

理科数学

# 线性代数

欧维义 陈维钧 编

吉林大学出版社

理科数学

# 线性代数

欧维义 陈维钧 编

吉林大学出版社

理科数学  
线 性 代 数  
欧维义 陈维钧 编

---

责任编辑:李洪波

封面设计:孙 鸿

---

吉林大学出版社出版  
(长春市东中华路 29 号)

吉林省新华书店发行  
长春大学印刷厂印刷

---

开本:850×1168 毫米 1/32  
印张:12.25  
字数:303 千字

1993 年 3 月第 1 版  
1995 年 11 月第 2 次印刷  
印数:3001—8000

---

ISBN 7-5601-1299-4/O·148

定价:10.50 元

# 序

线性代数在理科各专业课程中被广泛地应用,是理科学生从事专业学习和科学研究的重要基础. 因此线性代数课程在理科各专业中有重要地位. 为了使理科学生有比较广泛、比较深入的线性代数知识和得到较好的训练,遵循少而精和重视基本方法、基础理论的原则,我们对原高等数学第四册进行了较大删减和修定. 修定后的教材更集中地体现了线性代数中“行列式与方程组; 矩阵在各种变换下的标准形及其应用; 线性空间与内积空间”的内容,有利于学生由易到难、循序渐进地学好线性代数.

本书的教学时数约 54 学时. 方阵的 Jordan 标准形一章,是供某些专业选用的. 同原教材相比,修定后的教材虽有明显提高,但由于水平所限,错误和不妥之处在所难免,敬请读者不吝指出.

编者

1992 年 8 月于吉林大学

# 目 录

第一章 行列式	(1)
§ 1 $n$ 阶行列式	(1)
1.1 数域	(1)
1.2 二阶、三阶行列式的结构	(2)
1.3 $n$ 阶行列式	(5)
§ 2 行列式的性质和计算	(9)
2.1 行列的互换性质	(9)
2.2 数乘行列式的性质	(11)
2.3 行列式的加法性质	(12)
2.4 行列式的计算举例	(14)
§ 3 展开定理	(20)
3.1 按行展开定理	(20)
3.2 Laplace 定理	(25)
§ 4 Cramer 定理	(29)
4.1 Cramer 定理	(29)
4.2 应用例子	(31)
第二章 线性方程组	(34)
§ 1 $n$ 维向量的线性关系	(34)
1.1 $n$ 维向量及其线性计算	(34)
1.2 向量的线性相关与线性无关	(35)
1.3 矩阵和矩阵的秩	(40)
1.4 向量组线性相关、线性无关的判别定理	(43)
1.5 最大线性无关向量组	(47)
§ 2 矩阵的初等变换	(51)

2.1	矩阵的行初等变换	(51)
2.2	矩阵的初等变换	(53)
2.3	在初等变换下矩阵的标准形	(53)
§ 3	齐次线性方程组	(63)
3.1	同解方程组的概念及其命题	(63)
3.2	关于齐次线性方程组的命题	(66)
3.3	解的结构定理	(70)
§ 4	非齐次线性方程组	(77)
4.1	有解的充要条件	(77)
4.2	非齐次线性方程组的解	(79)
4.3	解的结构定理	(82)
<b>第三章</b>	<b>矩阵及其在初等变换下的标准形</b>	<b>(91)</b>
§ 1	矩阵的运算	(91)
1.1	矩阵的线性运算	(91)
1.2	矩阵的乘法	(93)
1.3	行列式的乘法规则	(96)
1.4	矩阵的运算与矩阵的秩	(98)
§ 2	逆矩阵	(102)
2.1	逆矩阵及其求法	(103)
2.2	逆矩阵的基本性质	(106)
2.3	用初等变换求逆矩阵的方法	(108)
§ 3	分块矩阵	(114)
3.1	分块矩阵的概念	(114)
3.2	分块矩阵的乘法	(116)
3.3	分块初等矩阵	(118)
3.4	分块矩阵法的应用举例	(119)
§ 4	几种特殊的矩阵	(123)
4.1	对角形矩阵和三角形矩阵	(123)
4.2	对称矩阵和反对称矩阵	(127)

4.3	正交矩阵 .....	(129)
§ 5	在初等变换下矩阵的标准形 .....	(132)
5.1	标准形 .....	(132)
5.2	标准形的用法 .....	(133)
<b>第四章</b>	<b>对称矩阵在合同变换下的标准形与二次型</b> .....	(136)
§ 1	实对称矩阵在合同变换下的标准形 .....	(136)
1.1	例子 .....	(136)
1.2	矩阵间的合同关系及其性质 .....	(139)
1.3	对称矩阵在合同变换下的标准形 .....	(139)
1.4	求合同变换矩阵 $P$ 的方法 .....	(143)
1.5	惯性定律与实对称矩阵在合同变换下的标准形.....	(145)
§ 2	化二次型为平方和的方法 .....	(153)
2.1	二次型 .....	(153)
2.2	二次型的矩阵表示 .....	(155)
2.3	在满秩线性变换下化二次型为平方和 .....	(156)
2.4	用配方方法化二次型为平方和 .....	(158)
§ 3	实二次型的分类和判别 .....	(162)
3.1	惯性定律和二次型的标准形 .....	(162)
3.2	二次型的分类和判别 .....	(164)
3.3	(半)正定、(半)负定和不定矩阵.....	(171)
<b>第五章</b>	<b>方阵的相似标准形及其应用</b> .....	(174)
§ 1	矩阵的特征值与特征向量 .....	(174)
1.1	矩阵的特征值与特征向量 .....	(174)
1.3	特征值和特征向量的一些性质 .....	(178)
1.4	Schmidt 正交化方法 .....	(182)
§ 2	在相似变换下化方阵为对角形矩阵的条件 .....	(187)
2.1	相似矩阵及其性质 .....	(187)

2.2	相似对角形矩阵的主对角元素和相似变换矩阵	(188)
2.3	在相似变换下方阵化为对角形矩阵的条件	(189)
§ 3	在相似变换下方阵的标准形	(202)
3.1	实对称矩阵的标准形	(202)
3.2	正交矩阵的标准形	(210)
3.3	与方阵相似的上三角形矩阵	(215)
§ 4	相似变换下方阵标准形的应用	(220)
4.1	在解决综合性问题方面的应用	(220)
4.2	在解常系数齐次线性方程组方面的应用	(223)
<b>第六章</b>	<b>矩阵的 Jordan 标准形</b>	(232)
§ 1	$\lambda$ -矩阵及其在等价变换下的标准形	(232)
1.1	$\lambda$ -矩阵的概念	(232)
1.2	$\lambda$ -矩阵的等价关系	(234)
1.3	$\lambda$ -矩阵的等价对角形矩阵	(235)
1.4	行列式因子与 $\lambda$ -矩阵的标准形	(239)
§ 2	$\lambda$ -矩阵等价、方阵相似的充要条件	(243)
2.1	$\lambda$ -矩阵可逆、 $\lambda$ -矩阵等价的充要条件	(243)
2.2	初等因子与 $\lambda$ -矩阵等价的充要条件	(244)
2.3	初等因子的求法	(246)
2.4	矩阵相似的充要条件	(252)
§ 3	矩阵的 Jordan 标准形	(255)
3.1	矩阵的 Jordan 标准形	(255)
3.2	矩阵的有理标准形	(261)
3.3	相似变换矩阵的求法	(264)
§ 4	Hamilton-Cayley 定理及其应用	(268)
4.1	Hamilton-Cayley 定理	(268)
4.2	最小多项式及其求法	(270)



4.3	矩阵与对角形矩阵相似的充要条件	(274)
<b>第七章</b>	<b>线性空间和线性变换</b>	(276)
§ 1	线性空间	(276)
1.1	线性空间的概念	(276)
1.2	线性空间的一些简单性质	(277)
1.3	子空间的概念及其判别	(279)
§ 2	有限维线性空间	(284)
2.1	有限维线性空间的维数和基底	(284)
2.2	子空间的基底和维数	(288)
2.3	坐标和坐标变换	(290)
2.4	线性空间中的同构关系	(294)
§ 3	线性空间上的线性变换	(298)
3.1	线性变换及其基本性质	(298)
3.2	象子空间和核	(301)
3.3	线性变换的运算	(304)
§ 4	线性变换与矩阵的对应	(308)
4.1	线性变换与矩阵的对应	(308)
4.2	线性变换对应的矩阵随基底的变化	(314)
4.3	线性变换的特征值与特征向量	(316)
<b>第八章</b>	<b>内积空间</b>	(323)
§ 1	实内积空间	(323)
1.1	实内积空间的定义及其基本性质	(323)
1.2	度量矩阵	(325)
1.3	Cauchy-Schwartz 不等式	(327)
1.4	正交子空间	(328)
§ 2	标准正交基底	(331)
2.1	标准正交基底	(331)
2.2	标准正交基下的度量关系	(332)
§ 3	正交变换	(335)

3.1	正交变换 .....	(335)
3.2	正交变换的判别和运算 .....	(336)
3.3	正交变换的几何意义 .....	(339)
§ 4	复内积空间 .....	(342)
4.1	复内积空间 .....	(342)
4.2	度量矩阵和厄密矩阵 .....	(343)
4.3	长度和角度 .....	(344)
4.4	标准正交基底 .....	(344)
4.5	酉交变换和酉交矩阵 .....	(345)
答案与提示 .....		(346)

# 第一章 行列式

行列式的概念是线性代数中的基本概念之一,行列式的计算是线性代数中最基本的计算.行列式不仅是线性代数、数学各个领域的一个重要工具,而且也是其它自然科学、工程技术各个领域中的重要工具.

本章的主要内容是以  $n$  阶行列式的定义为基础,讨论  $n$  阶行列式的性质及其简便算法,并据此把求解二元、三元线性方程组的 Cramer(克莱姆)公式推广到  $n$  元线性方程组的情形.

本章的重点是熟练地掌握行列式的算法和正确地使用 Cramer 公式.

## § 1 $n$ 阶行列式

### 1.1 数域

我们知道在涉及与数有关的问题中,常常需要明确规定所考虑的数的范围.比如,一个二次方程  $x^2 + px + q = 0$ , 有没有解就与未知量所允许的取值范围有关.又如,任意两个整数的商不一定是整数,这就是说,限制在整数的范围内,除法不是普遍可以做的,而在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可以做的.

在线性代数中,为了强调数的取值范围,需要引进数域的概念.

**数域的定义** 设  $P$  是一些数组成的集合,其中包括 0 和 1. 如果对于  $P$  中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是  $P$  中的数,则称  $P$  为一个数域.

如果数集  $P$  中任意两个数作某一运算的结果都仍在  $P$  中,我们就说数集  $P$  对这个运算是封闭的. 因此,数域的定义也可以说成,如果一个包含  $0, 1$  在内的数集  $P$  对于加法、减法、乘法与除法(除数不为  $0$ )是封闭的,那末就称  $P$  为一个数域.

显然,全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域. 这三个数域我们分别用字母  $Q, R, K$  来代表. 全体整数组成的集合不是数域,因为不是任意两个整数的商都是整数. 但是数域这一概念所包含的数系远不只有有理数域,实数域和复数域. 事实上,数域是无穷多的. 比如,当  $\alpha, \beta$  为有理数时,容易验证,所有形如  $\alpha + \beta\sqrt{2}$  的数构成的数集,就是一个数域. 照这样我们可以举出任意多个数域的例子,并且有理数域是其中最小的,即任一数域  $P$  都包含有理数域. 事实上,由定义  $P$  含有  $1$ , 根据  $P$  对加法的封闭性知,  $1+1=2, 2+1=3, \dots, n+1=n+1, \dots$  全在  $P$  中,换句话说,  $P$  包含全体自然数. 再由  $P$  对减法的封闭性知,  $0-n=-n$  也在  $P$  中,因而  $P$  包含全体整数. 任何一个有理数都可以表成两个整数的商,由  $P$  对除法的封闭性,就知有理数包含在  $P$  中.

在本课程中讨论问题时,对数的运算常常只是四则运算,故可以认为在所讨论问题中,涉及的数总是属于某一数域.

## 1.2 二阶、三阶行列式的构成

在高中代数里,我们已经知道二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.1)$$

三阶行列式

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \quad (1.2)$$

都是一个数(如果没有特别说明,我们所说的数,通常指实数).

要知道怎样来推广行列式的概念,就应当去研究  $D_1$ 、 $D_2$  的展开式(即(1.1)式、(1.2)式右端)中的数是怎样构成的.

往下我们把行列式中横写的叫做行(row),竖写的叫列(column);行列式中的每一个数叫做行列式的元素,用  $a_{ij}$  来表示第  $i$  行第  $j$  列上的元素;行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线,从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线.

下面我们来看  $D_2$  的展开式(1.2)的结构.

**均匀分布组** 从(1.2)式右端的展开式可以看出,其中的每一项都是三个元素的乘积,这三个元素的行标不同,列标不同.即这三个元素刚好是取自不同行、不同列的元素.具有这种性质的三个元素,我们称它为  $D_2$  的一个均匀分布组.采用这种说法即知, $D_2$  的展开式(即(1.2)式的右端)中的每一项,都是  $D_2$  的一个均匀分布组的乘积.

**均匀分布组的数目** 根据均匀分布组的概念可知, $D_2$  的展开式中的任何一项都可以写成乘积

$$a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

的形式,这里  $i_1, i_2, i_3$  表示各元素所在的列数.

显然  $i_1$  可取 1, 2, 3 中的任何一个,因此有三种取法.取定  $i_1$  后,  $i_2$  只有两种取法;取定  $i_2$  后,  $i_3$  后有一种取法,于是行列式  $D_2$  的展开式中共有  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$  个均匀分布组的乘积.所以(1.2)式的右端包含 6 项.

**每项的符号** 在  $D_2$  的展开式中,有的乘积前面是正号,有的乘积前面是负号.试问每项的符号应根据什么来确定?在回答这个问题之前,先叙述奇偶排列的概念.

在  $n$  个自然数 1, 2,  $\dots$ ,  $n$  的一个排列

$$i_1 i_2 \cdots i_n$$

中的两个数,如果排在前面的数大于排在后面的数,则说它们是

逆序的(也说它们是反序的).

如果一个排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  的逆序次数的总和(称为反序数, 记成)  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$  是奇数, 则称  $i_1 i_2 \cdots i_n$  是奇排列; 如果  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$  是偶数, 则称  $i_1 i_2 \cdots i_n$  是偶排列.

比如, 在自然数 1, 2, 3, 4 的一个排列

$$4 \quad 2 \quad 3 \quad 1$$

中, 1 和它前面的三个数都是逆序的, 2 和它前面的 4 是逆序的, 3 和它前面的 4 是逆序的, 于是

$$\tau(4231) = 3 + 1 + 1 = 5$$

所以 4231 是一奇排列.

实际分析表明: 在均匀分布组  $a_{i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$  的行标按自然顺序排列的前提下, 若列标构成的排列是奇排列, 则分布组的乘积前面是负号; 若列标构成的排列是偶排列, 则分布组的乘积前面是正号. 即  $D_2$  中的每个均匀分布组, 在  $D_2$  的展开式中给出项

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

若用记号  $\sum_{i_1 i_2 i_3}$  表示对 1, 2, 3 的所有排列求和, 则依据上面的讨论知, (1.2) 式可以改写成

$$D_2 = \sum_{i_1 i_2 i_3} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \quad (1.3)$$

实际分析还可知道, 若把  $D_2$  的每一个均匀分布组的乘积  $a_{i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$ , 按列标的自然顺序改写成

$$a_{i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} = a_{q_1 1} a_{q_2 2} a_{q_3 3}$$

则有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 q_3)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} a_{q_3 3}$$

因此, (1.2) 式又可以写成

$$D_2 = \sum_{q_1 q_2 q_3} (-1)^{\tau(q_1 q_2 q_3)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} a_{q_3 3} \quad (1.4)$$

每个均匀分布组乘积的符号, 也可以这样来确定: 逐次互换

两行或两列,如果经过偶次互换恰好使该均匀分布组的元素移到新行列式的主对角线上,则该均匀分布组所决定的乘积项取正号;如果经过奇次互换,恰好使均匀分布组的元素移到新行列式的主对角线上,则该均匀分布组所确定的乘积项取负号.

比如,要看均匀分布组  $a_{21}a_{32}a_{13}$  所确定的项的符号. 由

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

可以看出,第一列和第二列交换之后,再交换(经过第一次交换后的)新行列式的第一列和第三列,原来的  $D_2$  就变成

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这时均匀分布组  $a_{21}a_{32}a_{13}$  的每个元素都位于新行列式的主对角线上. 这里我们只进行了两次列交换,即经过偶次行列互换,恰好把  $a_{12}a_{32}a_{13}$  移到主对角线上,故它确定的项取正号,即乘积  $a_{21}a_{32}a_{13}$  就是(1.2)式右端中的一项.

当然要使这种确定符号的方法有意义,必须证明:把每一均匀分布组  $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$  移至新行列式的主对角线所需行列互换次数的奇偶性与互换的具体方法无关. 关于这一结论的证明,可参看武汉大学数学系数学专业编《线性代数》(修订本), (人民教育出版社(1983年)). 在理论上还可以证明,采用上述两种方法确定的每项的符号是一致的.

到此,我们就完全弄清楚了三阶行列式的结构. 容易验证,二阶行列式也是这样构成的,以此为模型我们来定义  $n$  阶行列式.

### 1.3 $n$ 阶行列式

**定义 1.1** 由  $n^2$  个数  $a_{ij}(i, j=1, 2, \dots, n)$  作成的  $n$  行  $n$  列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为  $n$  阶行列式. 它表示数

$$\sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \quad (1.5)$$

其中  $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$  是  $n$  阶行列式的均匀分布组的乘积 (因此  $i_1 i_2 \cdots i_n$  是自然数  $1, 2, \cdots, n$  的一个排列),  $\sum$  是对  $1, 2, \cdots, n$  的所有排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  求和. 因此, 项数总和为  $n!$ . (1.5) 式的右端称为该行列式的展开式.

在使用定义 1.1 时, 还应当注意:

1. 从 § 1.1 的讨论知, 由均匀分数组  $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$  所确定的项的符号, 也可以依据把  $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$  的元移到新行列式的主对角线上所需行列互换次数的奇偶性来确定.

2. 可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

例 1.1 证明对角形行列式



$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & & \\ & & a_2 & \\ & \ddots & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 \cdots a_n$$

在行列式中,上角(下角)的“0”表示该上角(下角)的所有元素都是0.

证 若记

$$a_{1n} = a_1, a_{2,n-1} = a_2, \cdots, a_{n1} = a_n$$

则行列式  $D_1$  的所有均匀分布组中,乘积不为零的只有

$$a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \cdots a_{n1} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

此处排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$ , 即  $n(n-1)(n-2) \cdots 321$  的反序数

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$\begin{aligned} D_1 &= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

例 1.2 证明三角形行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证 我们来考察在  $D_2$  的展开式中不为零的项有哪些? 取一般项

$$\pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{n-1i_{n-1}} a_{ni_n}$$

注意到行列式的第  $n$  行除  $a_{nn}$  外, 其它各元素都是零, 所以  $i_n$  只能取  $n$ , 即  $i_n = n$ . 而  $n-1$  行除  $a_{n-1,n-1}, a_{n-1,n}$  外, 其它元素都是零. 考虑到在行列式的每列只能取一个元素, 并且前面已取  $i_n = n$ , 因此再取就只能取  $i_{n-1} = n-1$ . 一般地, 则是  $i_k = k$ . 所以, 在  $D_2$  的展开式中除  $\pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$  外, 其余项都是零. 这项的符号显然是正