

国外信息科学与技术优秀图书系列

泊松点过程

——成像、跟踪和感知

Poisson Point Processes
Imaging, Tracking and Sensing

〔美〕Roy L. Streit 著
史习智 龚光鲁 徐明 译



科学出版社

国外信息科学与技术优秀图书系列

泊松点过程

——成像、跟踪和感知

Poisson Point Processes
Imaging, Tracking and Sensing

〔美〕 Roy L. Streit 著

史习智 龚光鲁 徐 明 译



科学出版社

北 京

图字: 01-2013-1327

内 容 简 介

本书提出了一种学习泊松点过程(PPP)的结构性方法,结构性的定义较公理更易于理解。它能够使有一定数学能力的读者在不借助公理化的测度论方法的情况下,获得对 PPP 的理解和方法。

全书共 9 章,分为 3 部分。第 1 部分的 2~4 章是数学基础,介绍泊松点过程、强度估计及其克拉默-拉奥界。第 2 部分的 5~7 章是本书的重点,着眼于泊松点过程的三个重要应用主题,即断层成像、目标跟踪和分布感知,其中的目标跟踪内容反映了最新的研究进展。第 3 部分的 8~9 章给出了超越泊松点过程的其他点过程,作为进一步的研究方向。本书也反映了作者长期从事声呐技术研究的理论成果和实践。

本书可作为高年级本科生、研究生的参考书,也可供相关领域(如断层成像、目标跟踪和分布检测等)的科研人员和工程人员阅读。

Translation from the English language edition:

Poisson Point Processes by Roy L. Streit

Copyright © 2010 Springer US

Springer US is a part of Springer Science + Business Media

All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

泊松点过程:成像、跟踪和感知/(美)斯特利特(Streit, R. L.)著;史习智, 龚光鲁, 徐明译. —北京:科学出版社, 2013
(国外信息科学与技术优秀图书系列)

书名原文: Poisson point processes: imaging, tracking and sensing

ISBN 978-7-03-036821-8

I. ①泊… II. ①斯… ②史… ③龚… ④徐… III. ①泊松过程-点过程-研究 IV. ①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 039395 号

责任编辑:王 哲 / 责任校对:郑金红
责任印制:张 倩 / 封面设计:速底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2013 年 3 月第一次印刷 印张: 14

字数: 282 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

中文版序

泊松点过程(Poisson Point Processes, PPPs)是许多现代问题的核心,有一些应用与PPP模型完全匹配。最成功的案例是医学成像问题,例如正子发射断层成像(Positron Emission Tomography, PET)和单光子发射计算断层成像(Single-Photon Emission Computed Tomography, SPECT)。在这类应用中,所估计的图像是每个像素/体元中放射性同位素密度的空间强度,该强度的分布与被成像组织的代谢率成比例。在临床诊断中,代谢率是很重要的输入数据。另一个涉及PPP且非同寻常的应用领域是多目标跟踪,这是一个正在迅速发展的工程研究领域。令人惊讶的是,跟踪问题与医学成像的数学模型密切相关。在其他一些复杂的问题中,包括分布式传感器检测,PPP也能提供针对现象的定性见解。本书包含了所有这三类应用,深入浅出地为有兴趣的学生提供了学习的方法、理论及其应用。

2009年,我作为一个信息融合国际研讨会的成员首次访华。这场研讨会在中国数个城市举办,分别由北京航空航天大学的杨晨阳教授在北京、西安交通大学的韩崇昭教授在西安、杭州电子科技大学的文成林教授在杭州主持召开。每到一处,东道主都给予热情的接待和周到的帮助,与此同时,我也感受到现代中国的发展奇迹。令我印象尤其深刻的是,参加研讨会的许多中国研究生身上所散发出的能量与求知欲望。他们是中国最宝贵的资源!中译本就是献给他们的。我真诚地希望,中译本的出版能够对他们 PPPs 和其他有限点过程的研究与应用中提供帮助。

我真诚地感谢我的朋友上海交通大学史习智教授从浩瀚丛书中选择此书并推动它在中国出版。没有史教授的关注,就没有中译本的诞生。艰巨的翻译任务由清华大学数学系龚光鲁教授和北京大学数学系钱敏平教授(译第2~4章)以及杭州市对外贸易经济合作局徐明女士(译第5章)共同承担。非常感谢他们的耐心和对我的帮助。

Roy L. Streit
于美国弗吉尼亚 Reston
2012. 7. 25

前 言

有一种学习泊松点过程(Poisson Point Processes, PPPs)的结构性方法非常适用于一类读者,他(她)们希望很快地了解点过程的内容、应用方法以及它是否对工作有所裨益,而无论读者从事什么行业。为了帮助读者实现这一目的,本书通过两步的实现(或仿真)过程来定义 PPPs。该过程随后被用来获得 PPPs 的许多极好的属性。

这种方法在教学上是非常有效的,因为它提出了结构性的 PPP 定义以取代传统的 PPP 公理,如独立散射。这两种方法在数学上是等价的,但其典雅程度就见仁见智了。许多读者会发现结构性的定义较公理更易于理解,尤其对于初学者。不管怎样,本书运用仿真的方法提供了学习 PPPs 和点过程有效的入门方法。

现有的几本 PPPs 及相关主题的书籍多为数学家所著,数学上力求严谨,其价值也体现在数学上的严密性。然而,许多实践者没有足够的专业背景来读懂它们,除非付出大量的时间和精力。我感到缺少这样一本书,能让有一定数学能力的读者了解 PPPs,并在不借助公理化的测度论方法的情况下,理解 PPPs 及其方法。因此,我在写这本书时,脑海中最初浮现的读者就是研究生,特别是在电气工程、计算机科学和数学领域的初学者。当然,本书的真正读者是任何一位想要了解 PPP 的人。

由于与特定的被动声呐问题有这样或者那样的联系,PPPs 才慢慢地引起我的关注。一个是二维功率谱估计,尤其是拖曳线阵的 k - ω 波束形成。另一个是声呐波束形成与计算机断层成像(尤其是投影-切片定理)的关系。其他问题是杂波中的单目标跟踪和更棘手的多目标跟踪。最后一个问题是利用分布式声呐浮标场检测目标。本书的内容在各主题的描述中均清晰可见。

本书涉及我学习 PPPs 的方法,我希望对他人有参考价值。这是一种对 PPP 的概念、方法和应用的标准化的阐述方式,假如一开始我就知晓素材的话,它将促进我本人的理解。

非常感激许多个人和机构对我在写作本书过程中所给予的帮助。感谢 Don Tufts 教授(罗得岛大学)的诙谐而贴切的措词“信号处理的另一惯例”,在我看来,这个词汇捕捉到了我所感受的 PPPs 主题的新颖性。感谢 Wolfgang Koch 博士(Fraunhofer-FKIE/波恩大学),他提示我给出本书各章开篇的极好格言。从反对普遍存在的鼓吹仿真的角度而言,这些格言是一个巨大的精神支持。感谢 Dale Blair 博士(乔治亚理工学院研究所)关于普及 PPPs 辅导教程的建议,而这个建议最终成为一本书那是因我之故。

感谢 Keith Davidson 博士(美国海军研究局)对我研究的支持,这些研究成为第 6 章多目标强度跟踪的基本内容。感谢 Metron 公司提供的数学培养环境,鼓励我认真地探讨 PPPs 的各种应用。这样的工作环境是持续多年的领导和管理的结果。

感谢 Lawrence Stone 博士——Metron 公司的创始人之一,他对本书部分章节的初稿提出了许多建议,有益于改进本书的内容和清晰度。感谢 James Ferry 博士(Metron 公司)数月以来的建议,使我受益匪浅。感谢 Grant Boquet 博士(Metron 公司)对于楔积的见解,并帮助我学习和使用 LaTeX,他的耐心是不同寻常的。我也要感谢 Lance Kaplan 博士(美国陆军研究实验室)、Marcus Graham 博士(美国海军水下作战中心)和 Frank Ehlers 博士(北约水下研究中心)对作为本书雏形的辅导教程初稿所给予的鼓励和建议。

最后,感谢我的妻子 Nancy,我的家人 Adam、Kristen、Andrew 和 Katherine,以及四条腿伙伴 Sam 和 Eddie,感谢他们坚定的爱与支持。他们对我永远都是最重要的。

Roy L. Streit

于美国弗吉尼亚 Reston

2010. 2. 14

目 录

中文版序

前言

第 1 章 导论	1
1.1 全书一览	2
1.1.1 部分 I——基础知识	2
1.1.2 部分 II——应用于成像、跟踪和分布感知	3
1.1.3 部分 III——超越泊松点过程	3
1.1.4 附录	4
1.2 实线不充分之处	4
1.3 一般点过程	5
1.4 另一种习惯提法	6

部分 I 基础知识

第 2 章 泊松点过程	8
2.1 事件空间	8
2.2 强度	9
2.3 实现	10
2.4 似然函数	13
2.5 期望	14
2.5.1 定义	14
2.5.2 随机和	16
2.6 Campbell 定理	18
2.6.1 PPPs 的特征化	19
2.6.2 概率生成泛函	20
2.7 叠加	21
2.8 独立(伯努利)细化	23
2.9 独立性说明	26
2.9.1 独立散射	26
2.9.2 泊松策略	29
2.9.3 泊松分布的不可或缺性	30
2.9.4 与随机过程的联系	32

2.10	非线性变换	33
2.11	随机变换	36
2.11.1	转移过程	36
2.11.2	观测过程	37
2.12	其他空间中的 PPPs	39
2.12.1	离散空间	40
2.12.2	离散-连续空间	42
第 3 章	强度估计	44
3.1	最大似然算法	45
3.1.1	必要条件	45
3.1.2	高斯十字瞄准线和边缘效应	46
3.2	样本数据的叠加强度	48
3.2.1	样本数据的 EM 方法	49
3.2.2	权重的解释	51
3.2.3	简单的例子	52
3.2.4	仿射高斯和	53
3.3	直方图数据的叠加强度	56
3.3.1	直方图数据的 EM 方法	56
3.3.2	仿射高斯和	59
3.4	正则化	60
3.4.1	参数系定	61
3.4.2	贝叶斯方法	62
第 4 章	强度估计的克拉默-拉奥界 (CRB)	63
4.1	背景	64
4.1.1	无偏估计	64
4.1.2	费希尔信息矩阵和得分向量	65
4.1.3	CRB 和柯西-施瓦茨不等式	65
4.1.4	附带说明	67
4.2	样本数据的 PPP 强度的 CRB	68
4.3	直方图数据的 PPP 强度的 CRB	70
4.4	离散空间上的 PPP 强度的 CRB	73
4.5	选通:基架上的高斯分布	74
4.6	高斯和的联合 CRB	76
4.6.1	一个高斯和中的均值向量	76
4.6.2	高斯和的均值与系数	77

4.7 观测信息矩阵	78
4.7.1 一般和	79
4.7.2 仿射高斯和	80

部分 II 应用于成像、跟踪和分布感知

第 5 章 断层成像	84
5.1 正子发射断层成像	85
5.2 PET; 飞行时间数据	87
5.2.1 图像重构	87
5.2.2 小单元极限	91
5.2.3 直观的阐释	91
5.3 PET; 直方图数据	91
5.3.1 作为离散空间的检测器	91
5.3.2 Shepp-Vardi 算法	92
5.4 单光子发射计算断层成像	96
5.4.1 伽马照相机	96
5.4.2 图像重构	97
5.5 传输断层成像	103
5.5.1 背景描述	103
5.5.2 Lange-Carson 算法	104
5.6 发射断层成像和传输断层成像的 CRBs	109
5.7 正则化	111
5.7.1 筛的 Grenander 方法	111
第 6 章 多目标跟踪	113
6.1 强度滤波器	114
6.1.1 PPP 模型说明	114
6.1.2 预测目标和测量过程	115
6.1.3 信息更新	117
6.1.4 最终滤波器	120
6.2 与其他滤波器的关系	122
6.2.1 概率假设密度滤波器	122
6.2.2 有标号的多传感器强度滤波器	123
6.3 实现	124
6.3.1 粒子方法	124
6.3.2 均值移位算法	126
6.3.3 多模式算法	127

6.3.4	协方差矩阵	127
6.3.5	高斯和方法	129
6.3.6	正则化	129
6.4	估计目标数	131
6.4.1	误差源	131
6.4.2	方差减少	132
6.5	多传感器强度滤波器	132
6.5.1	同一探测范围传感器	133
6.5.2	非纯一传感器探测范围	135
6.6	历史性事件注解	136
第7章	分布式感知	138
7.1	距离分布	139
7.1.1	传感器对目标	139
7.1.2	传感器之间	142
7.2	通信分集	145
7.3	检测覆盖范围	146
7.3.1	平稳传感器场	147
7.3.2	漂移场和各向异性	150
7.4	立体测量学	152

部分 III 超越泊松点过程

第8章	点过程的丰富内容	156
8.1	标号过程	157
8.1.1	乘积空间和标号定理	157
8.1.2	滤波过程	159
8.1.3	无偏估计器的 FIM	159
8.2	硬核过程	160
8.3	聚点过程	161
8.3.1	泊松聚点过程	161
8.3.2	Neyman-Scott 过程	162
8.4	Cox(双随机)过程	163
8.4.1	等效 Neyman-Scott 过程	164
8.4.2	强度函数为 SDE 之解	165
8.4.3	马尔可夫调制泊松过程	165
8.5	吉布斯点过程	166

第 9 章 剪辑室	167
9.1 进一步的课题	167
9.2 可能趋势	169
附录 A 期望最大化方法	170
附录 B 求解条件均值方程	175
附录 C 贝叶斯滤波	177
附录 D 强度滤波器的贝叶斯推导	181
附录 E MMIF: 标号多目标强度滤波器	186
附录 F 线性滤波器模型	192
术语表	195
缩写词表	199
参考文献	201
索引	207

第1章 导 论

最实用的,莫过于完美的理论^①。

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦

摘要 本书的目的是提供一个易于理解多维非齐次泊松点过程(PPPs)的讨论。在纵览文献的同时,新的应用使得讨论内容更为突出。本书有一章用于以结构性方法展示过程的基本性质,与通常的抽象方法相比,它更便于读者理解 PPPs。有两章讨论强度估计算法,特别注意高斯和与无偏估计误差的克拉默-拉奥界。另有三章讨论医学成像、多目标跟踪和分布式网络感知。最后一章讨论过程各点之间的空间相关模型的非泊松点过程。

关键词 泊松点过程(PPPs);断层成像;正子发射断层成像(PET);单光子发射计算断层成像(SPECT);多目标跟踪;分布式传感器检测;通信分集;最大似然估计;克拉默-拉奥界;标号 PPP;芽粒模型;二项点过程

对于涉及多维空间中点的随机出现的几何分布的各种应用,泊松点过程是非常有用的理论模型,其中,点的数目和位置都可建模为随机变量。非齐次 PPPs 是针对重视空间和/或时间非均匀性的应用情况特别设计的,而齐次 PPPs 是仅对具有空间或时间均匀性的应用才有用的理想化模型。

与齐次 PPPs 相比,非齐次 PPPs 几乎不需求额外的概念上和数学上的负担。对广大读者来讲,本书易于理解,因为贯穿全书的是结构性数学工具,而属于数学严格性但不易透彻理解的抽象分析则留待查阅文献。

PPPs 是高度灵活的模型,具有日益增多的新应用点。令人感兴趣的现代应用领域通常包括非齐次 PPPs 和多维 PPPs。在某些应用中,PPPs 与物理系统和工程系统十分匹配,断层成像——特别是正子发射断层成像,就是一个非常好的实例。在其他应用中,PPP 近似可捕获问题的最重要方面,从而避免或绕开临界的计算瓶颈。新近的多目标跟踪应用是一个极好的例子,而在其他的应用中,PPPs 主要用于获得对非常复杂的系统行为的深入理解。这类例子包括分布式传感器网络中的检测覆盖和传感器之间的通信。

通过介绍共同的 PPP 框架下的各种应用,本书揭示了其间不曾预料到的联系,也

^① 物理学界普遍认为这句格言出自麦克斯韦,但文献[68]显示,此言出自社会学、组织学和应用心理学的先驱库尔特·勒温(Kurt Lewin,1890—1947)。

展现出新的研究方向。在此介绍这些联系,尚属首次。当工程师和物理学家一同工作时,更能满足数学与应用上的要求。

1.1 全书一览

全书分为3个部分和1个附录。第1部分包括前4章,讨论从 PPPs 的基本性质到推理和估计等几个方面。讨论的着眼点是 PPPs 本身,而非其应用。

应用归入第2部分,讨论成像、跟踪和感知等方面的应用。成像专注于断层成像,跟踪意味着多目标跟踪和多感知器跟踪,而感知则针对分布式传感器网络的检测覆盖和通信分集。第3部分讨论用于实践但不是 PPPs 的点过程,以试图平衡全面的展望,不过只描述了其中的几个过程。

1.1.1 部分 I——基础知识

第1章介绍了 PPPs 并说明强调多维过程的理由,讨论了限制过于一般的随机集合概念的几种方法,以便将其用于理论和实践,并将 PPPs 与其他有关的点过程放在一起探讨。

第2章讨论了非齐次 PPPs 的几个有用而重要的性质。一般 PPP 定义为二步仿真程序,在仿真之后,给出 PPPs 的重要性质。这种方法使得那些对该主题陌生的读者能很快地理解 PPPs 的内容,这点与常用的教科书方法相反。常用方法是先做几个理想化的假设,随后再推导仿真程序。首先,讨论被认为对新手最有用的 PPPs 的主要性质。其次,对 PPPs 做一些基本运算,可产生也是 PPPs 的新的点过程。其中,几个最重要的运算是叠加、独立细化、非线性映射以及诸如转移过程和观测过程的随机变换。最后,给出一些实例以助于理解。

第3章讨论了 PPPs 的估计问题。定义的 PPP 参数是它的强度函数,或简称强度,当强度已知时,PPP 完全特征化。在许多应用中,强度是未知的,须从数据来加以估计。本章讨论的情况是强度函数的形式由有限数目的参数加以指定。估计问题是从给出的测量数据确定这些参数的适当值。本书采用的主要估计方法是最大似然 (Maximum Likelihood, ML) 方法和最大后验 (Maximum A Posteriori, MAP) 方法。利用期望最大化 (Expectation Maximization, EM) 方法获得估计指定为高斯和的强度的 ML 算法。正则化为单位积分的高斯和被称为高斯混合,已广泛地用于模型概率密度函数 (probability density functions, pdfs)。考虑两类不同的数据,即由 PPP 实现的点所组成的 PPP 样本数据和仅由落入直方图指定单元的点数所组成的直方图数据。

第4章探讨以克拉默-拉奥界 (Cramér-Rao Bound, CRB) 定量地评定强度估计的质量。CRB 是任何无偏估计的方差下界,直接由数据的似然函数的数学形式所确定。值得注意的是,一般 PPP 强度估计的 CRB 具有一个简单的形式。本章分别对 PPP 样本数据 (有时称为“计数记录数据”) 以及直方图数据给出第3章中的高斯和强度模型的 CRB。因为样本数据构成 PPP 的一次实现,所以点是独立同分布的 (independent and identically distributed, i. i. d.)。

1.1.2 部分 II——应用于成像、跟踪和分布感知

第5章讨论发射断层成像和传输断层成像。首先介绍正子发射断层成像(PET),因为PET和PPP模型匹配得非常好,并推导了PET的最大似然算法。原先的算法^[110]可追溯至1982年,之后有许多变体,但是均称为Shepp-Vardi算法。重要的是,该算法是所有现代使用的PET医学成像的基础。该算法最初是Richardson在1972年^[102],之后Lucy在1974年^[72]在图像解卷积中独立提出的,所以又称为Richardson-Lucy算法。

临床诊断上,单光子发射计算断层成像(SPECT)比PET使用得更普遍。从一架可移动伽马照相机拍到的多幅快照估计出重构图像。基于EM的SPECT重构算法是由Miller、Snyder和Miller在1985年推导出来的^[82]。不甚确切地说,重构算法平均几个Shepp-Vardi算法,对每幅伽马照相机的快照都做计算,即多快照平均。相关内容在5.4节中介绍。

5.5节讨论传输断层成像,又称计算断层成像(Computed Tomography, CT)。基于EM的重构算法是由Lange和Carson在1984年推导出来的^[65]。虽然也基于EM,但它的细节结构与Shepp-Vardi算法的结构有很大的不同。5.6节介绍PET和CT的CRB。

第6章介绍PPP的多目标跟踪应用,多目标状态建模为PPP。贝叶斯后验点过程不是PPP,但与PPP近似。它被称为强度滤波器是因为其递归地更新PPP近似的强度。增广状态空间能在线估计作为滤波器固有部分的杂波和目标出现PPP。强度滤波器的信息更新看来与第5章讨论的PET Shepp-Vardi算法的第一步相同。

以杂波和目标出现PPP的先验知识修改后验PPP强度就可由强度滤波器获得概率假设密度(Probability Hypothesis Density, PHD)滤波器。Mahler从1994年以来在一系列文章中首次用其他方法推导出多目标应用的PHD滤波器,详情请参阅文献[76]及其所引用的文章,讨论了Mahler的方法和在此所用方法之间的关系。

第6章中也介绍了多传感器强度滤波器。PPP多目标模型与单传感器的情况相同。假设传感器是条件独立的。得到的强度滤波器与第5章给出的SPECT Miller-Snyder-Miller算法的第一步基本相同,依此类推,传感器数据等效于伽马照相机快照。

第7章使用一种基于随机几何(PPP的经典基础之一)的方法讨论分布式网络传感器。对给定的传感器配置,这些结果会提供总体系统性能估计而不是单一性能估计。特别强调点-事件性质和事件-事件性质之间的对比,讨论Slivnyak定理作为联系两种概念的一种方法。阈值作用引人注目,它提供有意义的洞察力。例如,几何随机图理论的新近结果表明,随着传感器通信距离的增加,随机分布网络会以非常高的概率突然出现通信分集。如果传感器通信距离 R 大于(或小于)某个阈值,比如说 R_{thresh} ,则绝大多数的随机传感器分布一定会出现(或不出现)通信分集。

1.1.3 部分 III——超越泊松点过程

第8章回顾了几个有趣但非PPP的点过程。在包括信号处理的许多不同应用中,高精度的真实模型需要非泊松点过程。或许最广泛使用的是标号PPP,其中,PPP实

现的每个点带有一个“标号”。其他模型提供各种不同的过程点之间的空间相关,对于过程点不是独立分布的问题就需要它们。一个例子是非重叠硬球中心的点的集合。本章叙述了从 PPPs 获得许多有用过程的各种策略。其他点过程最好与 PPPs 的关系疏远,一个典型的例子是吉布斯过程,通过一个指定的对过程点定义的能量函数建立空间相关的模型。

第 9 章进一步简要地勾画出应用和研究方法的方向。克服瑞利极限的成像技术能提供非齐次和多维 PPPs 大量新的应用。统计观点的新方法,例如,马尔可夫链-蒙特卡罗 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC)^[24] 能使非泊松过程用于比现在更为广泛的应用领域。

1.1.4 附录

个别附录内容会干扰说明流程,而其他附录则补充本书的正文。

附录 A 简要地介绍期望最大化算法。使用迭代优化方法提供对 EM 的一个严格的数值理解而非概率性的理解。

附录 B 讨论在各种最大似然估计问题中出现的条件均值方程的数值解。

附录 C 给出一般贝叶斯滤波的总体看法,其中,将线性高斯卡尔曼滤波器作为特例。

附录 D 给出强度滤波器的另一种贝叶斯求导,着重于对称型、边缘化和“均场”近似。它也有助于读者查阅原始文献。

附录 E 通过 EM 推导多目标跟踪的条件聚点强度滤波器,它是基于条件高斯单目标 PPP 强度叠加的参数滤波器。

附录 F 介绍一种新的平稳时间序列功率谱的标号 PPP 模型,该模型对 EM 估计算法有用。

1.2 实线不充分之处

在成像、目标跟踪和分布式感知等应用中,代表性的维数均大于 1。因此,除少数例外,仅讨论了有限维 PPPs 的性质。排除实线 PPPs 是一种损失,因为它在电话学、更新理论和排队网络等方面已得到广泛而十分成功的应用,电话学则是由 Erlang (c. 1900) 和 Palm (1943) 开始的。它们的许多性质主要取决于点在实线上的线性次序关系,所以并不扩展至高维空间。文献中也充分而广泛地讨论了一维 PPPs。

多维观点出于纯技术原因而忽略一维 PPPs,其实,所有实线上的非齐次 PPPs 都能变换为齐次 PPP (见 2.10 节的讨论)。所要求的变换是非线性映射的逆,然而,维数大于 1 的情况不存在逆函数,这是另一个有趣的问题。因此,在实线上,丢失了非齐次 PPPs 的许多先天独特性,只在高维空间才重新找回。

1.3 一般点过程

“随机集合”的概念过于一般,并不能算为特别有用的概念,典型情况是使用一些方法将其限定于某些方式。随机几何中,随机集合通常是“随机地”选取若干类认为感兴趣的集合。平面中所有三角形的类就是此类的一个例子。在这种情况下,一个传统问题是“随机三角形为尖锐的概率是多少?”而更难的问题是“随机四边形为凸的概率是多少?”

一个精心制作的例子是平面上有限数个盘的并类。此例中,随机集合是有限数个闭合盘的并,其中,盘的数目以及它们的中心和半径都是按照指定的随机方法加以选择的。这种模型通常称为布尔模型,有时也称为芽粒模型^{[16, 9.1.3节], [123, 第3章]}。芽是盘的中心,粒(也称为主粒)是盘本身。

芽和粒可取非常一般的形式,粒甚至无须是连通集。芽代表性地选为一个特别的有限点过程的点,该点过程是 PPP,将在随后加以叙述。布尔模型的一个经典问题是:“一个给定点被随机集合中至少一个盘所覆盖的概率是多少?”一个与此密切相关的问题是:“一个给定点被随机集合中精确地 $k \geq 1$ 盘所覆盖的概率是多少?”布尔模型所生成的集合是一类更一般的特殊集合,称为随机闭集(Random Closed Sets, RACS)^[79]。

属于仅包含状态空间 S 的点的集合类的随机集合引起点过程。因此,一个点过程是一个随机变量,它的实现是该类中的集合。对大多数应用,点过程定义在 $\mathbb{R}^m, m \geq 1$ 。

一个有限点过程是一个随机变量,它在 S 的任何有界子集 $\mathcal{R}$ 中的实现仅包含 $\mathcal{R}$ 的有限数个点。有许多方法可选取点数及其位置。一个重要的子类由具有独立同分布(i. i. d.)点的有限点过程所组成。

有许多 i. i. d. 有限点过程的元,至少有两个被称为过程。其中之一是二项点过程(Binomial Point Process, BPP)。BPP 是指点数 n 在整数 $\{0, 1, \dots, K\}$ 上呈二项式分布, $K \geq 0$ 是整数参数。BPP 的点也按照 S 上的空间随机变量 X 定位,概率密度函数为 $p_X(x)$ 。明确地,对任何有界子集 $\mathcal{R} \subset S$,在 $\mathcal{R}$ 中出现 n 的概率是

$$P_{\mathcal{R}}[n] = \binom{K}{n} (p_{\mathcal{R}})^n (1 - p_{\mathcal{R}})^{K-n} \quad (1.1)$$

式中,概率 $p_{\mathcal{R}}$ 由下式给出

$$p_{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{R}} p_X(x) dx \quad (1.2)$$

二项式系数是 $\binom{K}{n} = \frac{K!}{n! (K-n)!}$ 。BPP 的点 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 i. i. d. 样点, pdf 是 $p_X(x)$ 。

点数和点位置的 pdf 通过参数 $p_{\mathcal{R}}$ 密切联系在一起。利用熟知的有关二项式分布的实际情况表明, $\mathcal{R}$ 中的平均点数或期望点数是 $p_{\mathcal{R}}K$, 方差是 $p_{\mathcal{R}}(1 - p_{\mathcal{R}})K$ 。任何集合 $\mathcal{R}$ 中的点数都不能超过 K , 因此,即使点是 i. i. d., 分离集中的点数分布仍存在负相

关。宽松地讲,对于 $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$, 如果 $\mathcal{R}_1$ 中的点数比期望值多的话,那么 $\mathcal{R}_2$ 中的点数较少。

另一个称为 i. i. d. 有限点过程的是泊松点过程 (PPP), 它的点数在非负整数 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 上是泊松分布。定义的 $\mathcal{S}$ 子集 $\mathcal{R}$ 上的泊松分布参数与 $\mathcal{R}$ 上有条件的空间随机变量 $X|\mathcal{R}$ 密切相关。然而, 此例中, $X|\mathcal{R}$ 的 pdf 与称为强度函数的非负函数成比例, 而比例性常数是一次实现的期望点数。PPPs 是特定类的 i. i. d. 有限点过程, $\mathcal{S}$ 分离子集的 PPPs 是统计独立的, 这使其成为特别重要的性质。该性质被称为独立散射, 有时又称为独立增量。依此术语, PPPs 不是独立散射过程。

PPPs 实现的点具有在连续空间上定义的强度函数, 概率不为 1。在此情况下, PPP 实现的点通常称为随机有限集合。然而, 有时也定义于离散空间和离散-连续空间 (见 2.12 节)。在这种情况下, PPP 的离散点可能重复具有非零概率。按定义, 集合没有重复的元素, 所以, 更精确地称一次 PPP 实现的点为随机有限表或多集合。为避免过多的细微区别, 随机有限表和随机有限集合都简称为 PPP 实现。

1.4 另一种习惯提法

PPPs 的另一种习惯提法是人们所熟知的随机过程, 不过, 有时会有所混淆。一个随机过程是一族以参数 t 为指标的随机变量 $X(t)$, 通常, t 取为时间。随机过程——特别是高斯随机过程, 已为人们所熟知和理解, 并深入应用在从物理学和工程直到金融和生物学等领域。

泊松随机过程 (请勿与 PPPs 相混淆) 提供一个最早的高斯白噪声模型。真空管中, 加热阴极发射的电子到达阳极产生阳极电流。阳极电流建模为射击噪声, 当电子到达率高时, 电流围绕平均值的波动近似为高斯白噪声过程^[11, 101]。电子的发射时间构成一个一维 PPP。另一种说法是, 阳极电流间断性跳跃的出现时间是 PPP 的一次实现。

维纳过程也看做布朗运动过程。样点路径是连续的, 但无处可微。有时, 更直观地认为该过程是集中高斯白噪声。对于读者, 非齐次 PPPs 趋近高斯过程的相关函数^[48]和序列概率比检验的交叉水平是不足为奇的。

对点过程和随机过程, 独立增量的概念很重要, 然而, 该概念对两者并不精确相同。因此, 更合适的说法是点过程中的独立散射和随机过程的独立增量。如第 2 章中所述, 每个 PPP 都是一个独立散射过程。不过, PPPs 的数学不像随机过程为人们所知晓。与之相比, 每个独立增量随机过程是维纳过程和泊松过程的线性组合^[119], 2.9.1 节将给出进一步的讨论。

PPPs 具有诸如线性叠加和非线性变换下的不变性等性质, 在许多应用中都很有用。下一章要介绍这些基本性质。