高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2013

考研数学复习教程

（线性代数分册）

● 主编 王 莉

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

考研数学
复习教程
(线性代数分册)

2013

● 主编　王　莉

KAOYAN SHUXUE
FUXI JIAOCHENG (XIANXING DAISHU FENCE)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书包括以下部分：

一、考核内容要点——本部分对《数学考试大纲》所要求的内容进行了全面、透彻的讲解，注重对基本概念、基本理论和基本方法的解读。

二、补充公式与结论——本部分对一般教材中没有的、但对知识理解和解题有益的公式和结论进行了较为全面的补充，并对难于理解的公式和结论给出了证明或举例说明。

三、典型问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色：在对历年试题研读的基础上，详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题，抛开其表面形式，剖析出其本质特征，给出了每类问题的快捷有效的处理方法，并注重每类问题的各种变式，使读者能够见到题目就知从哪入手，并快速准确求解。

四、强化训练——本部分试题的难易程度十分贴近考研真题，有的略高于真题，而且考查的知识点尽量不重复，望读者完成。

本书适用于考研数学的各个卷种，包括数学一、数学二、数学三以及农学门类联考数学等，其内容上的差异，书中有详细标注，请读者阅读时注意。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习教程. 线性代数分册/王莉主编. --北京:高等教育出版社,2012.7

ISBN 978-7-04-035215-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第142094号

策划编辑 刘 佳　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王 洋　　版式设计 范晓红

责任校对 陈旭颖　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	9.5	版　　次	2012年7月第1版
字　　数	320千字	印　　次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	18.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 35215-00

前　言

为了帮助有志于报考硕士学位研究生的广大同学全面、系统、深入、高效地复习数学课程，提高考研应试能力，并为今后研究生学业奠定坚实的数学基础，作者根据教育部考试中心最新颁布的《数学考试大纲》，结合作者多年在全国各地辅导班的授课经验，以作者的考研辅导讲义为蓝本，切实考虑到考研学子的不同需求，编写了**《考研数学复习教程》（包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计等分册）、《考研数学基础过关500题》、《考研数学大纲配套1000题》、《考研数学10年真题解析》**以及**《考研数学全真模拟10套卷》**等系列丛书。其中**《考研数学基础过关500题》**适宜于复习前期配合教材使用——夯实基础；**《考研数学复习教程》**与**《考研数学大纲配套1000题》**适宜于复习中期攻坚阶段使用——强化解题定式训练，培养解题能力；**《考研数学10年真题解析》**与**《考研数学全真模拟10套卷》**适宜于后期使用——模拟演练、巩固提高。考生可根据自己的具体情况选用。

本书**《考研数学复习教程（线性代数分册）》**的结构及特点如下：

一、考核内容要点——本部分对《数学考试大纲》所要求的内容进行了全面、透彻的讲解，不是"定义"、"定理"的简单罗列，注重对基本概念、基本理论和基本方法的解读。在体系上也不同于一般教材，注重各部分内容的有机联系，普遍采用表格将相近的内容列在一起，便于读者类比把握。

二、补充公式与结论——本部分对一般教材中没有的、但对知识理解和解题有益的公式和结论进行了较为全面的补充，并对难于理解的公式和结论给出了证明或举例说明。

三、典型问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色：在对历年试题研读的基础上，详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题，抛开其表面形式，剖析出其本质特征，给出了每类问题的快捷有效的处理方法，并注重每类问题的各种变式，使读者能够见到题目就知从哪入手，并快速准确求解。

四、强化训练——本部分按照考研试卷"选择题"、"填空题"、"解答题"的题型顺序精选编排了适量的经典习题，其中一部分是作者亲自命制的。这些题目几乎涵盖了考研数学所涉及的所有问题，难易程度十分贴近考研真题，有的略高于真题，而且考查的知识点尽量不重复，望读者完成。

本书适用于考研数学的各个卷种，包括数学一、数学二、数学三以及农学门类联考数学等，其内容上的差异，书中有详细标注，请读者阅读时注意。

在编写本书过程中，作者参考了许多教材和有关著作，引用了其中的一些例子，恕不一一列出，在此谨向有关作者致谢。另外，吴振奎先生百忙之中审阅了书稿，刘舒强先生也提出了一些建设性意见，在此一并致谢！

鉴于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请同行专家和读者批评指正。

编者

2012年6月于北京

阅读手记

数学不仅在各级教育中举足轻重，它也是各类统考中主要科目之一。

考研数学问题有其自身特点，它与通常在校学习数学时所遇的问题不尽相同，乍看熟悉但又陌生，这些问题往往是概括、总结、凝练了数学的精华，巧妙而不繁琐，深刻而不艰涩，处处蕴含凝聚着拟题专家的劳动和汗水。

倘若没有扎实的数学功底，没有经过恰当的训练，往往较难应付——有些题目你会觉得无从下手（正如数学竞赛，即便是小学竞赛问题，往往也会难住不少“大家”）。由此看来，参加考前训练是必须的，也是重要的。

现实告诉人们：老一辈考研专家已渐失魅力，这也是自然规律，历史的必然。当然这也是希望与未来所在，人们也期待新人的出现与成才。

王莉教授是全国年轻的数学考研辅导的希望，也是领军人物之一，颇受考研学子的爱戴。他的讲课更有特点：首先适应潮流，与考研试题更贴近，与年轻人鲜有“代沟”；再者是思路清晰、讲解细微、推理流畅，做到有分析、有过程、有总结、有练习。

本书正是他多年授课经验的积累与汇聚，也是他呕心沥血之所创、匠心立意之所在。

不同风格、不同思路、不同写法考研辅导书籍的出版，无疑给考研学子提供了更多的选择。

与传统“大家”的此类书籍不同，他的书中无哗众取宠的章节，例题乃至字句、内容更为贴近当下学生的水平，又不拘于此，读起来亲切、生动、易懂。更不似某些考研书十几年不修，始终一副老面孔。

本书的出版为考研图书市场吹来一股暖暖的春风，对广大考研学子来讲实乃一大幸事。

吴振奎

2012年3月于天津

目　录

第一章　行　列　式

一、考核内容要点

1. 行列式的概念

(1) 排列及其逆序数

定义 1.1　把 n 个不同的元素 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 按某个次序排成一列称为这 n 个元素的一个 n 级全排列，简称为排列. 规定排列中由小到大为标准次序. 若排列中某两个元素的次序与标准次序不同（大的在前，小的在后），则这两个数构成了一个逆序. 一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中所有逆序的总数称为此排列的逆序数，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为偶数时，称排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列；当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为奇数时，称排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列.

例如，5 级数排列 12345 是标准排列. 在排列 25143 中，有逆序 21,51,54,53,43，故 $\tau(25143)=5$，所以排列 25143 是奇排列. 由 1,2,3,4,5 构成的所有的 5 级排列共有 5! 个. 类似地，由 $1,2,\cdots,n$ 构成的 n 级排列共有 $n!$ 个.

(2) 二、三阶行列式

由对角线法则可得二、三阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由于对角线法则对 4 阶及 4 阶以上行列式不适用，所以高阶行列式的计算要另想他法.

观察上述二、三阶行列式结果不难发现以下结论：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2};\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1,2 构成的所有 2 级排列求和；$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 构成的所有 3 级排列求和.

以三阶行列式为例，其规律是：每一项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积；每一项的行标（第一个下标）都是标准排列 123，该项的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$，$j_1j_2j_3$ 为该项的列标（第二个下标）排列. 因为由 1,2,3 构成的 3 级排列共有 $3!=6$ 个，所以三阶行列式共有 6 项代数和.

上述规律对 4 阶及 4 阶以上行列式也是成立的，由此可得 n 阶行列式定义.

(3) n 阶行列式定义

定义 1.2　n 阶行列式

$$D_n=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

注意,行列式 D_n 是一个数值,它由 $n!$ 项代数和组成,每项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积,其中带正号与带负号的项各占一半.

例 1.1 设 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$,试求 $f(\lambda)$ 中 λ^2 与 λ 的系数.

解 记 $f(\lambda)=\det(b_{ij})_{3\times3}$. 根据行列式定义,含 λ^2 的项只可能由 $(-1)^{\tau(123)}b_{11}b_{22}b_{33}=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33})$ 这一项中产生,且为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2$,故 $f(\lambda)$ 中 λ^2 的系数为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33})$.

类似地,$f(\lambda)$ 中含 λ 的项可由以下几项中产生.

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(123)}b_{11}b_{22}b_{33}+(-1)^{\tau(132)}b_{11}b_{23}b_{32}+(-1)^{\tau(321)}b_{13}b_{22}b_{31}+(-1)^{\tau(213)}b_{12}b_{21}b_{33}\\ =&(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33})-(\lambda-a_{11})(-a_{23})(-a_{32})-(-a_{13})(\lambda-a_{22})(-a_{31})-(-a_{12})(-a_{21})(\lambda-a_{33}).\end{aligned}$$

容易求得 λ 的系数为

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})\\ =&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

注 经进一步计算可得

$$f(\lambda)=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 的特征多项式. 特征方程 $f(\lambda)=0$ 的根是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(4) 几个基本形行列式的值

由行列式的定义可求得以下几个基本形行列式的值,它们在行列式的计算问题中发挥着重要作用.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \therefore & \\ a_{n1} & & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & a_{1n} \\ & \therefore & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\cdots a_{n1}.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i. \qquad \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \therefore & & \\ \lambda_n & & & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

2. 行列式的性质

转置	行列式与它的转置行列式的值相等,即 $\lvert \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\rvert=\lvert \boldsymbol{A}\rvert$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵.
互换	互换行列式的两行(列),行列式的值变号. **注** 若行列式中有两行(列)元素相同,则行列式的值为 0.

续表

数乘	行列式某行(列)的公因子可提出(或数乘行列式等于用该数乘以行列式的某一行(列),其他行(列)的元素不变),即 $$k\mid A\mid=\begin{vmatrix} & * & \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ & * & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & ka_{1j} & \\ * & \vdots & * \\ & ka_{nj} & \end{vmatrix}.$$ **注** 若行列式中有两行(列)元素对应成比例,则行列式的值为0.
分裂	若行列式中某行(列)元素均为两数之和,则可分解为两个行列式之和,即 $$\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ & * & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & * & \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} & * & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & * & \end{vmatrix}.$$ **注** 其余行(列)的元素不变.
倍加	将行列式的某行(列)元素 k 倍加到另一行(列)上,行列式的值不变.

利用行列式的性质可将复杂的行列式转化为形式简单的行列式计算.

例 1.2 计算3阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}.$$

解

$$D_3\xlongequal[r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div(x+y+z)}(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-2zr_1]{r_2-2yr_1}(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x-y-z & 0 \\ 0 & 0 & -x-y-z \end{vmatrix}\xlongequal{\text{上三角}}(x+y+z)^3.$$

注 计算行列式问题要充分利用行列式的性质把行列式化简再计算. 本例将所求行列式化简成了上三角形行列式. 本题若直接用对角线法则计算,则较繁琐.

例 1.3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是3维列向量,记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则行列式 $\mid\boldsymbol{A}\mid$ 等于

(A) $\mid(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)\mid$.　　(B) $\left|\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1,-2\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3\right)\right|$.

(C) $\mid(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)\mid$.　　(D) $\mid(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\mid$.

解 对于选项(A),

$$\mid(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)\mid\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\mid(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\mid=-\mid\boldsymbol{A}\mid.$$

对于选项(B),

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1,-2\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3\right)\right|\xlongequal[c_3\div(-1)]{c_1\div\left(-\frac{1}{2}\right),c_2\div(-2)}-\mid(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\mid=-\mid\boldsymbol{A}\mid.$$

对于选项(C),

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)|\xlongequal{\text{将 } c_1 \text{ 拆分}}|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)|+|(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)|.$$

其中 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)|\xlongequal{c_3-c_1}|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)|\xlongequal{c_2-c_3}|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=|\boldsymbol{A}|$,

$$|(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)|\xlongequal{c_2-c_1}|(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)|\xlongequal{c_3-c_2}|(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)|$$

$$\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)|\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3}|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=|\boldsymbol{A}|,$$

故选项(C)的行列式为 $2|\boldsymbol{A}|$.

对于选项(D),

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)|\xlongequal{c_3-c_2}|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|\xlongequal{c_2-c_1}|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=|\boldsymbol{A}|,$$

故应选(D).

3. 行列式按行(列)展开定理

(1) 余子式与代数余子式

在 n 阶行列式 $D_n=\det(a_{ij})$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素,留下来的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式展开定理

定理 1.1 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}.$$

注 1) 余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} 都是比原行列式低一阶的行列式,其值只与元素 a_{ij} 的位置(处于第几行第几列)有关,而与 a_{ij} 的取值无关,且 M_{ij} 与 A_{ij} 的值当 $i+j$ 为偶数时相等,当 $i+j$ 为奇数时相差一个符号.

2) 一般地,由行列展开定理有

$$k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ k_1&\cdots&k_n\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}(\text{第 } i \text{ 行}),$$

即把原行列式中的第 i 行元素去掉分别换成 $k_1,k_2,\cdots,k_n$. 由此可得以下结论.

定理 1.2 行列式某行(列)元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j;$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

例 1.4 设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&7&0\\1&-1&1&-1\\2&0&-1&0\\5&2&0&3\end{vmatrix}$,则 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$______,$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=$______.

解 由余子式与代数余子式的关系知

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}.$$

又行列式中 $a_{21}=1,a_{22}=-1,a_{23}=1,a_{24}=-1$,由定理 1.2 可得

$$-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=-(a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44})=0.$$

由定理 1.1 的“注 2)”可知，$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$即为用 1,1,1,1 替换 D 中的第 3 列所得的行列式，即

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=\begin{vmatrix}3&0&1&0\\1&-1&1&-1\\2&0&1&0\\5&2&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+2r_2}\begin{vmatrix}3&0&1&0\\1&-1&1&-1\\2&0&1&0\\7&0&3&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } c_2 \text{ 展开}}(-1)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&1&0\\2&1&0\\7&3&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } c_3 \text{ 展开}}-(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}=-1.$$

注 本题若直接计算 $M_{41},M_{42},M_{43},M_{44}$，则较为繁琐. 另外，计算$-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$时，也可将其改写成一个行列式再计算，即只要计算用$-1,1,-1,1$ 替换原行列式的第 4 行所得的行列式，由于其中有两行元素对应成比例，故其值为零.

例 1.5 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},$$

其中 A_{ij}是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的元素 a_{ij}的代数余子式，矩阵 $\boldsymbol{A}^*$称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

证 由定理 1.1 及定理 1.2，有

$$\boldsymbol{AA}^*=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&\cdots&0\\0&|\boldsymbol{A}|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

同理可得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

注 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 是线性代数中非常重要的公式，有关伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$的问题几乎都要用到它，请读者要高度重视. 另要注意代数余子式 A_{ij}在伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中的位置 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$.

4. 方阵的行列式

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则

(1) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，$k$ 为常数.

(2) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$.

(3) $|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^k$，$k$ 为整数.

(4) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n\geqslant 2)$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

注意，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

5. 克拉默法则

定理 1.3(克拉默法则) 若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式$|A|\neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{|A|},\quad x_2=\frac{D_2}{|A|},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{|A|}.$$

其中$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式$|A|$中第j列的元素用$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$替换后所得的$n$阶行列式.

推论 若非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$无解或有无穷多解,则其系数行列式必为零,即$|\boldsymbol{A}|=0$.

定理1.4 若齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的系数行列式$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则方程组只有零解;反之,若$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解,则必有$|\boldsymbol{A}|=0$.

事实上$|\boldsymbol{A}|=0$是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解的充分必要条件.

例1.6 已知线性方程组$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$.若此方程组有唯一解,则$a$应满足________;若此方程组无解,则$a=$________;若此方程组有无穷多解,则$a=$________;

解 因

$$D=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&a-2&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+(a-2)r_2}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&0&a^2-2a-3\end{vmatrix}.$$

令$D=0$,得$a=-1$或3.故当$a\neq -1$且$a\neq 3$时,$D\neq 0$,方程组有唯一解.若方程组无解或有无穷多解,则$a=-1$或3.

当$a=-1$时,用加减消元法(即矩阵的初等行变换)求解方程组,得

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&3\\1&-1&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&-3&-3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-4\end{bmatrix}.$$

其等价方程组为

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1,\\ \quad -x_2-x_3=1,\\ \qquad\quad 0=-4.\end{cases}$$

显然第3个方程是矛盾方程(即$r(\boldsymbol{A})=2,r(\bar{\boldsymbol{A}})=3,r(\boldsymbol{A})\neq r(\bar{\boldsymbol{A}})$),此时方程组无解.

同理可验证$a=3$时,方程组有无穷多解.

二、补充公式与结论

1. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为方阵,则

$$\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\C&B\end{vmatrix}=|A||B|,$$

$$\begin{vmatrix}O&A_{m\times m}\\B_{n\times n}&O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C&A_{m\times m}\\B_{n\times n}&O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O&A_{m\times m}\\B_{n\times n}&C\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|.$$

其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$为同阶方阵.注意,$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq|AD-BC|$.

2. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，其中 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

下面以 3 阶矩阵为例证明此结论.

例 1.7 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 的 3 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，证明：

(1) $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$；

(2) 若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\lambda_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$，$\lambda_2=\lambda_3=0$.

证 (1) 因 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) \\ &= \lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \quad ①$$

又由例 1.1 的“注”可知

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad ②$$

比较①,②中 λ^2 的系数与常数项可得

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

(2) 若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则由矩阵秩的定义可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的 2 阶及 2 阶以上的子式均为零，此时由②式得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2.$$

令 $f(\lambda)=0$，得 $\lambda_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$，$\lambda_2=\lambda_3=0$.

注 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$（单根），$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$（$n-1$ 重根）.

4. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

三、典型问题与方法技巧

1. 关于余子式、代数余子式问题

方法提示

余子式与代数余子式都是比原行列式低一阶的行列式，求解这类问题的一般方法为：若是某行（列）的余子式或代数余子式的线性组合，则一般考虑用行（列）展开定理；否则考虑用伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 处理.

解题定式　见到余子式或代数余子式问题,就要想到用行列展开定理或伴随矩阵处理. 见到有关伴随矩阵 A^* 问题,就要想到用公式 $AA^*=A^*A=|A|E$ 或 $A^*=|A|A^{-1}$ 处理.

例 1.8　已知 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&0&0&0\\3&0&1&0&0\\4&0&0&1&0\\5&0&0&0&1\end{vmatrix},$$

则 $2A_{11}+M_{12}+3M_{13}-A_{14}=$________.

分析　所求显然为 D 中第一行元素的余子式或代数余子式的线性组合. 先把其中的余子式恒等变形写成相应的代数余子式形式,再由行列展开定理可得.

解

$$2A_{11}+M_{12}+3M_{13}-A_{14}=2A_{11}-A_{12}+3A_{13}-A_{14}+0\cdot A_{15}$$

$$=\begin{vmatrix}2&-1&3&-1&0\\2&1&0&0&0\\3&0&1&0&0\\4&0&0&1&0\\5&0&0&0&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_1+r_2]{r_1+r_4,\,r_1-3r_3}\begin{vmatrix}-1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\3&0&1&0&0\\4&0&0&1&0\\5&0&0&0&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{下三角}}-1.$$

注　对于形如"|↖|、|↘|"等形状(称之为"爪形")的行列式,可用主对角线元素将其化为上(下)三角形行列式计算. 类似地,对于形如"|↙|、|↗|"等形状的行列式,可用副对角线元素将其化为"|◸|或|⊿|"计算.

练习 1.1　行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&2&1\\0&3&0&1\\4&0&0&1\end{vmatrix}=$________.

(答案: -2.)

例 1.9　已知 4 阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{5}&0&0&0\end{vmatrix},$$

则 $|A|$ 中所有元素的代数余子式之和为________.

分析　由题设可知,只要求出矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 即可,而见到 A^* 就要想到用公式 $AA^*=A^*A=|A|E$ 或 $A^*=|A|A^{-1}$ 处理,此处用 $A^*=|A|A^{-1}$.

解　因

$$|A|=\frac{1}{5}\cdot(-1)^{4+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{5!};$$

又由分块求逆公式,有

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

故
$$A^* = |A|A^{-1} = -\frac{1}{5!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而 $|A|$ 中所有元素的代数余子式之和为

$$\sum A_{ij} = -\frac{1}{5!}(2+3+4+5) = -\frac{7}{60}.$$

2. 数值型行列式的计算问题

方法提示

所谓数值型行列式是指行列式中的元素为已知的行列式,根据行列式的不同特点,相应的计算方法如下.

(1) 三角形法:即利用行列式的性质把行列式化为上(下)三角形行列式计算.此方法适用于计算行(列)和相等的行列式(即行列式的每一行或每一列元素之和都相等),“爪形”行列式(形如例 1.8 的行列式),等等.

(2) 降阶法:即利用行(列)展开定理把行列式降为低阶的行列式计算.此方法适用于行列式中零元素较多的情形.

(3) 分块法:即利用本节“补充公式与结论”的第 1 条中的公式计算.此方法适用于行列式中零元素构成“矩形块”且位于行列式的某个边角处的情形.

(4) 特征值法:即利用公式 $|A| = \prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值.此方法适用于题设有特征值条件,或矩阵 A 的特征值容易求得的情形.

(5) 递推公式法:即利用行(列)展开定理降阶,建立所求行列式的递推公式,然后递推到二阶行列式即可求得原行列式的值.此方法主要用于求解一些特定形状的行列式,如三对角线型行列式等.

另外还要会用数学归纳法计算(证明)高阶行列式.

例 1.10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

分析 此行列式的行和与列和都相等,是利用“三角形法”计算的典型情形.不妨将其看成行和相等,把第 2 列至第 n 列都加到第 1 列,然后提取第 1 列的公因子,再利用行列式的性质可化为上三角形行列式,这是计算此类行列式的一般方法.

解

$$D_n \xlongequal[\substack{\vdots \\ c_1+c_n}]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \div [a+(n-1)b]} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上三角}} [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

注 1) 本题也可用“特征值法”计算.

设 $A=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$, $B=\begin{bmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{bmatrix}_{n\times n}$, 则 $A=B+(a-b)E$.

因矩阵 B 的秩 $r(B)=1$,由“补充公式与结论”的例 1.7“注”可知矩阵 B 的特征值为

$$nb,\quad \underbrace{0,\ \cdots\ 0}_{n-1\text{个}}.$$

从而矩阵 A 的特征值为

$$nb+a-b,\quad \underbrace{a-b,\ \cdots,\ a-b}_{n-1\text{个}},$$

故 $|A|=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

2) 本例具有一般性,将行列式中的元素适当变化可演变成其他行列式的题目或其他章节的题目. 但不管形式如何变化,其基本计算方法是不变的. 请读者练习以下题目,仔细体会. 涉及后面章节知识的题目可暂时不做.

练习 1.2 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,则 $|A|=$________.

(答案: $(-1)^{n-1}(n-1)$.)

练习 1.3 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$,且 $r(A)=3$,则 $k=$________.

(答案: -3.)

例 1.11 计算 n 阶行列式