古代数学名题选解

〔苏〕B．Д．奇斯佳科夫
潘斯一　林光杞　编译编著

建教育出版社

古代数学名题选解

〔苏〕В. Д. 奇斯佳科夫　编著

潘斯一　林光杞　编译

福建教育出版社

（闽）新登字02号

古代数学名题选解

〔苏〕B. Д. 奇斯佳科夫　编著
潘斯一　林光杞　编译
福建教育出版社出版发行
（福州梦山巷27号　　邮编350001）
福建省新华书店经销
福建教育出版社印刷厂印刷
（福州铜盘崎上　邮编350003）
787×1092毫米　32开本　7.875印张　162千字
1993年6月第一版　　1993年6月第一次印刷
印数：1—3.300
ISBN7－5334－0466－1/G·323　　定价：3.70元

前　言

苏联B. 奇斯佳科夫编著的《基础数学中的古代问题》一书，10多年来在苏联已经出版过4次，深受苏联广大读者的欢迎。鉴于目前我国尚无译本，我们将其译出，可能对广大的中学生和中学教师有一定的实用价值和参考价值。

全书共分两大部分：问题；历史说明、问题解答和提示。

第一部分收集了从古代巴比伦、埃及、希腊开始直至19世纪为止的世界不同民族、不同朝代和不同国家的有关初等数学的经典名题248道。第二部分对所选问题的来源出处、历史背景、作者生平以及问题的解法都作了相当充分的说明，不啻是一部简明的数学史。

本书问题解答占了绝大部分篇幅，所使用的方法在很大程度上不同于其他教科书，它更多地着墨于如何分析问题，寻找其内在规律，然后巧妙地予以解决。从而改变人们对数学高深、抽象、枯燥的看法，激发独创精神，促进主动思考，益莫大焉。此外，本书与国外涉及数学史、数学故事各书最大不同之处在于详细地介绍了我国古代数学所取得的辉煌成就，如此公正不偏的科学态度，在国内有关译著中实属罕见。这对我国广大读者了解中华民族在世界古代文化之林所占的重要地位是很有积极意义的。

本书在翻译时尽量采用当前大家都熟悉的记号和现代表达形式，以冀给广大的中学生和青少年带来阅读的方便。当然，限于水平，译文中的错误缺点在所难免，欢迎读者批评指正。

潘斯一　林光杞

内 容 提 要

本书第一部分收集了从古代巴比伦、埃及、希腊开始直至19世纪各国有关初等数学的经典名题248道。第二部分是本书的重点，除了对所选问题作了详细的解答外，还对发现和提出这些名题的著名数学大师们的生平及有关历史背景，以及古代巴比伦、埃及、希腊、中国、印度等国所取得的数学成就作了简要的介绍。全书内容丰富，叙述深入浅出，不啻是一部简明的数学史，对中学数学教师、中学生及广大数学爱好者丰富数学知识和提高数学修养很有帮助。

目　录

第一部分　问题

第二部分　历史说明、解答和提示

第一部分　问　　题

巴比伦问题

1. 巴比伦人把圆内接正六边形的周长当作该圆的周长。求巴比伦人用以作π的近似值。

2. 把直角三等分。

3. 巴比伦人用两组对边和的一半的乘积来确定四边形的面积。试问，对怎样的四边形，这公式才能准确地算出其面积？

巴比伦人有时也用腰乘底边的一半来确定等腰三角形的面积。问：在怎样的条件下，这种三角形面积的计算公式才是四边形面积计算公式的极限情况（特殊情况）？

埃及问题

莱茵特纸草书上的问题

4. 求一个数，若已知把这数与它的$\frac{2}{3}$相加再减去所得和的$\frac{1}{3}$，其结果是10。

5. 7个人，每人养7只猫，每只猫捕7只老鼠，每只

老鼠啃7串麦穗，每串麦穗上长7个量器的大麦。试问，这数列中最大的数是多少？它们的和又是多少？

6．埃及人要将一个圆的面积用一样大的正方形面积来代替时，是取圆直径的$\frac{8}{9}$作为后者的边长，试由此求出π的近似值。

7．埃及人用腰和底边乘积的一半来计算等腰三角形的面积。如果一个等腰三角形的底边等于4，腰等于10，试求最大误差是百分之几。

8．埃及人用两底和的一半与腰相乘来计算等腰梯形面积。试计算这种误差的百分数。

莫斯科纸草书上的问题

9．如果正四棱台的高是6，下底边长是4，上底边长是2。试确定正四棱台的体积。

10．已知矩形的面积和两边的比值，求它的边长。

阿赫姆斯纸草书上的问题

11．某人从宝库中拿走了$\frac{1}{13}$的财宝，后来又从中拿走余下的$\frac{1}{17}$，这时，他的宝库中还有财宝150件。问起初宝库中的财宝共有多少件？

希腊问题

毕达哥拉斯问题

12. 证明：在直角三角形斜边上所作的正方形面积等于两直角边上所作的正方形面积之和.

13. 求出所有的毕达哥拉斯数，即一切满足方程$x^2+y^2=z^2$的正整数组x，y，z.

14. 从1开始的任意个连续奇数的和都是完全平方数.

15. 除1以外的每个奇数都是两个平方数的差.

在毕达哥拉斯学派里，这命题是用几何的例子予以证明的。你知道那是什么例子吗？

请你不用几何的例子，而用最一般的形式来证明这命题的正确性.

希波克拉提斯问题

16. 证明：夹在以直角三角形斜边为直径所作的半圆和以两直角边为直径所作的半圆之间的两个月牙形面积之和等于这直角三角形的面积.

欧几里得问题（选自《几何原本》）

17. 在已知线段AB上求作等边三角形.

18. 平分一个任意角.

19. 求作一个平行四边形，它的边的交角要等于一个已

知角，而面积又应与一个已知三角形的面积相等。

20．在一个已知圆内作一个内接三角形，使它与一个已知三角形的三个内角分别相等。

21．把一条已知的线段分成这样的两部分，使整条线段与两段中的一段所围成的矩形面积等于剩下那段所作成的正方形面积（黄金分割问题）。

22．证明质数是无限的。

阿波罗纽斯问题

23．求作一个圆，使它与三个已知圆都相切。

阿基米德问题

24．若一个圆外接于一正方形而另一个圆内切于这正方形，则外接圆面积比内切圆面积大一倍。

25．阿基米德证明了：(1)每个圆都与一个直角三角形等积，如果它的半径是等于一条直角边而圆周长等于另一条直角边；(2)圆面积与它直径的平方之比为11：14。

试证阿基米德的这两个结论与现代的计算准则——圆面积等于$\frac{22}{7}r^2$——是一致的。

26．从半圆ABC上B点向直径AC引垂线BD，再以AD和DC为直径作两个半圆AFD和DHC(图1)。

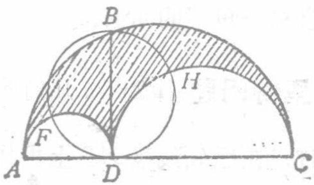

图1

证明：所得到的图形

$AFDHCB$ 的面积等于以 BD 为直径的圆的面积。

27. 球缺的表面积等于以从球缺的顶点向底面的圆周所引的线段为半径的圆的面积。

28. 分别求与已知的圆锥和圆柱等体积的球。

29. 证明：以球的大圆为底而以该球的直径为高的圆柱，其体积等于球体积的$\frac{3}{2}$，表面积也等于球表面积的$\frac{3}{2}$。

30. 求无穷递减几何级数

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots$$

的和。

31. 求自然数列前 n 个数的平方和。

32. 说出这样一个数，它不仅要大于地球这么大一堆沙粒的数目，而且还要大于“宇宙”这么大一堆沙粒的数目。这里是把“宇宙”看成一个球，它的球心位于地球的中心，半径等于地球到太阳之间的距离。

33. 用圆规和直尺近似地作出正七边形。

34. 公牛问题。

朋友，请帮我算一算

　　太阳神有多少头公牛？

在西西里岛的沃土上，

太阳神向来放牧着

　　白色、黑色、棕色和杂色的四群牛。

牛群中公牛不仅数量上占优势，而且——

　　各色公牛之间还得保持如下的关系：

白色公牛数恰为黑色公牛的一半再加三分之一，

还要添上棕色的公牛数。
黑色公牛数却是杂色公牛的四分之一再加五分之一，
也要添上棕色的公牛数。
杂色公牛数又是
白色公牛的六分之一再加七分之一，
仍要添上棕色的公牛数。
牛群中的母牛，总头数虽少，然而——
各色母牛的数量依然存在下述关系：
如果把同色的公母牛合群，那么，白色母牛头数是
黑色牛群的三分之一再加上四分之一。

黑色母牛头数是杂色牛群的四分之一再加上五分之一。

杂色母牛头数是
棕色牛群的五分之一再加上六分之一。
棕色母牛头数是
白色牛群的六分之一再加上七分之一。
啊，朋友，请告诉我——
太阳神共有多少头公牛？
它们按颜色区分各是多少？还要告诉我——
四种颜色的母牛，各是多少头？
不过，朋友，请你慢一点，
先不要自作聪明，不要傻里傻气地急着开始算。
你应该仔细地想一想，
要算太阳神的公牛数
还缺什么条件？

我再告诉你，

若把黑白两群牛赶到一起，

它们可以在

辽阔的西西里岛的大地上，

排成一个硕大无比的正方形的队列。

当把棕色与杂色牛合群时，

却可以排成一个阶梯形的队伍——

从头一排的一头牛算起

各排依次加一

恰好是个实实在在的等边三角形牛阵。

现在，如果你动一动脑筋，那么，

朋友，你便能算出各个牛群的头数。

这时，你就能作为

一个胜利者

自豪地昂首！

你，将被认为

是个足智多谋者，

比之芸芸众生

着实高出一筹！

古代著名的几何问题

立方倍积问题

35. 作一条立方体的棱，使这立方体的体积是一个已知立方体体积的两倍．试用“插入法”（参看提示部分）进行作图．

三等分角问题

36. 试将一个任意角三等分。可用阿基米德方法，借助于圆规和上面刻有两个记号的直尺来作图（参阅提示部分）。

圆化方问题

37. 作一正方形，使它的面积与一个已知圆面积相等。可借助毕格三角形来近似解题（参阅提示部分）。

依菅西克问题

38. 证明：在项数为偶数的等差数列中，后一半项的和与前一半项的和的差是总项数一半的平方倍数。

海伦问题

39. 已知三角形的三条边分别是 $a=13$，$b=14$，$c=15$，求这个三角形的面积。

40. 求边长是连续整数且面积亦为整数的三角形（海伦三角形）。

尼可马赫问题

41. 证明：如果把全体奇数数列分组，各组的项数按自然数顺序递增，那么，每组中各项的和就等于该组项数的立方。

托勒密问题

42. 证明：圆内接四边形对边乘积的和等于对角线的乘

积.

丢番图问题（选自《算术》）

43．求这样三个数，使最大的数比中间那个数要大最小那个数的$\frac{1}{3}$；中间的数比最小的数要大最大那个数的$\frac{1}{3}$；最小的数要比中间的数的$\frac{1}{3}$大10.

44．解方程组

$$\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=68. \end{cases}$$

45．一个直角三角形的一条直角边是一完全立方数，另一条直角边可表成这立方数与它的底数（即一次幂）的差，斜边是这立方数与它底数的和．求各边长．

46．试把100这个数作这样两次划分，使得在第一次划分中，大的部分比第二次划分中小的部分大一倍，而在第二次划分中，大的部分比第一次划分中小的部分大两倍．

47．求两个数，使得它们的和是20而积是96.

48．求两个数，使得它们的比是3而平方和与这两数和的比是5.

49．有三个数，已知前两数的和与第三数的乘积是35，第一、三两数的和与第二数的乘积是27，第二、三两数的和与第一数的乘积是32．求这三个数．

50．求两个数，使得它们的乘积加上它们中间的任意一

个都会成为完全立方数①。

51. 求三个这样的数，使得它们的和以及它们中间任意两个的和都是完全平方数。

巴普斯问题（选自《数学汇编》）

52. 在角平分线上给定一个点D，过该点引一条直线，要求它在角内部的线段为已知长。

53. 证明：在两圆内，两相似弓形的面积与作为弓形底边的弦的平方成比例。

54. 在一个三角形的一条边上向这三角形内侧作一平行四边形，使得两个顶点在三角形外部，则它的面积与这样的两个平行四边形面积之和相等，它们是分别以三角形的另外两条边为边且其对边分别通过头一个平行四边形的两个顶点。

《希腊文选》上的问题

55. “请告诉我，著名的毕达哥拉斯，有多少学生到您的学校来听您的讲座？”

“有这么多，”哲学家回答说，“他们当中一半人跟我学数学，四分之一学音乐，七分之一尚未跟我交谈过，此外，还有三个女生。”

试问，到校听毕氏讲座的共有多少人？

---

①这里的完全立方数未必指整数，例如$\frac{8}{27}$也算完全立方数，因为$\frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$。——译者注