职工中等专业学校试用教材

概率论与数理统计

职工中等专业学校教材编写组　编

AILULUNYUSHULITONGJI

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材

概率论与数理统计

职工中等专业学校教材编写组编

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材
概率论与数理统计
职工中等专业学校教材编写组编
*
上海科学技术文献出版社出版
（上海市武康路2号）
新华书店上海发行所发行
昆山亭林印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 6 字数 145,000
1986年12月第1版 1986年12月第1次印刷
印数：1—18,000
书号：7192·10 定价：1.25元

前　言

随着职工教育事业的发展，各地相继建立了一批职工中等专业学校，各校迫切需要有一套适用的教材．为此，江苏省徐州、无锡、扬州、苏州、南通、常州、连云港、盐城等八市的教育局和上海《职大教学》编辑部于一九八四年八月联合组织了职工中等专业学校教材编写组，组织有职工教育经验的各科教师，在调查研究的基础上，着手编写了这套职工中等专业学校基础教材．

这套教材编写时，参考了现行全日制中专的教学大纲，以保证教材知识的系统性和科学性，达到中专学校教学质量标准；又考虑到职工中专学制课时数和业余学习等实际情况，力求做到精要适量，应用性强．

这套教材包括的学科有语文、数学、物理、化学四门，共十四册。语文分文科和工科两种，文科三册，工科两册．数学分代数、三角、立体几何、解析几何、概率论与数理统计和高等数学等六册，可供文科专业和工科专业选用．物理两册，化学一册（附化学实验册）．

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，随着四化建设的发展，它的应用将日益频繁．在中等专业学校里学点概率论与数理统计初步，对后继课的学习与毕业后参加工作或进一步学习都有重要的意义．

本书是按中专教材编写会议上确定的大纲编写的，内容精炼，叙述通俗易懂，便于成人学习．

全书分三部分：排列与组合部分(第一章)作为预备知识；概率论部分(第二章至第四章)作为基础知识，阐述了必要的理论基础；数理统计部分(第五章至第七章)介绍了常用的统计推断方法、参数估计与假设检验.

本书的前两部分由许必荣同志编写，数理统计部分由王樵编写.全书由黄午阳、高尚华统稿及审订.

由于编者水平有限，书中不妥和谬误之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

1986.1

目　　录

第一章　排列和组合 ……………………………………（1）
§1-1　排 列……………………………………………（1）
练习 1-1 ……………………………………………（9）
§1-2　组 合……………………………………………（9）
练习 1-2 ……………………………………………（14）
习题 1-1 ……………………………………………（15）
小结 …………………………………………………（15）
复习题 ………………………………………………（16）
第二章　概率论的基本概念 ………………………………（18）
§2-1　随机事件 ………………………………………（18）
练习 2-1 ……………………………………………（25）
§2-2　事件的概率 ……………………………………（25）
练习 2-2 ……………………………………………（33）
习题 2-1 ……………………………………………（33）
§2-3　概率的加法公式 ………………………………（34）
练习 2-3 ……………………………………………（37）
§2-4　条件概率与全概率公式 ………………………（37）
练习 2-4 ……………………………………………（45）
习题 2-2 ……………………………………………（46）
§2-5　独立性 …………………………………………（47）
练习 2-5 ……………………………………………（53）

习题 2-3 ……………………………………………………………(54)
小结 ……………………………………………………………………(55)
复习题 …………………………………………………………………(56)
第三章　随机变量及其分布 ……………………………………(57)
§3-1　随机变量 ………………………………………………………(57)
§3-2　离散型随机变量 ………………………………………………(59)
练习 3-1 ………………………………………………………………(64)
习题 3-1 ………………………………………………………………(65)
§3-3　连续型随机变量 ………………………………………………(65)
练习 3-2 ………………………………………………………………(73)
§3-4　分布函数 ………………………………………………………(74)
练习 3-3 ………………………………………………………………(81)
习题 3-2 ………………………………………………………………(82)
小结 ……………………………………………………………………(83)
复习题 …………………………………………………………………(85)
第四章　随机变量的数字特征 ……………………………………(87)
§4-1　数学期望 ………………………………………………………(87)
练习 4-1 ………………………………………………………………(91)
§4-2　数学期望的简单性质 …………………………………………(91)
练习 4-2 ………………………………………………………………(93)
习题 4-1 ………………………………………………………………(94)
§4-3　方差 ……………………………………………………………(94)
练习 4-3 ………………………………………………………………(97)
习题 4-2 ………………………………………………………………(98)
§4-4　几种重要的分布的数学期望与方差 …………………………(98)
小结 ……………………………………………………………………(103)
复习题 …………………………………………………………………(104)

第五章　定值估计 ……………………………………(106)
§ 5-1　数理统计的基本概念及统计推断法 …………(106)
§ 5-2　参数的定值估计 …………………………………(108)
§ 5-3　简化计算法 ………………………………………(111)
练习 5-1 ……………………………………………………(119)
习题 5-1 ……………………………………………………(119)
小结 …………………………………………………………(121)
第六章　区间估计 ……………………………………(123)
§ 6-1　用 u 分布对 $E(X)$ 进行区间估计 ……………(125)
§ 6-2　用 t 分布对 $E(X)$ 进行区间估计 ……………(128)
§ 6-3　正态总体方差 $D(X)$（或 $\sqrt{D(X)}$）的
区间估计 ……………………………………………(131)
练习 6-1 ……………………………………………………(136)
习题 6-1 ……………………………………………………(136)
小结 …………………………………………………………(137)
第七章　假设检验 ……………………………………(141)
§ 7-1　用 u 检验法检验 $E(X)=\mu$ ……………………(143)
§ 7-2　用 t 检验法检验 $E(X)=\mu$ ……………………(145)
§ 7-3　用 T 检验法检验 $E(X)=E(Y)$ …………………(147)
§ 7-4　用 χ^2 检验法检验 $D(X)=\sigma^2$
（或 $D(X)=\sigma$） ……………………………………(150)
§ 7-5　用 F 检验法检验 $D(X)=D(Y)$ …………………(153)
练习 7-1 ……………………………………………………(158)
习题 7-1 ……………………………………………………(158)
小结 …………………………………………………………(160)
复习题 ………………………………………………………(163)
附表 1　正态分布数值表 ………………………………(165)

附表2 t分布临界值表 ……………………………………(166)
附表3 χ^2分布临界值表 ……………………………………(167)
附表4 F分布临界值表($\alpha=0.025$) ……………………(168)
习题答案 ………………………………………………………(170)

第一章 排列和组合

排列和组合是数学的重要基础知识之一．它对学习概率论和解决某些实际问题都有重要的作用．

本章将在阐明排列和组合意义的基础上，学习几种基本的、常用的排列和组合问题的解法．

§1-1 排 列

一、两个基本原理

在研究排列问题之前，先介绍两个基本原理．让我们来看这样的一个问题：

从甲地往乙地，可以乘火车，也可乘轮船，还可乘飞机，如果一天内火车有 8 个班次，轮船有 2 个班次，飞机有 1 个班次，问一天中乘不同班次的火车、轮船或飞机，共有几种不同的选择方法？

因为乘火车有 8 种不同的方法，乘轮船有 2 种不同的方法，乘飞机只有一种方法．每一种方法都可直接从甲地到达乙地，所以不同的选择方法共有

$$8+2+1=11 \text{ 种．}$$

一般地说，我们有下面的基本原理：

如果完成某事件有 n 种方式，第一种方式中有 n_1 个方法，第二种方式中有 n_2 个方法，…，第 n 种方式中有 n_n 个方法，不论用哪一种方式中的哪一个方法，都能达到完成该事件的目的，那么完成这事件共有 $n_1+n_2+\cdots+n_n$ 种不同的方法．

我们称这个基本原理为加法原理．下面再看一个问题：

从二楼到三楼有三部楼梯，从三楼到四楼只有两部楼梯，问从二楼到四楼共有几种不同的走法？

如果用 A_1，A_2，A_3 表示从二楼到三楼的三部楼梯，用 B_1，B_2 表示从三楼到四楼的两部楼梯，那么从图 1-1 可以看出，从二楼到四楼共有下面六种不同的走法：

$$A_1—B_1；\ A_1—B_2；\ A_2—B_1，$$
$$A_2—B_2；\ A_3—B_1；\ A_3—B_2．$$

很明显，要从二楼到四楼可以分成两个步骤：

第一步，先由二楼到三楼的三部楼梯中任选一部，有三种选法；第二步，再从三楼到四楼的两部楼梯中任选一部，有两种选法。而我们计算出来的不同走法的总数 6 恰好就是这两个步骤中每一步骤选法种数的乘积．从这个问题的解法中，我们得到一个重要的启发：如果撇开了问题中所说的从二楼到三楼，又从三楼到四楼的具体内容，而把它们一般地看成是要完成一件事的两个步骤，依次完成这两个步骤，事情就完成了．而完成第一步骤有 n_1 种方法，完成第二步骤有 n_2 种方法，那么完成这件事共有 $n_1 \cdot n_2$ 种不同的方法．更一般地，有下面的基本原理：

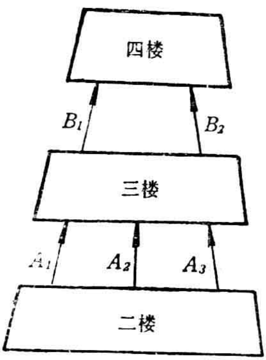

图 1-1

设完成某事件，要有 k 个步骤，完成第一步有 n_1 种方法，完成第二步有 n_2 种方法，…，完成第 k 步有 n_k 种方法，各个步骤依次连续完成，该事件才算完成，那么完成这事件共有 $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k$ 种不同的方法．

我们称这个基本原理为乘法原理．现在运用上述两个原理来解决具体问题．

例 1 某种电风扇上装有四个转速不同的开关，问能控制几种不同的转速？

解 因为任选一个开关都能控制转速，这就是说有四种方式，每一种方式各有一种方法，所以根据加法原理，四种转速不同的开关，共能控制 $1+1+1+1=4$ 种不同的转速．

例 2 由数字 1, 2, 3, 4 中任取三个数字，可组成多少个没有重复数字的三位数？

解 组成一个三位数可分成三个步骤来完成：

第一步选定百位数字，它有四种选法；

第二步选定十位数字，它有三种选法；

第三步选定个位数字，它有二种选法，

依次完成这三种步骤，就能组成一个三位数，根据乘法原理，共可组成 $4\times3\times2=24$ 种不同的三位数．

例 3 将编号为 a, b, c 的三个球放入三个盒子中，每盒只放一球，总共有多少种不同的放法？

解 我们可以把三个盒子排成一列，先从编号为 a, b, c 的三个球中，任选一个球放入第一个盒子中，再从剩下的两个球中，任选一个球放入第二个盒子中去，最后把剩下的一个球放入

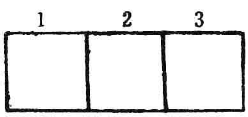

图 1-2

第三个盒子中去，这样依次完成三个步骤就把三个球放入三只盒子中去了．因为第一步有三种放法，第二步有两种放法，第三

步只有一种放法，所以共有

$$n=3\times 2\times 1=6 \text{ 种}$$

不同的放法。

二、排列的概念

上面的例 2、例 3 虽然研究的对象不同，但是它们都有一个共同的特点，它们都是从一些被研究的对象中取出若干排成一列；如果不管这些具体的对象是什么，把它抽象出来，称为元素，那么就得到排列的概念，一般地说，有下面的定义：

从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个（$m\leqslant n$），按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素里每次取出 m 个元素的排列，当 $n>m$ 时，所得的排列叫做选排列，当 $n=m$ 时，所得到的排列叫做全排列。

例如，从 a, b, c 三个元素中，任取两个元素的选排列为：

$$ab,\ ba,\ bc,\ cb,\ ac,\ ca.$$

其中 ab 和 ba 尽管元素相同，但顺序不同，因而是两种不同的排列，而 ab 与 ac 中所含的元素不完全相同，当然是两种不同的排列。

从 n 个不同元素中，每次取出 m 个元素进行排列，所有不同的排列种数通常用 A_n^m 表示，而用 P_n 表示 n 个元素所有不同全排列的种数．例如，三个不同元素中，每次取出两个元素的选排列种数为

$$A_3^2=3\times 2=6.$$

例 4　试写出三个不同元素 a, b, c 的所有全排列，并计算其种数 P_3。

解　三个不同元素 a, b, c 的所有全排列为 abc, bac, cab, acb, bca, cba。

容易看到 $P_3=6$。

三、排列种数的计算

许多实际问题中,我们并不关心具体的排列,而只要知道不同的排列种数有多少，如何来求得这个排列种数呢？先从具体的例子着手寻求一般的计算方法.

例 5 从四个不同的元素中,每次取出两个来排列，问共有多少种不同的排列方法？

解 我们把这两个元素所排列的位置分为第一位与第二位,第一位可从四个元素中任取一个来排列,共有四种方法，第二位只能在余下的三个元素中任取一个,有三种方法，如图 1-3 所示. 这两个位置依次排完，就得到所有的选排列. 根据乘法原理就有

$$A_4^2 = 4\times 3 = 12,$$

也就是说共有 12 种不同的排列.

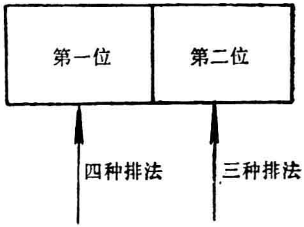

图 1-3

例 6 从 10 个不同的元素中,每次取出 5 个元素来排列,问不同的排列数有多少种？

解 我们把这 5 个元素的排列位置分别称为第一、第二、第三、第四、第五位. 第一位可以从 10 个元素中任取一个来排,有 10 种方法;第二位可以从余下的 9 个元素中任取一个来排,有 9 种方法；…；第五位只能在剩下的 6 个元素中任取一个来排,有 6 种方法，如图 1-4 所示：

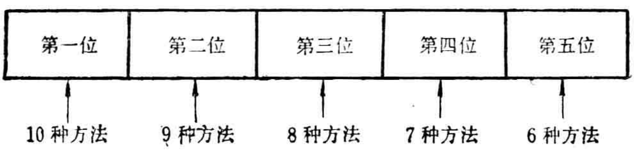

图 1-4

五个位置依次排完，事情就做完，根据乘法原理得到：

$$A_{10}^5=10\times9\times8\times7\times6=30240$$

即排列种数为 30240。

现在来考虑：从 n 个不同元素里，每次取出 m 个元素的排列种数 A_n^m 的计算方法。

我们在每一种排列里，把 m 个元素所排列的位置分为第一位，第二位，第三位，…，第 m 位，第一位可以从 n 个元素里任取一个来排，有 n 种方法；第二位可从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个来排，有 $n-1$ 种方法；…；依次继续排下去，直到第 m 位，只能在剩下的 $n-(m-1)$ 个元素中任取一个来排，有 $n-(m-1)$ 种方法，这可用图 1-5 来表示：

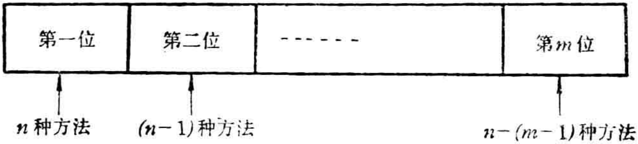

图 1-5

这 m 个位置依次排完，就完成了排列，根据乘法原理得到下面的计算公式：

$$A_n^m=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times[n-(m-1)] \qquad (1\text{-}1)$$

这就是说，从 n 个不同的元素中每次取出 m 个元素的排列种数等于 m 个连续自然数的积，其中最大的数是 n。

当 $m=n$ 时，

$$P_n=A_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1.$$

我们称 $1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$ 为 n 的阶乘，记为 $n!$ 即

$$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$$

于是就有

$$P_n=n! \qquad (1\text{-}2)$$

例 7 计算：(1) $\dfrac{3A_{16}^3}{A_8^4}$；

(2) $\dfrac{10!-8!}{8!}$.

解 (1) $\dfrac{3A_{16}^3}{A_8^4}=\dfrac{3\times16\times15\times14}{8\times7\times6\times5}=6$；

(2) $\dfrac{10!-8!}{8!}=\dfrac{8!(9\times10-1)}{8!}=89$.

例 8 试证 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

证明 由公式(1-1)得

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)](n-m)[n-(m+1)]\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-m)[n-(m+1)]\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

在计算 A_n^m 时，常用到这个公式。为了使 $n=m$ 时，这个公式也能成立，我们规定 $0!=1$.

例 9 10 个座位，6 人去坐，每人坐一个座位，共有几种坐法？

解 假设这 6 个人为 a, b, c, d, e, f. a 去坐座位的方法有 10 种；无论 a 怎么坐，坐好后，b 去坐的方法有 9 种；a, b 不论用哪一种方法坐好后，c 再去坐的方法有 8 种；…；f 去坐的方法有 5 种，根据乘法原理共有：

$$10\times9\times8\times7\times6\times5=151200 \text{ 种坐法},$$

这恰好是 A_{10}^6 种坐法。

例 10 由 0, 1, 2, 3 这 4 个数字可以组成多少个没有重复的四位数？

解一 因为"0"不能作为四位数中千位上的数字，我们可把

这个四位数分成两步来安排：先排千位上的数字，它可从1,2,3中任取一个，共有A_3^1种排法；然后再安排其它三位数，它是剩下的三个数字的全排列，共有P_3种排法，由于依次完成这两步骤后四位数就排好．所以没有重复数字的不同四位数的排法有

$$n=A_3^1\cdot P_3=3\times 6=18\text{个}.$$

解二 从4个数字中，每次取出4个的排列数是P_4种，这P_4种排列里包含两类：一类是以"0"为排头的数字，共有P_3种，这类排列不能组成4位数；另一类不是以"0"为排头的排列，这类排列才能组成4位数，因此，所求的四位数的个数为：

$$P_4-P_3=4!-3!=24-6=18\text{个}.$$

解法二是加法原理的应用，如果用N表示四位无重复数字的四位数的总个数，用n_1表示以"0"为排头的排列总个数，以n_2表示"0"不在排头的排列总个数，那么

$$n_1+n_2=N$$

由此，可得到$n_2=N-n_1$.

这种解题方法常用在解决有附加条件的排列问题．其解法是先不考虑附加条件，求出所有的排列种数，然后再减去不满足附加条件的排列种数，从而得到所要求的排列数．

四、不同元素的重复排列

例11 问4名运动员争夺3项冠军，有几种可能的结果？

解 因为每一项冠军都可被四名运动员中任意一名获得，它有四种可能，所以三项冠军共有$N=4\times4\times4=64$种可能．

象例11这类问题称为不同元素的重复排列．应用乘法原理容易得到下面的结论：

从n个不同的元素里，如果每个元素都可以重复被选取，那么取m个元素的所有排列的种数是

$$N=n^m \tag{1-3}$$