第 1 次印刷 印数:1 500 册

ISBN 978-7-5124-1059-6 定价:45.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前 言

由于航空、航天以及过程控制等领域控制技术发展的需要,再加上计算机软硬件技术的快速发展,自适应控制技术也得到突飞猛进的发展,也吸引了更多的科学技术人员从事自适应控制的理论研究和实际应用。自适应控制理论和设计方法目前已日趋完善,内容也更加丰富,应用领域不断扩大。因此,学习和掌握自适应控制技术对于理工科高等院校的学生和工程技术人员,尤其是控制理论、控制工程、信息工程以及系统工程等专业高年级学生或研究生是非常重要的。

本书系统地介绍自适应控制、自适应滤波与自适应预报。主要内容包括:绪论;模型参考自适应控制系统的理论基础;模型参考自适应控制系统;在线参数估计;自校正控制系统;多模型自适应控制系统;自适应反演控制系统;自适应滤波和预报。本书既介绍自适应技术的基本理论、基本方法和基本方案,又介绍该领域一些较深、较新的研究成果以及自适应控制、预报与滤波等技术在实际中的一些成功应用。

通过本书的学习,读者应了解自适应技术的有关定义和分类;了解自适应技术在不同发展阶段的理论 and 应用成果;掌握自适应技术的基本理论、基本方法和基本方案,并在此基础上开展自适应技术的有关理论问题和工程应用研究。

本书是在原《自适应技术的理论及应用》(陈宗基编著,北京航空航天大学出版社出版)的基础上,增加了近年来自适应控制技术的一些较新的研究成果及其在飞行器飞行控制领域的应用等内容后的修订再版。

由于自适应技术涉及的内容广泛,再加上作者的学识和水平有限,本书内容编排难免有所偏颇,书中缺点和错误也在所难免,恳请读者批评指正。

作 者

2012 年 11 月

目 录

第 1 章 绪 论	1
第 2 章 模型参考自适应控制系统的理论基础	7
2.1 李雅普诺夫稳定性理论	8
2.1.1 基本定义	8
2.1.2 基本定理	10
2.1.3 连续时域和离散时域稳定性理论的关系	18
2.2 正动态系统	18
2.2.1 基本定义	18
2.2.2 基本定理	19
2.2.3 连续时域和离散时域正动态系统理论的关系	22
2.3 超稳定性理论	22
2.3.1 基本定义	22
2.3.2 基本定理	23
2.3.3 连续时域和离散时域超稳定性理论的关系	25
2.4 波波夫积分不等式求解方法	25
2.4.1 概 述	25
2.4.2 积分不等式的求解方法	26
2.4.3 离散时域和式不等式的解	29
习 题	29
第 3 章 模型参考自适应控制系统	31
3.1 M. I. T. 调节规律	31
3.1.1 M. I. T. 调节规律推导	31
3.1.2 稳定性分析	35
3.2 李雅普诺夫稳定性设计方法	36
3.2.1 对象参数直接调节	37
3.2.2 对象参数不直接调节	39



3.3 仅利用对象输入、输出测量值的模型参考自适应控制系统	42
3.3.1 理论准备	42
3.3.2 乃伦局方案($\hat{n}_p^*=1$)	45
3.3.3 乃伦局方案($\hat{n}_p^*=2$)	50
3.4 超稳定性设计方法	55
3.5 离散时域模型参考自适应控制系统	59
3.6 模型参考自适应控制方案的鲁棒性分析	65
3.6.1 各类模型参考自适应控制方案的统一性	66
3.6.2 有关鲁棒性的基本定义和定理	67
3.6.3 乃伦局方案的鲁棒性分析	68
3.7 具有强鲁棒性的模型参考自适应方案	75
3.7.1 有界误差自适应控制方案	75
3.7.2 σ 修正的鲁棒自适应控制方案	76
3.7.3 对于扰和建模误差有鲁棒性的广义乃伦局方案	79
3.8 模型参考自适应控制方案的应用实例	85
3.8.1 NASA 天文望远镜的模型参考自适应控制系统	85
3.8.2 直流电机的速度控制	88
习 题	92
第4章 在线参数估计	94
4.1 系统辨识的一般概念	94
4.2 离散系统的数学模型	96
4.3 确定性系统参数估计	98
4.3.1 方程误差法	98
4.3.2 输出误差法	102
4.4 随机性系统参数估计	106
4.4.1 鞅的基本知识	106
4.4.2 白色噪声干扰下的最小二乘法	108
4.4.3 有色噪声干扰下的随机逼近法	112
4.4.4 有色噪声干扰下的伪线性递推算法	118
4.4.5 遗忘因子法和限定记忆法	127
习 题	133



第 5 章 自校正控制系统	134
5.1 自校正控制系统的设计原则	134
5.2 最小方差自校正控制器	137
5.2.1 最小方差控制器	137
5.2.2 最小方差自校正控制系统	149
5.3 极点配置自校正控制器	155
5.3.1 极点配置控制器	155
5.3.2 极点配置自校正控制系统	159
5.4 自校正控制系统的特殊问题	164
5.4.1 控制器结构对参数估计的影响	164
5.4.2 控制器对参数估计的灵敏度分析	166
5.4.3 自校正特性	168
5.5 谨慎控制器	173
5.6 输出跟踪自适应控制方案	177
5.6.1 输出跟踪自适应控制的随机逼近算法	177
5.6.2 输出跟踪自适应控制的最小二乘算法	182
5.7 自校正控制方案的应用实例	185
5.7.1 造纸机的纸基重和湿度控制	185
5.7.2 矿石粉碎机的功率控制	187
习 题	189
第 6 章 多模型自适应控制系统	191
6.1 间接多模型自适应控制	191
6.1.1 多自适应模型构成的多模型自适应控制	191
6.1.2 多固定模型与多自适应模型构成的多模型自适应控制	194
6.2 直接多模型自适应控制	202
6.2.1 基于输出反馈的直接多模型自适应控制	202
6.2.2 直接多模型自适应控制算法的稳定性分析	205
6.3 多模型自适应飞行控制律设计应用实例	209
6.3.1 典型故障下固定多模型设计	210
6.3.2 固定多模型重构控制器设计	212
6.3.3 自适应模型及控制器	214
6.3.4 多模型切换准则的设计	216



6.3.5 仿真结果与分析	217
习 题	221
第7章 自适应反演控制系统	222
7.1 自适应反演控制设计方法	222
7.2 滑模干扰观测器的设计	225
7.3 基于滑模干扰观测器的自适应反演控制	227
7.4 自适应反演飞行控制律设计应用实例	230
7.4.1 重装备空投飞行器模型	230
7.4.2 轨迹控制回路控制律设计	233
7.4.3 姿态控制回路控制律设计	235
7.4.4 角速率控制回路控制律设计	236
7.4.5 控制器及干扰观测器参数调节	239
7.4.6 仿真结果与分析	240
7.5 小 结	248
习 题	249
第8章 自适应滤波和预报	250
8.1 已知信号模型的最优滤波和预报	250
8.1.1 线性最优滤波和预报	251
8.1.2 定延迟平滑	256
8.1.3 定点平滑	259
8.1.4 最优预报	260
8.1.5 随机 ARMA 模型的滤波和预报	261
8.1.6 广义卡尔曼滤波器	264
8.2 未知信号模型的自适应滤波和预报	265
8.2.1 自适应最优状态估计	266
8.2.2 自适应最优预报	272
8.2.3 自适应噪声抑制	277
习 题	280
参考文献	281

第 1 章 绪 论

自适应技术包括自适应控制技术、自适应滤波技术和自适应预报技术。

在控制器、滤波器和预报器的整个设计过程和实现过程中的不确定性是普遍存在的,可以用图 1.1 来说明其普遍性。

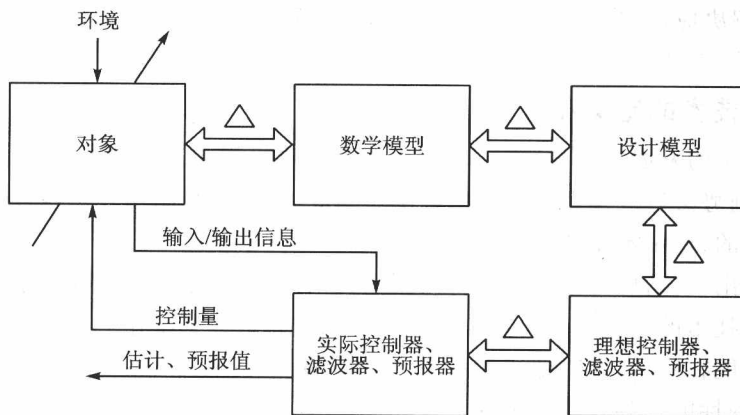


图 1.1 控制器、滤波器和预报器的设计和实现过程中的不确定性

这些不确定性是：

(1) 由于建模方法、实验手段和经费的限制,人们不可能得到与实际对象完全一致的数学模型,即对象与数学模型之间总是存在差别的。

(2) 根据设计和制造的要求,必须对数学模型进行线性化处理和降阶简化,以便得到较为简单、易于设计的设计模型,即数学模型与设计模型之间也总是存在差别的。

(3) 根据要求,采用某些方法,在大型计算机或其他介质上开展设计工作,得到理想控制器、理想滤波器或理想预报器。由于设计过程中采用某些工程近似处理和设计介质的限制,往往这些理想控制器、滤波器和预报器所达到的技术要求与设计要求有差别。

(4) 理想控制器、理想滤波器和理想预报器通过软件、硬件的实现,得到实际控制器、实际滤波器和实际预报器。但由于计算机有限字长的限制、元器件的误差,理想控制器和实际控制器之间、理想滤波器和实际滤波器之间,以及理想预报器与实际预报器之间总是存在差别的。

(5) 对象动态特性随工作环境的变化而变化。如飞机随高度的变化、船舶随水域深度的变化,它们的动态特性会发生较大幅度的变化。



(6) 对象动态特性在运行过程中,自身也会发生变化,如导弹、航天飞机由于燃料的消耗,其重量和重心会发生变化。

由以上分析可见,在控制器、滤波器和预报器的设计和实现过程中,不确定性是普遍存在的。

当不确定性较小时,可以采用常规的方法来设计控制器、滤波器和预报器。这些方法就是我们在其他课程所学习的对已知对象模型的控制器设计、滤波器设计和预报器设计方法。但是,当不确定性较严重时,以上这些常规的设计方法所导致的控制器、滤波器和预报器在实际应用中将远远不能满足技术要求,有时还会导致系统失稳、失效等事故。因此,必须有一种新的设计技术,来解决应用在不确定性严重的场合的控制器、滤波器和预报器的设计问题。这种新的技术就是自适应技术。

1. 自适应技术的定义和三要素

在自适应技术的发展过程中,不同的学者在不同阶段提出了不同的定义。若罗列这些众说纷纭的定义,则势必造成读者概念上的混乱。为此,本书只介绍当今国内外在自适应技术领域获得普遍认可的、揭示本质的定义。

韦氏字典指出,自适应是改变自身,使其行为适合于新的或者已经改变了的环境。

采用自适应技术的系统称为自适应系统。我们对自适应系统作如下定义:

自适应系统能在线地、实时地了解对象,根据不断丰富的对象信息,通过对一个可调环节的调整,使系统的性能达到技术要求或最优。

由上述定义可见,自适应系统有三大要素:一是在线地、实时地了解对象;二是有一个可调环节;三是能使系统性能达到技术要求或最优。

在自适应控制系统中,在线地、实时地了解对象是通过测量和对象动态特性有关的输入/输出量,或直接估计对象参数来达到的。自适应控制系统中总是存在一个可调整控制器。使输出误差趋于零,或使某性能指标最优的要求,是通过可调整控制器的设计准则来保证的。

在自适应滤波系统和自适应预报系统中,也是通过直接估计信号模型的参数,或测量某些与信号强度相关的信号来在线地、实时地了解对象。在这些系统中,都有一个可调滤波器,该可调滤波器的设计准则保证这些系统达到最小估计误差或最小预报误差。

用上述的三要素,可以分析哪些系统是自适应系统,哪些系统不是自适应系统。

2. 自适应控制系统

自适应控制系统可以分为模型参考自适应控制系统和自校正控制系统。

模型参考自适应控制系统的典型结构如图 1.2 所示。其中参考模型的输出反映了设计者对被控对象输出的要求,调节机构根据某种设计准则来调节可调整控制器的参数,使参考模型的输出和对象的输出的误差趋于零。或者说,该被控对象、调节机构和控制器所组成的复合系统将渐近地逼近参考模型。

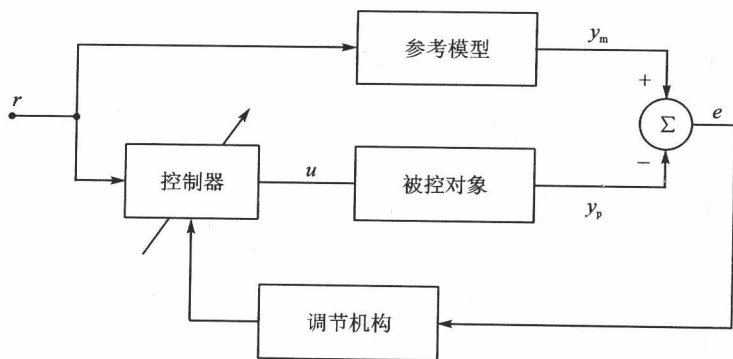


图 1.2 模型参考自适应控制系统

在模型参考自适应控制系统中,对未知被控对象在线地、实时地了解,是通过测量对象输出,并与参考模型输出相比较而间接获得的。有效控制量是由可调节控制器产生的。通过调节控制器,即调节机构的设计准则,保证了技术要求——使输出误差趋于零。

模型参考自适应控制系统又可以根据调节机构的不同设计准则来分类。一类是以威泰克(H. P. Whitaker)为代表的梯度法参数调节规律,它的设计准则是使性能指标 $\int_{t_0}^t e^2(\tau) d\tau$ 最小,这里, $e(\tau)$ 代表参考模型和对象的输出误差。第二类是以派克斯(P. C. Parks)、乃伦局(K. S. Narendra)和莫诺泼立(R. V. Monopoli)为代表的以李雅普诺夫稳定性为设计准则的方案。第三类是以兰道(I. D. Landau)为代表的,以波波夫超稳定性为设计准则的方案。

模型参考自适应系统也可以根据参考模型和被控对象之间连接方式的不同而分为串联式、并联式或串并联式。其基本方式是并联式,如图 1.2 所示。

自校正控制系统的典型结构如图 1.3 所示。参数估计器利用对象输入/输出量的测量值所提供的信息,迭代地估计对象参数,设计计算器根据选定的设计准则和获得的参数估计值,来计算控制器参数,从而获得有效的控制作用。

在校正自适应系统中,自适应系统的三大要素也是很明显的,对被控对象的了解是由估计对象模型的参数而获得的,可调节控制器综合出有效的控制量,设计计算器的算法具体反映了性能指标的最优化要求。

可以采用许多方法对一个系统进行参数估计,诸如:最小二乘法、随机逼近法和伪线性递推算法等。又可以采用不同的设计手段对一个“已知”的对象进行设计,如最小方差控制与极点配置等。因此,根据参数估计和控制律设计方法的不同,可以派生出结构各异的多种自校正控制方案。为了分类的方便,目前多数学者按控制律设计方法的不同来进行分类,于是自校正控制系统可以分为极点配置和最小方差控制两大类。

由于自适应控制系统在本质上是非线性时变系统,分析研究较困难,还没有形成系统的理

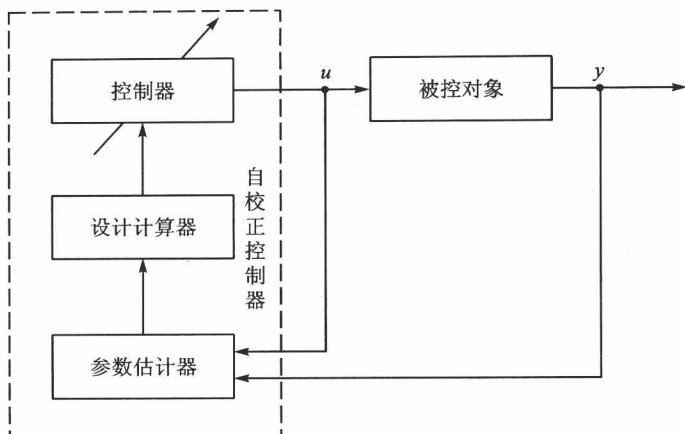


图 1.3 自校正控制系统

论,并且某些理论问题尚未彻底解决,因此,它还基本上局限于控制理论工作者的研究范围,和实际控制工程技术有较大的脱节。但由于计算机软硬件技术的迅速发展、某些理论问题的突破,以及某些应用的成功开拓,使越来越多的工程技术人员对自适应控制方案发生了浓厚的兴趣。本节将简单介绍自适应控制方案的应用实例,以便使读者对其用途有一个大概的了解。本节涉及的某些实例,还要在第3章和第5章中详细介绍。

在 NASA 的 24 in 光学跟踪望远镜中,吉尔巴特和温斯顿(Gilbart 和 Winston)利用模型参考自适应控制方案,把卫星跟踪精度提高了 5 倍以上。博里森和西丁(Borrison 和 Syding)在 200 kW 的矿石粉碎机中采用自校正控制方案,把产量提高了 10 %。在年产 13 万吨的造纸机中,塞格拉尔和赫德奎斯特(Cegrall 和 Hedquist)利用自校正控制方案使纸的质量提高,成本却大幅度下降。杜蒙和比朗格(Dumont 和 Belanger)在工业二氧化钛窑上采用自校正控制方案,使稳态性能改善 10 %,动态性能也有所改进。卡尔斯特拉姆(Källström)等在 35.5 万吨的油轮上采用自校正控制方案,使速度提高 1 %;阿默翁根(Amerongen)在一艘远洋测量船上采用模型参考自适应方案,使平均速度也有所提高。

多模型自适应控制系统基本原理和结构如图 1.4 所示,常规自适应控制器设计方法仍可以用来设计多模型自适应控制器。

多模型自适应控制系统有三个基本组成单元:

- (1) 根据被控对象结构及参数的不确定性对被控对象建立多个模型,覆盖其不确定范围,构成多模型集合,每个模型则一般表示被控对象不同的工作区域或操作工序;
- (2) 根据模型集合中的不同模型建立多个相应的控制器,构成控制器集合;
- (3) 给定切换原则,以选择能够描述当前被控对象的最佳或有效模型,并将基于最佳模型而设计的控制器切换为当前控制器,不同的多模型自适应控制会有不同的切换函数。

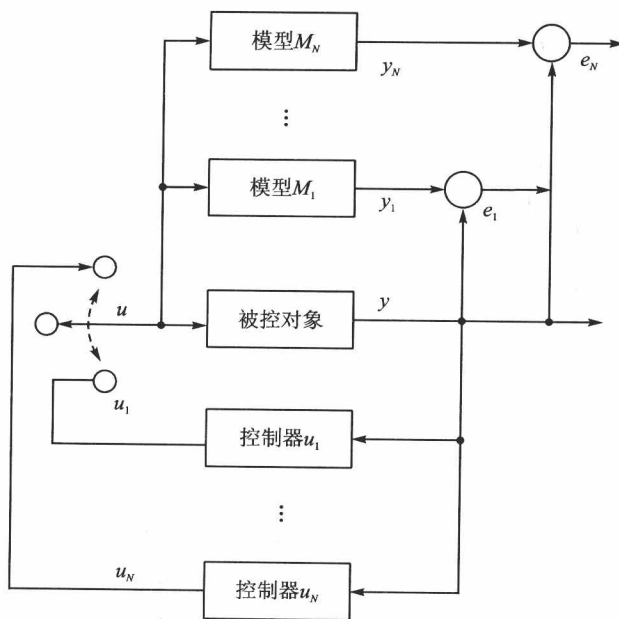


图 1.4 多模型自适应控制系统

目前有关多模型自适应控制比较有代表性的研究成果或领域主要有:以 K. S. Narendra 为代表的间接多模型自适应控制技术,以 G. C. Goodwin 为代表的直接多模型自适应控制技术,以 Z. Binder 为代表的概率加权和多模型自适应控制技术。主要研究问题包括:非线性系统的多模型表示;模型集的优化;控制器结构及基于李雅普诺夫稳定性意义上的切换及调整算法;闭环系统稳定性分析;鲁棒控制与多模型控制相结合。

反演控制(Backstepping),也称为反步法或后推法,由 Krstic 及其合作者于 1990 年初提出,并且在其后得到了广泛的重视和迅速的发展。反演设计的基本思想是将一类复杂非线性系统(状态可线性化或具有严格参数反馈的非线性系统)分解为不超过系统阶次的子系统;从距离控制输入最远的子系统入手,为每个子系统设计部分李雅普诺夫函数和虚拟控制量,以保证子系统稳定性、无源性等性能;对虚拟控制律进行逐步修正,直到推导出最终的镇定控制器,实现闭环系统的全局稳定和渐进跟踪,使系统达到期望的性能指标。反演控制具有处理存在非匹配不确定性的非线性系统的能力,已经在设计不确定系统的鲁棒控制或者自适应控制方面展现出极大的灵活性和优越的性能。

3. 自适应滤波和预报系统

自适应滤波系统和自适应预报系统的结构原理可用图 1.5 表示。参数估计器利用系统的输入/输出信息来估计信号模型的参数值;设计计算器根据选定的设计准则和获得的参数估计

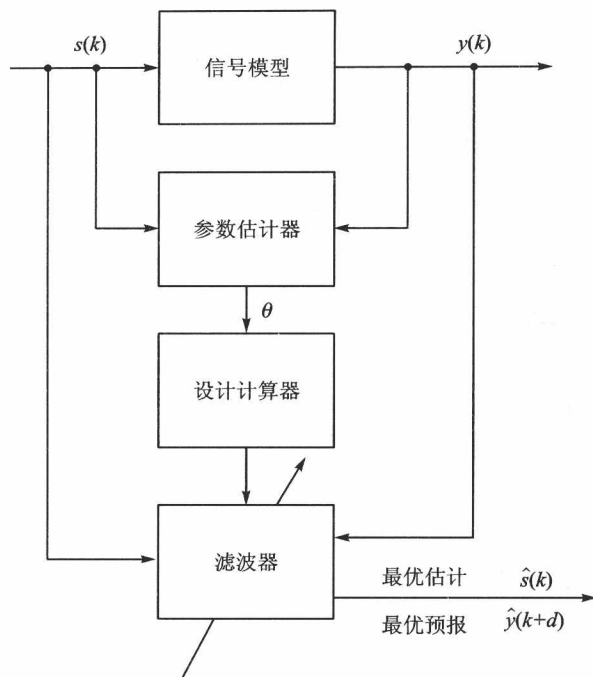


图 1.5 自适应滤波和自适应预报系统结构

值,来计算滤波器的参数,从而获得最优估计值或最优预报值。

在自适应滤波或自适应预报系统中,自适应系统的三大要素也是很明显的。对未知的信号模型的了解,是通过在线地、实时地估计信号模型参数而达到的,可调滤波器综合出最优滤波值或最优预报值,设计计算器的算法具体反映了使估计误差或预报误差最小。

可以根据参数估计的不同方法、设计计算器的不同算法,以及不同的用途,对自适应预报和滤波系统进行分类。一般把自适应滤波分为自适应信号重构和自适应噪声抑制,把自适应预报分为基于状态空间模型的广义卡尔曼状态估计和基于 ARMA 模型的最优预报。

自适应滤波和预报的应用可以分为四类:自适应状态估计、自适应信号重构、自适应噪声抑制和自适应预报。它们被成功地应用于天线系统、声纳系统、回声消除、噪声抑制、语言处理、预报等工程领域。

第2章 模型参考自适应控制系统的理论基础

下面将从模型参考自适应控制系统的发展过程来了解什么是它的理论基础:

(1) 1960年,由麻省理工学院的威泰克等提出的 MIT 调节规律,其基本原理是调节控制器参数,使得性能指标 $\int e^2 dt$ 最小,其中 e 是被控对象和理想模型之间的输出误差。这类控制律的致命弱点是不能保证系统的稳定性。

(2) 1966年,派克斯提出了利用李雅普诺夫函数来决定控制器的参数调节规律的新方法,其基本原理是构造一个准李雅普诺夫函数 $V(e, \phi)$,选择参数调节律 $\dot{\phi}$,使得 $\dot{V}(e, \phi) \leq 0$,从而保证系统的李雅普诺夫稳定性。然而这种设计方法需要系统的全状态向量,或者对 n 阶系统而言,需要系统输出量的 $1 \sim (n-1)$ 次微分信号,这就限制了这种方法的实际应用。

(3) 1974年,莫诺泼立利用广义误差信号的概念来构造自适应控制系统。在设计中,利用了李雅普诺夫稳定性理论和正动态系统的特性,不仅能保证系统的稳定性,而且不需要输出量的微分信号。但是,莫斯(A. S. Morse)提出反例,指出莫诺泼立的稳定性证明只对相对阶为1的对象有效。相对阶的定义是传递函数分母和分子阶数之差。

(4) 1980年,有一系列文章发表,这标志着只利用输入/输出信号的测量值,基本解决了具有全局稳定性的模型参考自适应控制系统设计方法和稳定性的证明,其代表人物为乃伦局、哥德温(G. C. Goodwin)和莫斯。在他们的设计方法中,都利用了李雅普诺夫稳定性理论和正动态系统的特性。

和这一主流研究平行发展的另一学派,是以兰道为代表的以超稳定性理论为基础的设计方法。在设计中,求解波波夫不等式,获得参数调节规律;设计补偿器,以满足前馈环节的正交性,从而使系统超稳定。这种设计方法可使设计过程规范化,在选择参数调节规律时,也有更大的灵活性。

以上各种设计方法的稳定性证明是在一系列假设条件下进行的,它们是:

- ① 对象阶数的上界和相对阶已知;
- ② 对象参数未知,但时不变;
- ③ 对象是最小相位系统;
- ④ 对象无外干扰,无测量噪声。

然而,在实际控制工程问题中,以上假设往往不能满足,因此应了解以上各类自适应控制系统对设计假设和实际环境之间差异的适应能力,即进行现存的自适应控制方案的鲁棒性分析。



(5) 1980—1985年,研究人员利用稳定性理论、摄动理论、小增益分析和平均值分析方法,对现存的模型参考自适应控制方案进行鲁棒性分析。其代表人物是:安德森(B. D. O. Anderson)、诺斯(C. E. Rohrs)、可克多维奇(P. V. Kokotovic)、陈宗基等。鲁棒性分析的基本结论是,现存的模型参考自适应方案对外界干扰、测量噪声、慢时变参数以及相对阶同的建模误差有一定的鲁棒性,对相对阶异的建模误差没有鲁棒性。

(6) 1985年至今,利用稳定性理论、死区非线性、受限控制、奇异摄动、递阶控制等方法,研究对外界干扰和建模误差有更强鲁棒性的自适应控制方案,或称为鲁棒自适应控制方案。其代表人物是:乃伦局、哥德温、安德森、可克多维奇和陈宗基。

由以上发展过程的介绍可见,模型参考自适应控制系统最基本的理论基础是:

- ① 李雅普诺夫稳定性理论;
- ② 正动态系统理论;
- ③ 超稳定性理论;
- ④ 波波夫积分不等式的求解方法。

2.1 李雅普诺夫稳定性理论

李雅普诺夫稳定性的分析方法是一种能判别一般线性或非线性、时变或定常系统稳定性的重要方法。李雅普诺夫稳定性分析方法分为李雅普诺夫第一法及第二法。前者通过获得系统微分方程的显解,来分析系统的稳定性。由于解微分方程的过程繁琐,某些非线性微分方程还得不到显解,所以李雅普诺夫第一法是不便使用的。第二法不需要得到微分方程的显解,就可以分析系统的稳定性,因此这种方法得到了广泛的应用。

李雅普诺夫第二法的基本概念是:若系统内部的总能量随时间的增加而减少,则该系统迟早要达到静止状态。李雅普诺夫还引出了一个虚构的能量函数,称为李雅普诺夫函数,若该函数沿着该系统的轨迹随时间的增加而减少,则该系统必定稳定。

2.1.1 基本定义

研究用向量微分方程描述的一个自由动态系统的稳定性:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad -\infty < t < \infty \quad (2.1)$$

这里 x 是 n 维向量。假设方程满足解的存在性和唯一性条件,其解为 $\phi(t; x_0, t_0)$ 。对于系统(2.1),若存在一状态 x_e , 对所有 t 总有:

$$f(x_e, t) = 0$$

那么该自由动态系统的状态称为平衡状态。

定义 2.1 一自由动态系统的平衡状态 x_e 称为稳定的(s.), 如果对每一个实数 $\epsilon > 0$, 存在一实数 $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, 则对于 $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$, 恒有



$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

这里, 应注意到稳定性是平衡状态邻域的动态特性。

定义 2.2 在定义 2.1 中, 若 δ 和 t_0 无关, 那么平衡状态 x_e 是一致稳定的 (u. s.)。

这里, 应注意到稳定和一致稳定的差别。下面用一个例子来说明这一点。

例 2.1 试判断如下系统的稳定性:

$$\dot{x} = (4t \sin t - 2t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

解 该系统的解析解为

$$x(t; x_0, t_0) = x_0 \exp(4 \sin t - 4t \cos t - t^2 - 4 \sin t_0 + 4t_0 \cos t_0)$$

对上述解析解进行分析, 可以发现该系统的平衡点 $x_e = 0$ 是稳定的, 但不是一致稳定的, 即定义 2.1 中的 δ 是 t_0 的函数。

定义 2.3 一自由动态系统的平衡状态 x_e 称为渐近稳定的 (a. s.), 如果

(1) x_e 是稳定的;

(2) 对于任意给定的 t_0 和实数 $\mu > 0$, 总存在 $r(t_0) > 0$ 和 $T(\mu, x_0, t_0) > 0$, 则对于 $\|x_0 - x_e\| \leq r(t_0)$, 恒有

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \mu, \quad \forall t \geq t_0 + T$$

这里, 应注意渐近稳定也是平衡状态 x_e 邻域的动态性, 且条件 (2) 并不隐含条件 (1)。

下面举一个例子来说明条件 (2) 并不隐含条件 (1)。

例 2.2 试判断如下极坐标系统的稳定性:

$$\begin{cases} \dot{r} = [\dot{g}(\theta, t)/g(\theta, t)]r, & 0 \leq r < \infty \\ \dot{\theta} = 0, & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

其中

$$g(\theta, t) = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta + (1 - t \sin^2 \theta)^2} + \frac{1}{1 + t^2}$$

解 该系统的解析解为

$$\begin{cases} r(t; r_0, \theta_0, t_0) = [g(\theta_0, t)/g(\theta_0, t_0)]r_0 \\ \theta(t; r_0, \theta_0, t_0) = \theta_0 \end{cases}$$

由解析解, 不难分析有如下极限存在:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(\theta_0, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t; r_0, \theta_0, t_0) = 0$$

可见系统满足条件 (2), 系统轨迹收敛平衡点 $r_e = 0, \theta_e = \theta_0$ 。

当 $t = \sin^{-2} \theta_0$ 时, 如下不等式成立:

$$g(\theta_0, t) = \sin^{-2} \theta_0 + \frac{\sin^2 \theta_0}{1 + \sin^2 \theta_0} \geq \sin^{-2} \theta_0$$

$$r(t; r_0, \theta_0, t_0) \geq [\sin^{-2} \theta_0 / g(\theta_0, t_0)]r_0$$