解析几何講义

編著者　清華大学数学教研組

欒　汝　书

南京工学院翻印

1958年

第一节　数軸，有向綫段，有向綫段間的夹角

解析几何学的內容是利用代数的方法研究几何圖形。能够作到这一步的关鍵是建立点与数量間的对应关系，这就是下面所講的坐标法。首先我們研究怎样用数表示一条直綫上点的位置。

在一条直綫上任取兩点 O，E。規定綫段 $\overline{OE}$ 的長度为一單位長度，并規定由 O 到 E 为直綫的正方向，正方向在圖上用箭头表示。对于直綫上任意一点 P，用数 x 来表示它，x 的絕对值等于綫 $\overline{OP}$ 的長度，当 P 与 E 在 O 的同側規定 x 为正数，当 P 与 E 在 O 的异側規定 x 为負数。这样一来，直綫上每一个点都可以用一个确定的数表示出来，特別，点 O 是用数 0 表示，点 E 是用数 1 表示。容易看出，用来表示兩个不同的点的数也不同。并且，任意一个数也一定表示某一个确定的点。于是便建立了直綫上的点与数量間的一一对应关系。

(1)

表示点的数称为点的坐标。建立了坐标的直綫称为坐标軸或数軸或簡称为軸。点 O 称为軸的原点。

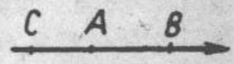
在一軸上任取兩个点 A，B。这兩点便确定了一条綫段。在有些問題中对于这条綫段我們仅需要知道它的長度，而不必考慮它的方向，也就是說，以 A 为綫段的起点或終点并沒有区別的价值。但是在另一些問題中規定方向是必要的，有方向的綫段称为有向綫段。如果規定以 A 为起点以 B 为終点，那末上面的綫段便成为有向綫段，并用記号 $\overline{AB}$ 表示，如果方向反过来，即以 B 为起点以 A 为終点，这时有向綫段便是 $\overline{BA}$ 了。虽然这兩条有向綫段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的長度相同，所包含的点也完全相同，可是方向有区別，我們便認为是不同的兩条有向綫段。

有向綫段的長度与方向是很重要的，在很多場合下也只有長度与

方向是我們所研究的对象。我們希望有簡便的方法来表示出有向綫段的長度与方向。用一个数 a 使它的絕对値等于綫段的長度，并且当綫段的正方向（即从起点到終点的方向）与所在軸的正方向一致时取为正数，反之取負数。这样所确定的数 a 显然可以完全表示出綫段的長度与方向了。这个数称为有向綫段的量。有向綫段 $\overline{AB}$ 的量簡記为 AB，$\overline{AB}$ 的長度則記为 $|AB|$。显然，当 $\overline{AB}$ 的正方向与軸的正方向一致时 $AB=|AB|$；当 $\overline{AB}$ 的正方向与軸的正方向相反时，$AB=-|AB|$。而且也容易看出 $AB=-AB$，$|AB|=|BA|$。

在軸上任取三点 A，B，C，不論其相互位置如何，恒有

$$AB+BC=AC。$$



(2)

現在我們来証明这个式子。当 A，B，C 为三个不相同的点，其相互的位置共有六种。現在我們仅就其中一种来証明，其余各种情形可以用类似的方法証明。設軸的正方向及 A，B，C 的位置如圖 2 所示。

于是 $$AB=|AB|,\ BC=-|BC|,\ AC=-|AC|。$$

因而，

$$AB+BC=|AB|-|BC|=-(|BC|-|AB|)=-|AC|=AC。$$

一般地，在軸上任取一組点 A，B，C，D，……，P，Q，不論其相互位置如何，恒有

$$AB+BC+CD+\cdots\cdots+PQ=AQ。$$

我們还应該注意：軸上一点 P 的坐标 x 就是从坐标原点 O 到点 P 所作成的有向綫段 $\overline{OP}$ 的量 OP，即

$$x=OP。$$

最后，設軸上兩个点 A，B 的坐标分別的 x_1，x_2。于是

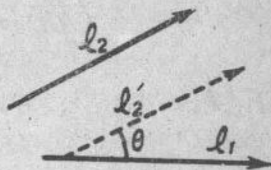
$$AB=AO+OB=OB-OA,$$

因而 $$AB=x_2-x_1。$$

也就是說，有向綫段 $\overline{AB}$ 的量 AB 等于終点 B 的坐标減去起点 A 的坐标，这个关系式以后常要用到。

上面所定义的有向綫段是依据于坐标軸上的兩点。事实上，空間

任意两个点 A，B 所确定的綫段只要有起点与終点的区别，都是有向綫段，不过这时綫段 $\overline{AB}$ 或 $\overline{BA}$ 的量究竟那一个是正数便需要特别加以規定了。



(3)

在同一平面內的兩条有向綫段（或有向直綫）的夾角是規定为兩个正方向間不大于 180° 的夾角。如果兩綫段 l_1，l_2（或直綫）不在同一平面內，則过 l_1 上任一点作 l_2' 与 l_2 平行且同正方向，規定 l_1，l_2' 間的夾角 θ 为 l_1，l_2 的夾角。因此：当 l_1，l_2 平行且正方向一致时，夾角为 0°；当 l_1，l_2 平行且正方向相反时，夾角为 180°；在其余情形夾角是大于 0° 而小 180° 的角度。

在这里我們順便介紹角度的單位。常用的有兩种。一种是將圓周分为 360 等分，每一分所对的圓心角称为一度，記为1°。另一种是在圓周上取一段弧使它的長度等于圓半徑的長，这段弧所对的圓心角称为一弧度。圓周是半徑的 2π 倍，即 $360°=2\pi$ 弧度。由此便得到兩种單位間的換算公式：

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.01745\text{ 弧度。}$$

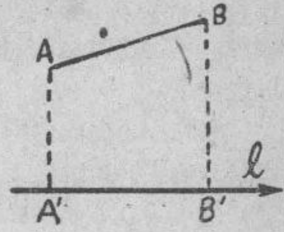
$$1\text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'45''。$$

以后我們所遇到的角度都是用弧度为單位表示出来的。

第二节　投影理論

一个点在一軸 l 上的投影是指从該点到軸所作垂綫的垂足。例如圖上点 A 的投影为 A'，点 B 的投影为 B'。一条有向綫段 $\overline{AB}$ 在軸 l 上的投影是指兩端点 A，B 在軸上的投影 A'，B' 所确定的有向綫段 $\overline{A'B'}$ 的量 $A'B'$，并用記号 $(\overline{AB})_l$ 表示，因而

$$(\overline{AB})_l = A'B'。$$



(4)

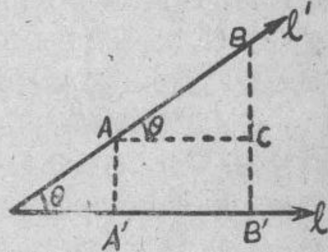
从定义显然有

$$(\overline{AB})_l = -(\overline{AB})_l。$$

注意 上面投影的定义并未限制$\overline{AB}$与l在同一平面內。关于投影的理論不仅限于平面的情形，同时也討論空間的情形，而且在应用上空間的情形乃是主要的部分。

投影第一定理。如果有向綫段$\overline{AB}$在軸l'上，又軸l与l'間的夾角为θ，则

$$(\overline{AB})_l = AB\cos\theta。$$

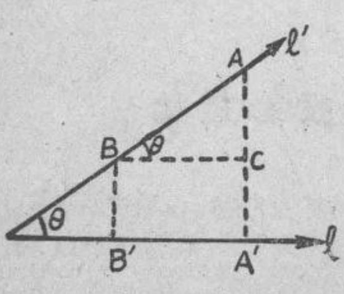


(5)

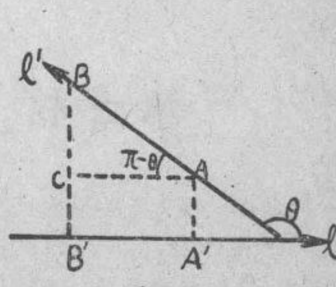
註: 首先証明平面情形，即l与l'在同一平面內。

一、当$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$。这时又分$\overline{AB}$与$l'$的正方向一致或相反兩种情形。在第一种情形（参看圖5），$(\overline{AB})_l = A'B' = |AC| = |AB|\cos\theta = AB\cos\theta$。在第二种情形（圖6），$(\overline{AB})_l = A'B' = -|BC| = -|AB|\cos\theta = AB\cos\theta$。

二、当$\theta = \frac{\pi}{2}$。这时A'与B'重合，$(\overline{AB})_l = A'B' = O$，又$\cos\frac{\pi}{2} = 0$，故定理仍成立。



(6)



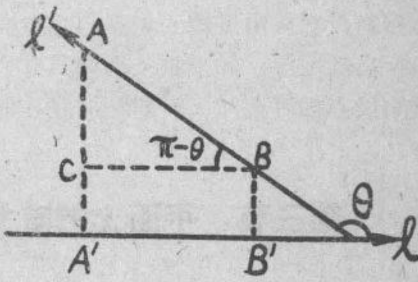
(7)

三、当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$。这时仍分 $\overline{AB}$ 与 l' 正方向一致或相反兩种情形。在第一种情形（圖 7），$\overline{(AB)}_l=A'B'=-|AC|=-|AB|\cos(\pi-\theta)=AB\cos\theta$。在第二种情形(圖8)，$\overline{(AB)}_l=A'B'=|BC|=|AB|\cos(\pi-\theta)=-|AB|\cos\theta=AB\cos\theta$。

最后証明空間情形，即 l 与 l' 不在一平面內。过 A' 作 $\overline{A'B''}$ 与 $\overline{AB}$ 平行且同正方向，又等長，$ABB''A'$ 是平行四边形。因为 $AA'\perp l$，故 $BB''\perp l$，又 $BB'\perp l$，故 l 与平面 $BB'B''$ 亦垂直，因而 $B''B'\perp l$，換句話說，B' 也是 B'' 在 l 上的投影。利用平面上已証明的結果，$\overline{(A'B'')}_l=A'B''\cos\theta$，但是，$\overline{(A'B'')}_l=\overline{(AB)}_l$，$A'B''=AB$，故得。$\overline{(AB)}_l=AB\cos\theta$。

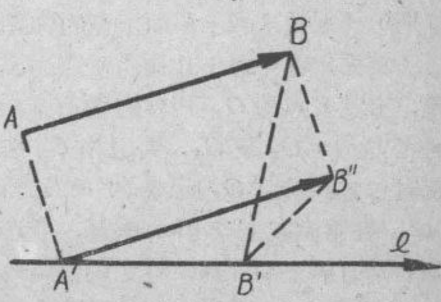
至此投影第一定理完全証完。

附註　利用三角函数的公式 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ 可以看到，在引用投影第一定理时，兩軸間的夾角 θ 如果換成 $-\theta$ 或者換成其大于 π 的夾角，結果仍是正确的。



(8)

現在我們来定义一条折綫 $\overline{A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}A_n}$ 在軸 l 上的投影。首先，所謂折綫 $\overline{A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}A_n}$ 就是由諸有向綫段 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，……，$\overline{A_{n-1}A_n}$ 所作成的圖形。設 A_i 在 l 上的投影为 A_i' $(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$，則定义此折綫在 l 上的投影为有向綫段 $\overline{A_1'A_n'}$ 的量 $A_1'A_n'$，并用記号 $\overline{(A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}A^n)}_l$ 表示此投影，即



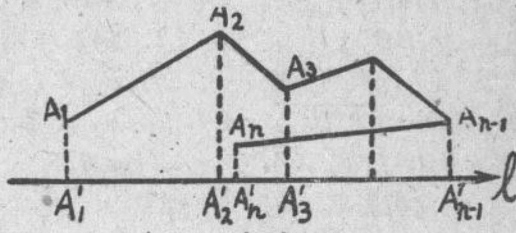
(9)

$$(\overline{A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}A_n})_l=A_1'A_n'\ 。$$

关于折綫的投影我們有下面的定理。

投影第二定理折綫在一軸上的投影等于其各有向綫段在該軸上的投影之和，即

$$(\overline{A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}A_n})_l=(\overline{A_1A_2})_l+(\overline{A_2A_3})_l\cdots\cdots+(\overline{A_{n-1}A_n})_l。$$



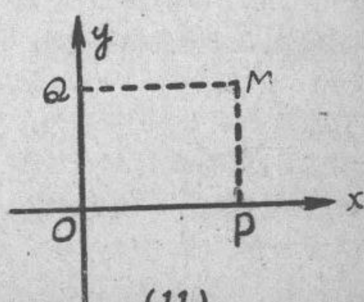
(10)

証明： 上式左端是 $A_1'A_n'$，右端是 $A_1'A_2'+A_2'A_3'+\cdots\cdots+A_{n-1}'A_n'$。利用有向綫段的和的公式知此和数即为 $A_1'A_n'$。証畢。

容易看出：（一）折綫的投影只由折綫的起点与終点的位置决定，与折綫的形狀沒有关系。也就是說，如果兩条折綫具有公同的起点和終点，它們在同一軸上的投影相等。（二）封閉折綫在任一軸上的投影为 0 。

第三节 平面上的直角坐标及其基本問題

前面講过了直綫上的坐标法，現在我們来研究平面上的坐标法，就是怎样用数来表示平面上点的位置。



(11)

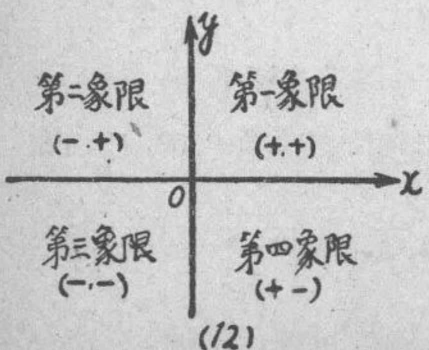
首先，在平面上作兩条垂直的直綫，令其交点为 O，規定这兩条直綫的正方向为 O_x 及 O_y，并且由 O_x 按反时針方向轉到 O_y 所成的角度为 90°。在兩直綫上各引入坐标，令点 O 为兩直綫上的原点，称此兩直綫为 x 軸及 y 軸。習慣上將 x 軸画在水平位置，正方向从左到右；將 y 軸放

在鉛直方向，正方向是由下到上。因此，x 軸也称为横軸，y 軸也称为縱軸。x 軸与 y 軸又統称为坐标軸。

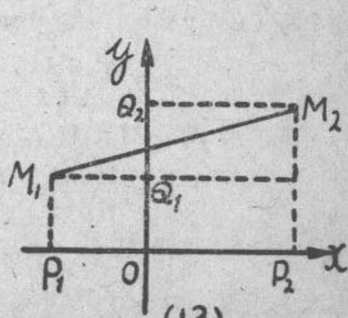
設平面上任意一点M在 x 軸及 y 軸上的投影分別为 P 与 Q，并設 P 在 x 軸上的的坐标是 a,Q 在 y 軸上的坐标是 b。容易看出，平面上任意一点 M 唯一地确定了这一对数 a 和 b。反过来，任意給定兩个数 a 和 b，則在平面上有唯一的一个点，它在 x 軸和 y 軸上的投影的坐标是 a 和 b。于是在平面上的点与一对有次序的数之間建立了一一对应关系。也就是說，用一对有次序的数 a，b 便可以完全确定点M的位置。称 a 为点 M 的横坐标，b 为縱坐标。我們以后用記号（a，b）表示点 M，称为 M的坐标。注意左面的数是横坐标，右面的数是縱坐标。除去$a=b$外，（a，b）与（b，a）表示兩个不同的点。

上面用一对有次序的数来确定平面上点的位置称为平面的直角坐标法。"直角"是指兩坐标軸相交成直角。又称笛卡兒坐标法，这是用来紀念第一个引用这种坐标法的法国数学家笛卡兒。除了直角坐标外还有其他的坐标法，比較常用的是將来要介紹的極坐标法。

原点 0 的坐标是（0，0）。x 軸上一切点的縱坐标都是 0，y 軸上点的横坐标都是 0 。除了坐标軸上的点，整个平面被坐标軸分为四部分，叫做象限。在右上角的一部分称为第一象限，左上角的为第二象限，左下角及右下角的为第三及第四象限。第一象限內的点的横坐



(12)



(13)

标及縱坐标都是正数，用（+，+）表示。其余三个象限內点的坐标的正負号依次为（−，+），（−，−），（+，−）。

由于解析几何学的全部內容建立在坐标法的基础上，所以我們应該非常熟練地作到：（一）由已知点求它的坐标。（二）給定坐标求它所表示的点。

利用坐标法可以求兩点的距离。

定理一、設M_1，M_2二点的坐标为（x_1，y_1），（x_2，y_2），則M_1，M_2二点的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\text{。}$$

証。令M_1，M_2在x軸上的投影为P_1，P_2；在y軸上的投影为Q_1，Q_2。利用商高定理，得

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|P_1P_2|^2+|Q_1Q_2|^2\text{。}$$

但是我們知道

$$P_1P_2=x_2-x_1,\quad Q_1Q_2=y_2-y_1\text{。}$$

所以得到 $$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

因此 $$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

推論。点M_1（x_1，y_1）到原点的距离为$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$。

利用坐标法又可以求分綫段为定比的点的坐标。

定理二、設有二点M_1（x_1，y_1），M_2（x_2，y_2），又設直綫M_1M_2上一点M將綫段M_1M_2分为定比λ，即$\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$則$M$点的坐标（$x$，$y$）由下列兩式决定：

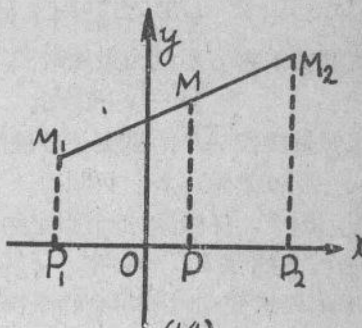
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\text{。}$$

証。令M_1,M_2,M在x軸上的投影分别为P_1,P_2,P。于是，

$$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2},$$

但是 $$P_1P=x-x_1,\quad PP_2=x_2-x\text{。}$$

代入上式得 $$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}\text{。}$$



(14)

解出 x 便得到(注意 λ 不可能为 -1)

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}。$$

用类似的方法可以得到

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。$$

推論。綫段 M_1M_2 的中点的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)。$$

第四节　曲綫与方程　圓的方程

上一节我們利用坐标法建立了直綫上的点与数間的一一对应关系。建立点与数間一一对应关系的目的是要借助代数方法研究几何圖形的性質。在平面的情形主要是研究曲綫的性質。

曲綫可以看成点的几何軌跡，在曲綫上的点都满足某种条件，不在曲綫上的点都不滿足这种条件，也就是說，这种条件是确定曲綫上的点的必要与充分条件。設 $(x,\ y)$ 为曲綫上任一点的坐标，利用曲綫上的点所滿足的条件可以建立 $x,\ y$ 間的一个方程。这样一来，曲綫上的点的坐标都滿足这个方程，不在曲綫上的点的坐标都不滿足这个方程。这个方程称为曲綫的方程。有了曲綫的方程，研究曲綫的几何問題便化为研究方程的代数問題了。

例一、設有二点 $A(2,\ 3)$，$B(-4,\ 5)$，求 $\overline{AB}$ 的垂直平分綫的方程。

与 A，B 二点等距离是垂直平分綫上的点所滿足的条件，而且不在垂直平分綫上的点都不滿足这个条件。

令 $P(x,\ y)$ 为垂直平分綫上任一点，由条件 $|PA|=|PB|$ 便建立了垂直平分綫的方程

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2}。$$

我們要求將方程化为最簡形式，將兩端平方并併項，得

$$3x-y+7=0。$$

这便是綫段 $\overline{AB}$ 的垂直平分綫的方程。

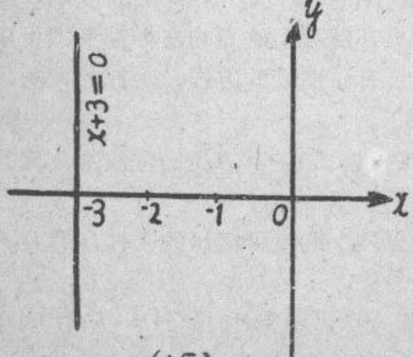
反过来說，x，y 間的一个方程在一般情形下是某一条曲綫的方程。因为，任給 x 一个固定的值 $x=a$，这时由方程可能解出一个或几个 y 的值 b_1，b_2 等，于是便得到点 (a, b_1)，(a, b_2) 等，当 a 任意变动时所得到的全部点在一般情形下形成一条曲綫。

有时在一个方程中可能对于任意的 x 值都得不到 y 的解，这种方程便不表示任何曲綫，象方程 $x^2+y^2+1=0$ 便沒有任何的解。也有时方程仅表示有限个点，例如方程 $(x^2-1)^2+y^2=0$ 只表示 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$ 两个点，因为任何其他的点都不能滿足这个方程。

給定了方程，怎样画出它所表示的曲綫呢？通过下面兩个例題可以看出解答这个問題的初步办法。这种方法对于作比較簡單方程的圖形是有用的，至于較复杂的方程需要用数学解析的知識。

例二、画出 $x+3=0$ 的圖形。

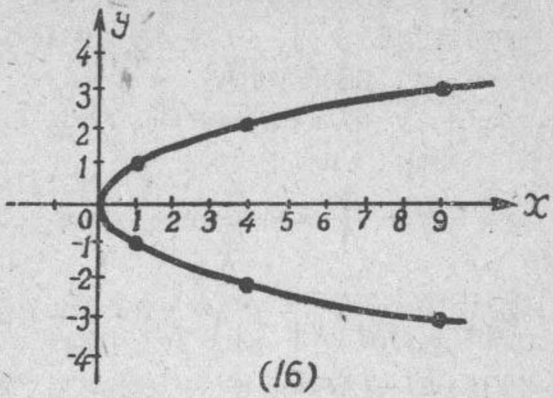
从这个方程得到 $x=-3$。因为方程中不包含 y，于是当 $x=-3$，y 为任意值，都滿足方程，也就是說，对于任意的 b，$(-3, b)$ 都是圖形上的点。因此，圖形是通过点 $(-3, 0)$ 与 y 軸平行的直綫。



(15)

例三、画出 $y^2=x$ 的圖形。

首先我們注意方程的左端恒为正数或 0，右端的 x 便不可能为負数。因此在第二，第三象限內不会有曲綫上的点。对于任一正数 x 能解出两个 y 的值，即 $\sqrt{x}$ 与 $-\sqrt{x}$，也就是說，对于任一正数 x，圖形上有兩个点 $(x, \sqrt{x})$ 与 $(x, -\sqrt{x})$。这兩个点对于 x 軸是对称的，也就是



(16)

这两个点的連綫被 x 軸垂直而且等分。因此整个的圖形对于 x 軸是对称的。当 x 的值逐漸增大时，y的絕对值也随之增大。由方程計算出若干个点的坐标：

x	0	1	4	9	16	……
y	0	± 1	± 2	± 3	± 4	……

描出这些点，然后連成一条光滑的曲綫，这便是方程的圖形。这条曲綫称为拋物綫，以后我們还要仔細研究这种曲綫。

从上面講到的可以看出，关于曲綫与方程存在着兩个基本問題：

（一）已給曲綫，怎样求它的方程？

（二）已給方程，怎样画出它所代表的曲綫？

在今后我們將多次地研究这兩个問題。

現在我們来求圓的方程。設已知圓的圓心为 $P(a, b)$，圓半徑为 R。与点 P 的距离为 R 是圓周上的点所特有的性質。令 $M(x, y)$ 为圓周上任意的点，于是得到圓周的方程。

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R。$$

兩端平方后为

$$(1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2=R^2。$$

或展开为

（2）　$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$。

因此，圓的方程是 x，y 的一个二次方程，其 x^2 与 y^2 的系数相同，缺 xy 項。反过来，我們要問方程

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0,\ A\neq 0,$$

是否表示一个圓呢？以 A 除上式兩端，得

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0。$$

配方，得

（3）　$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$。

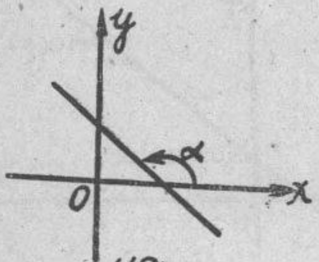
因此：(一)当 $D^2+E^2-4AF>0$，与（1）式比較后，知此方程表示一个圓，它的圓心是$\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2A}\right)$，半徑是$\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}$。(二) 当 $D^2+E^2-4AF=0$，方程仅表示一个点$\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2A}\right)$。因为这时方程的右端为 0，而左端是兩个平方的和，因此只有兩个括弧都为 0 时方程方能滿足，也就是說只有$\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2A}\right)$能滿足方程。(三)当 $D^2+E^2-4AF<0$，沒有一个点的坐标能滿足方程，因为这时方程的右端是負数，而左端是兩个平方的和，不可能为負数。

最后应該提到，若兩条曲綫的方程已給定，則求这兩条曲綫的交点的問題便化为求兩个联立方程的解的代数問題了。因为兩曲綫的交点的坐标必滿足这兩个方程，反之，滿足兩个方程的点既在这兩条曲綫上，也就是它們的交点。

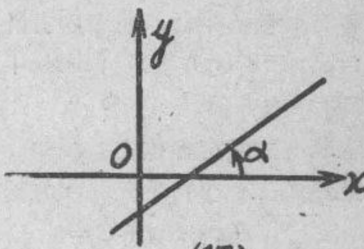
第五节　直綫方程

直綫是平面曲綫中最簡單的一种。首先引进直綫的傾斜角的定义。从正 x 軸依反时針方向旋轉。当第一次达到直綫的方向所轉出的角度称为該直綫的傾斜角，傾斜角以后記作 α。由定义知 $0\leqq\alpha<\pi$。

我們又定义 $\operatorname{tg}\alpha$ 为直綫的斜率。应該注意，任意直綫都有傾斜角，但是与 y 軸平行的直綫沒有斜率，因为 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ 不是一个数。又应該注意，任意数 k 都可以是直綫的斜率，因为 $\operatorname{tg}\alpha=k$ 恒有解，并且在 $0\leqq\alpha<\pi$ 的范圍內仅有一个解。



(18)



(17)

其次我們引进直綫的截距的定义。設直綫与一个坐标軸相交，則此交点在該坐标軸上的坐标便称为直綫在該坐标軸上的截距。截距是帶有正負号的数量。应該注意一般的直綫在兩个坐标軸都有截距；与 x 軸平行的直綫仅在 y 軸上有截距；同样，与 y 軸平行的直綫仅在 x 軸上有截距。

从上一节的例二，我們知道与 y 軸平行的直綫的方程为 $x=a$，a 为該直綫在 x 軸上的截距。

一条不与 y 軸平行的直綫在 y 軸有截距，令此截距为 b，又令直綫的斜率为 k。直綫由 b 与 k 兩个数完全确定。它的方程是

$$y=kx+b,$$

这个方程称为直綫方程的斜截式。証明如下：取直綫上任一点 $M(x, y)$，則恒有

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y-b}{x}。$$

化簡，便得到

$$y=kx+b。$$

由此，直綫上点的坐标都滿足方程，而且也容易看出，不在直綫上的

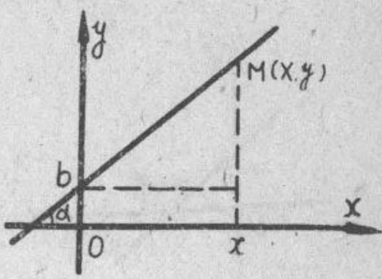
点的坐标都不满足方程。故方程确是已知直綫的方程。

在特殊情形，当直綫与 x 軸平行，則 $k=0$，方程化为 $y=b$。

从上面討論的結論可以得到下面的定理。

定理一、直綫方程都是一次方程。

因为，一条直綫或者与 y 軸平行或者与 y 軸不平行，前者的方程是 $x=a$，后者的方程是 $y=kx+b$，都是一次方程。



(19)

定理一的逆定理也成立，即

定理二、x,y 的任意一次方程

$$Ax+By+C=0$$

是直綫方程。

証：当然 A，B 二数不能都是0。今分 $B=0$ 与 $B\neq 0$ 兩种情形証明。

1. 当 $B=0$。方程可化为 $x=-\frac{C}{A}$，这是在 x 軸上截距为 $-\frac{C}{A}$ 且与 y 軸平行的直綫的方程。

2. 当 $B\neq 0$。方程可化为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，这是斜率为 $-\frac{A}{B}$ 且在 y 軸上截距为 $-\frac{C}{B}$ 的直綫的方程。

除了由斜率 k 及 y 軸上截距 b 可以确定直綫外，还有种种别的条件也可以确定直綫。例如(一)已知斜率 k 及直綫上任一定点 (x_1, y_1)。（二）已知直綫上任意兩定点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)。（三）已知直綫在 x，y 軸上的截距分别是 a 与 b，这时假定直綫不与坐标軸平行且不通过原点，也就是說 a，b 是兩个不为 0 的数。現在我們研究如何从这些已知条件写出直綫方程来。

（一）已知斜率 k 及直綫 l 上任一定点 $M_1(x_1, y_1)$。一个点 $M(x, y)$ 在 l 上的必要与充分条件是綫段 M_1M 的斜率为 k，即

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k \text{ 或 } y-y_1=k(x-x_1)。$$

这是直綫方程的点斜式。

（二）已知直綫 l 上兩点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$。若 $x_1=x_2$，显然 l 与 y 軸平行，它的方程是 $x=x_1$。若 $x_1\neq x_2$，一个点 $M(x, y)$ 在 l 上的必要与充分条件是綫段 M_1M 和綫段 M_1M_2 的斜率相同，即

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}。$$

这是直綫方程的兩点式。

（三）已知直綫在 x，y 軸上的截距分别是 a 和 b。这时，已知直綫上的兩个点 $(a, 0)$，$(0, b)$。代入直綫方程的兩点式中，經过化簡，得到直綫的方程

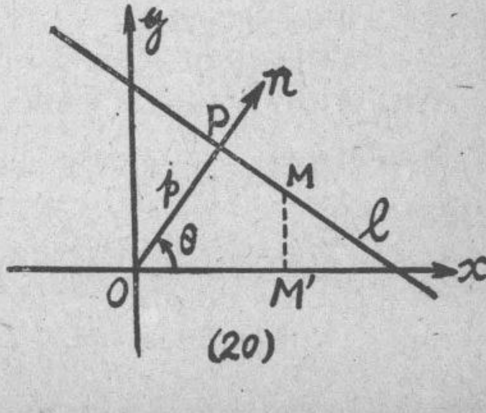
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1。$$

这是直綫方程的截距式，或称綫段式。

直綫方程除了上面所講到的四种形式外还有一种法綫式，在求点到直綫的距离时这种形式特别方便。

首先介紹直綫的法綫的正方向，設直綫 l 不通过原点。

垂直于直綫 l 的直綫都称为 l 的法綫。現在我們考慮过坐标原点 O，l 的一条法綫 n。令 l 与 n 的交点为 P。設直綫 l 不通过 O，則 $P\neq O$。規定从 O 到 P 的方向是法綫 n 的正方向。角度为 θ，这时 $0\leqq\theta<2\pi$。令 $p=|OP|$。若直綫通过原点，則 $P=O$，这时用上面的方法不能确定法綫的正方向。我們規定法綫正方向与正軸的夾角小于 π，也就是法綫的正方向除去与正 x 軸相同外都是指向上的。



(20)

不难看出，p 与 θ 兩个数可以完全确定直綫。

取直綫上任一点 $M'(x,y)$。令 M' 为 M 在 x 軸上的投影。由折綫投影定义及投影第二定理，

$$p=(\overline{OM})_n=(\overline{OM'}\,\overline{M'M})_n=(\overline{OM'})_n+(\overline{M'M})_n。$$

利用投影第一定理（并参看投影第一定理的附註）：

$$(\overline{OM'})_n=x\cos\theta，(\overline{MM})_n=y\cos(\theta-\tfrac{\pi}{2})=y\cos\theta。$$

代入上式，移項，得到

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0。$$

并且容易看出不在直綫上的点的坐标不滿足方程，称此方程为直綫方程的法綫式。

直綫方程的法綫式的特点是（一）x 与 y 的系数的平方和为 1。（二）常数項是負数。利用这兩个特点可以將一般直綫方程化为法綫式。設已給直綫方程

$$Ax+By+C=0。$$

兩端乘以常数 M，$M\neq 0$，則方程

$$MAx+MBy+MC=0$$

仍是原来直綫的方程。今选 M 使上式成为直綫的法綫式，这时

$$(MA)^2+(MB)^2=1,\quad M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

正負号的选擇須使 MC 是負数。当 C 为 0，須使 MB 是正数。將 M 代入原式即得已給直綫的法綫式方程。

例題、將 $3x-4y+2=0$ 化为法綫式。

这时，$M=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\dfrac{1}{5}$，因 $C=2$ 是正数，取 $M=-\dfrac{1}{5}$。

法綫式是

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0。$$