中学数学

综合题解

李连科　　翻译

Zhongxueshuxue

ZONGHETIJIE

昭乌达盟教育学院

中学数学综合题解

李连科 翻译

昭乌达盟教育学院

前　　言

这是一本指导高考的数学专著，也可作为中学数学教师在教学上参考。著者是日本东京理科有名望的讲师渡边次男先生。全书共分三册，包括代数、几何、三角、解析几何和微积分方法。本书是第一册；著者具有指导高考二十余年的丰富经验。他把数十年来日本各地的高考试题编成资料卡片，进行分类研究，找出规律，然后编成若干单元自成体系，经常通过电视广播辅导日本全国参加高考的学生，深受日本学生的爱戴。这部书在日本负有威名，1975年初版发行至1978年仅四年间竟印刷到第10版。

原著篇幅较长根据我国现行中学教材及我国中学实际情况，又由于印刷和篇幅所限，我们对原著作了选译。这本书共分两部分，前部分著者搜集了近十年里日本的高考试题。为了便于教师辅导学生学习，把它编成24个单元；后一部分是由100个高考试题组成《习题集》；书中题目力图把代数、几何、三角、解析几何等知识融合在一起，并有矢量、集合、概率等新知识夹杂其间、反映出当前世界上中学数学发展的新趋势，反映出试题的现代化水平。每题解出之前都有解题思路的指导，在题目中常常出现多种解法，解题过程中出现“……”、“□”等符号是让读者进一步去独立完成。这是著者千方百计培养学生独立分析问题和解题能力的方法，很值得我们数学教师借鉴。

由于时间仓促，个人水平有限，译者初学日文、不谙数学，错误之处当所难免，深望读者批评指正。

目　　录

第一部分

第 二 部 分

一、式子的计算和面积的计算

Ⅰ、用$x-a$除的题

1．求　$3x^4-5x^3+4x^2-10x+1$除以$x-2$的商和余式

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 3 & -5 & +4 & -10 & 1 \\
 & & \square & 2 & \square & 4 \\
\hline
 & 3 & 1 & \square & \square & 5
\end{array}$$

答：商：$3x^3+x^2+6x+2$　　余式：5

2．　$f(x)=x^5-4x^4+8x^3-9x^2-11x+27$

求$f(7)$

解：根据剩余除法定理：

$f(x)=(x-7)Q(x)+R$

$f(7)=(7-7)Q(x)+R$

求　$f(7)$值与$\dfrac{f(x)}{x-7}$得的余式相同。

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
7 & 1 & -4 & 8 & -9 & 11 & 27 \\
 & & 7 & \square & \square & \square & \square \\
\hline
 & 1 & \square & \square & 194 & \square & \square
\end{array}$$

答：9456

3．求　$f(x)=x^3+ax^2+x+2$除以$2x+1$的商式和余式

解：$\because f(x)=(2x+1)Q(x)+R$

$\qquad\qquad=(x+\frac{1}{2})\cdot 2Q(x)+R$

用综合除法

$$
\begin{array}{r|cccc}
-\frac{1}{2} & 1 & a & 1 & 2 \\
 & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}a+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}a-\frac{5}{8} \\
\hline
 & 1 & a-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}a+\frac{5}{4} & \frac{1}{4}a+\frac{11}{8}
\end{array}
$$

商式：$\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)x-\left(\frac{1}{4}a-\frac{5}{8}\right)$

余式：$\frac{1}{4}a+\frac{11}{8}$

注∵以$x+\frac{1}{2}$除得商是以$2x+1$除得商的2倍，故最后须再除以2

除以$(x-a)^2$时

4．已知

Ax^3+Bx^2-8能用$(x-2)^2$整除，

求A、B之值

$$
\begin{array}{r|cccc}
2 & A & B & O & -8 \\
 & & 2A & 4A+2B & 8A+4B \\
\hline
2 & A & 2A+B & 4A+2B & 8A+4B-8=0 \\
 & & 2A & 8A+2B & \\
\hline
 & A & 4A+B & 12A+4B=0 &
\end{array}
$$

联立$\begin{cases} 8A+4B-8=0 \\ 12A+4B=0 \end{cases}$　　$\therefore 4A=-8$

$A=-2$　　$B=6$

5．$f(x)=x^4+4x^3+ax^2+bx+1$能用$(x-1)^2$整除

求a、b的值　　（答：$a=-10$，$b=4$）

6．$f(x)=x^3+ax^2-7x+b$能用$(x-1)^2$整除

求a、b之值　　（答：$a=2$，$b=4$）

7． x^3+px^2+qx+r

能被（$x-\alpha$）^{2}整除的充要条件是：

$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=3\alpha^3+2P\alpha+q=0$

解：以$x-\alpha$用综合除法除两次

$$
\begin{array}{r|llll}
\alpha & 1 & p & q & r \\
 & & \alpha & \alpha^2+p\alpha & \alpha^3+p\alpha^2+p\alpha \\
\hline
\alpha & 1 & \alpha+p & \alpha^2+q\alpha+q & \alpha^3+p\alpha^2+p\alpha+r=0 \\
 & & \alpha & 2\alpha^2+\alpha p & \\
\hline
 & 1 & 2\alpha+p & 3\alpha^2+2p\alpha+q=0 &
\end{array}
$$

∴其能用（$x-\alpha$）^{2}整除的主要条件是

$$\begin{cases}\alpha^3+p\alpha^2+p\alpha+r=0\\ 3\alpha^2+2p\alpha+q=0\end{cases}$$

8． $2x^4-12x^2+ax-56$能用x^2-3x+b整除

求a、b之值

解：用分离系数法去除

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 2 & 6 & -2b+b & & \\
\hline
1-3b & 2 & 0 & -12 & a & -53 \\
 & 2 & -6 & 2b & & \\
\hline
 & & 6 & -2b-12 & a & \\
 & & 6 & -18 & 6b & \\
\hline
 & & & -2b+6 & a-6b & -56 \\
 & & & -2b+6 & 6b-18 & -2b^2+6b \\
\hline
 & & & & a-12b+18 & 2b^2-6b-56
\end{array}
$$

$$\begin{cases}a-12b+18=0\\ 2b^2-6b-56=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}b=7\\ a=66\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}b=-4\\ a=-66\end{cases}$$

9． $2x^4+3x^3-10x^2+24x+m$除以x^2+2x-n能整除，

求m、n的值

答〔 $m=-64 \quad n=8$ 〕

10. x^3+Ax^2+Bx+2 既能用 x^2+ax+b 整除又能用 x^2+bx+a 整除。

试求 $A\cdot B.a$、$b.$ 之值这里：$a<b$。答〔 $\begin{matrix} A & B & a & b \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{matrix}$ 〕

Ⅱ 分式的计算

11. $$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$$

注意：$\dfrac{b}{a(a+b)}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}$

解：原式 $=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{(a+b+c)}+$

$$\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}$$

12. 在下面等式中定出a、b、c的值

$$\frac{5x^2-2x+2}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

解：$\dfrac{5x^2-2x+2}{x^3+1}=\dfrac{ax^2-ax+a+bx^2+cx+bx+c}{x^3+1}$

$$=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$

于是对应系数相等：

$$\begin{cases} a+c=2 \\ -a+b+c=-2 \\ a+b=5 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

13. 若 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$ 求 $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 的值

解：令 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=k$

则 $x=2k$, $y=3k$, $z=4k$ 代入原式得 $\dfrac{6k^2+12k^2+8k^2}{4k^2+9k^2+16k^2}$

$$=\frac{26k^2}{29k^2}=\frac{26}{29}$$

Ⅲ. 无理数的计算

基础知识

$\because \sqrt{a^2}=|a|$ $\therefore \sqrt{a^2}=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \text{ 时} \\ -a, & a<0 \text{ 时} \end{cases}$

二重根式的运算

令 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

$\sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$

$\downarrow$

这时选取α、β时要使：$\alpha>\beta$

则 $a+2\sqrt{b}=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$

于是有：$\begin{cases} \alpha+\beta=a \\ \alpha\beta=b \end{cases}$

因此：有 $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=1+\sqrt{5}$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

而 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+1$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-}}=\begin{cases}\sqrt{x-1}-1 & \text{当}x\geqslant 2\text{时}\\ 1-\sqrt{x-1} & \text{当}1\leqslant x<2\text{时}\end{cases}$$

14. $x=2\sqrt{3}$ 时

求 $\dfrac{x}{2+\sqrt{4+x}}-\dfrac{x}{2-\sqrt{4+x}}$ 的值

解：计算 $\sqrt{4+x}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1}+\sqrt{3}$

$$=1+\sqrt{3}$$

于是

$$第一项=\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{9-3}$$

$$=\frac{6\sqrt{3}-6}{6}=\sqrt{3}-1$$

$$第二项=\frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{-2}=-(\sqrt{3}+3)$$

$$=-3-\sqrt{3}$$

$\therefore$原式$=\sqrt{3}-1-(-\sqrt{3}-3)=2(1+\sqrt{3})$

15. $x=\sqrt{3}-2$时 求$\sqrt{2x^2+4x+1}$的值

解：代入原式得：$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{2}-2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=2-\sqrt{3}$

答：$(2-\sqrt{3})$

解：$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{7}{2}\\ \alpha\beta=3\end{cases}$

这里 $\alpha=2$ $\beta=\frac{3}{2}$

$a=\frac{7}{2}$ $b=3$

呈$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$代入上式即得所答。

16. 当$x=\sqrt{6}+1$时 求 $\sqrt{x^2+4x+10}$的值

解： 原式$=\sqrt{6+2\sqrt{6}+1+4\sqrt{6}+4+10}$

$=\sqrt{21+6\sqrt{6}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$=\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{1})=\sqrt{18}+\sqrt{3}$

$=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$

〔答：$3\sqrt{2}+\sqrt{3}$〕

17. 求 $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ 值并绘出图象

解：

两边平方：$y^2=(x+2\sqrt{x-1})+(x-2\sqrt{x-1})$

$+2\sqrt{x^2-4(x-1)}$

$=2x+2\sqrt{(x-2)^2}=2x+2|x-2|$

∴当 $x\geqslant 2$ 时 $y=\sqrt{2x+2x-4}=\sqrt{4(x-1)}$

$=2\sqrt{x-1}$

$2>x\geqslant 1$ 时 $y=\sqrt{2x+2(2-x)}=\sqrt{4}=2$

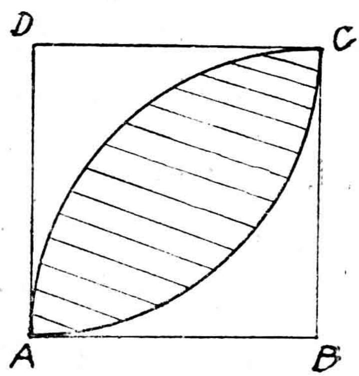
即 $y=\begin{cases}2\sqrt{x-1}, & 当x\geqslant 2时\\ 2, & 当1\leqslant x<2\end{cases}$ （图略）

Ⅳ．面积计算

18. 求右图阴影部分的面积

$AB=2$

$\pi=3.1415$



解 $S=\left(\dfrac{2^2\pi}{4}\right)\times 2$

$-2^2=2\pi-4$

$=2\times 3.1415\cdots-4$

$=6.2830\cdots-4$

$=2.2830\cdots\cdots$

（答）2.28

19. 求下图引斜线部分的面积。

20. 求〃〃砂地部分的面积。$AB=2$

解：在阴影部分作一正△

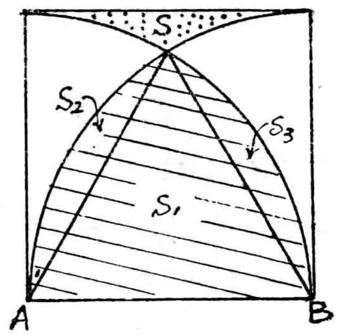
则△的

$S_1=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2$

$=\sqrt{3}$

扇形$S_2=\dfrac{2^2\pi}{6}$

$=\dfrac{2}{3}\pi$



$S_1+S_3=S_2$

弓形 $S_3=\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

$\therefore$斜条 $S=S_2+S_3=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

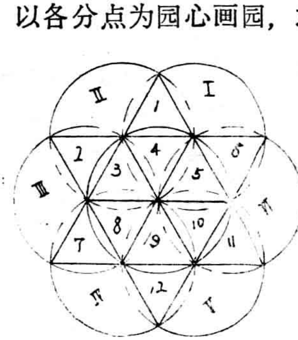
$=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

而沙地$S=S_{正方形}+S_{斜条}-\dfrac{2^2\pi}{4}\cdot 2=2^2+\dfrac{4}{3}\pi-$

$\sqrt{3}-2\pi=4-\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi\approx 0.178$

21．半径是a的园．把它六等分，以各分点为园心画园，求由边缘围成的面积。

解：图中可分割成12个正△和6个扇形。



六个正△$S_1=a\cdot\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 12$

$=3\sqrt{3}\,a^2$

六个扇形$S_2=a^2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot 6$

$=2a^2\pi$

∴所求面积 $S=(3\sqrt{3}+2\pi)a^2$

二、因式分解和三角形

Ⅰ分解因式

1．$a^2bc+abd+bc-ab^2-ac^2-cd$　按a整理，后尝试一

$=(bc)a^2+(bd-b^2-c^2)a+\square$　下无解的希望

改为按d整理：

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(ab-c)d+(ab-c)(ac-b)\\
&=(ab-c)\{d+(ac-b)\}\\
&=(ab-c)(ac-b+d)
\end{aligned}
$$

2．$(a+b+c)(ab+bc+c)-abc$

$$
\begin{aligned}
&=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-(bc)a\\
&=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)-(bc)a\\
&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\
&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\
&=(a+b)(a+c)(b+c)
\end{aligned}
$$

3．$x^2y+x^2+x-xy^2-y^2-y$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(y+1)x^2-(y^2-1)x-(y^2+y)\\
&=(y+1)\{x^2-(y-1)x-y\}\\
&=(y+1)(x+1)(x-y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
x\quad -\;y\\
\times\\
x\quad +\;1
\end{array}
$$

4. $(a+b)c^3-(a^2+ab+b^2)c^2+a^2b^2$

原式$=(b^2-c^2)a^2-c^2(b-c)a-bc^2(b-c)$

$=(b-c)\{(b+c)a^2-c^2a-bc^2\}$

$=(b-c)\{(a^2-c^2)b+ca(a-c)\}$

$=(b-c)(a-c)\{(a+c)b+ca\}$

$=(a-c)(b-c)(ab+bc+ac)$

Ⅱ. 判别三角形

5. 若$\triangle ABC$中$a\sin A=b\sin B=c\sin C$

问：三角形ABC是什么三角形？

解：按正弦定理：$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\therefore \sin A=\dfrac{a}{2R}\quad \sin B=\dfrac{b}{2R}\quad \sin C=\dfrac{c}{2R}$

于是 $\left.\begin{aligned} a\sin A&=\frac{a^2}{2R}\\ b\sin B&=\frac{b^2}{2R}\\ c\sin C&=\frac{c^2}{2R}\end{aligned}\right\}$ $\therefore \dfrac{a^2}{2R}=\dfrac{b^2}{2R}=\dfrac{c^2}{2R}$

$\therefore a^2=b^2=c^2$

$\therefore a=b=c$是个正三角形。

6. 在$\triangle ABC$中 若：$ca\cos A-bc\cos B=(a^2-b^2)\cos C$

问：这是什么三角形？

解：根据余弦定理：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

从而：　$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$　　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

代入上式

$$\frac{ac(b^2+c^2-a^2)}{2bc}-\frac{bc(c^2+a^2-b^2)}{2ca}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$$

通分去分母移项：

$$a^2(b^2+c^2-a^2)-b^2(c^2+a^2-b^2)$$
$$-(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$$a^2b^2+a^2c^2-a^4-b^2c^2-a^2b^2+b^4-a^4+a^2b^2$$
$$-a^2b^2+b^4+a^2c^2-b^2c^2=0$$

$$2a^2c^2-2b^2c^2-2a^4+2b^4=0$$

$$(a^2-b^2)c^2-(a^4-b^4)=0$$

$$(a^2-b^2)c^2-\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}=0$$

$$(a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$$

$$\therefore\ \begin{cases}a=-b\text{（不合理，舍去）}\\ a=b\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$$

答：三角形是：以c为直角的直角三角形或者$AC=BC$的等腰三角形

7．$\triangle ABC$中　$a\cos A=b\cos B$

求：这是什么三角形？

解：根据余弦定理：代入原式

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$