时代教育

2003年 高考专项训练丛书

立体几何

最新高考数学热点题型及解题方法大全

题型精　题量足
解法全　讲解细

宋川利　主编
高考命题研究组　审定

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高考专项训练丛书

最新高考数学热点题型及解题方法大全
立体几何

宋川利 主编
杨振强 郭 璋 段长连
李建杰 李树斌 吴振年 编著

机械工业出版社

本书包括立体几何六项重点内容简析、解题基本方法与技巧和高考实战专题分析等内容。六项重点内容简析以基本知识为准则，突出高考命题的重点、难点和关键点，形成纵横交错的知识网络；解题技巧与方法以技巧方法为依托，以法带题，用题诠法，法理兼顾；高考实战专题分析以高考题型为载体，配备最佳例题，给出最优化解法，并设有角度型、距离型、应用型、探索型及开放型等专题，紧扣高考、精心剖析，提高学生计算与论证相结合的综合应试能力。

本书为准备参加 2003 年高考的高中生精心打造，具有题型精、题量足、解法全、讲解细等特点，是高中师生理想的复习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

最新高考数学热点题型及解题方法大全．立体几何／宋川利主编．—北京：机械工业出版社，2002.9

（高考专项训练丛书）

ISBN 7-111-03334-5

I. 最… II. 宋… III. 立体几何课—高中—升学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 064870 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：王英杰　　版式设计：郑文斌

封面设计：鞠　杨　　责任印制：付方敏

北京市密云县印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

890mm×1240mm A5·7.125 印张·238 千字

定价：13.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

写在前面的话

“最新高考数学热点题型及解题方法大全”系列是由教学一线的特高级教师和北京市部分区教科研中心的教研员共同讨论、设计、编写而成的。该系列包括《高中代数》、《高中三角》、《立体几何》及《解析几何》四本。该系列具有以下特点：

1. 从内容上看，该系列以数学各分科中相对稳定而独立的知识点为准则，突出教材中的重点和难点，并将高考数学命题的常考点、易错点及关键点进行横竖梳理，多侧面、多层次、全方位加以涵盖，使分散的知识点凝聚成团，形成纵横知识网络，以利于学生的记忆、理解、掌握、类化、拓展和迁移，并转化为实际解题能力。

2. 从选材上看，该系列取材广泛，视野开阔。吸取了北京、上海、江苏、湖北、四川、河北及辽宁等省市数学教研的新思路、新经验和新成果。选例新颖典型，难度贴近高考实际。评析精当，或剖析、或点拨、或变通、或引申，重思考过程、重知识组合、重方法技巧的灵活运用。具有举一反三、触类旁通的功效。

3. 从形式上看，该系列以数学高考题型为落脚点，系统地论述了选择、填空及解答题型的特征、规律、解答方法与技巧。解答题既有学科内与学科间的综合题，又有以现代社会和高等数学为背景的探索题、应用题及创新题，以培养学生数据处理、信息加工、推理论证和建立数学模型等能力。全书以法带题、用题诠法、法理兼顾，极富启发性。

4. 从实用上看，该系列以“教学大纲”为纲、以“现行课本”为本、以“考试说明”为准绳、以高考数学命题思路为导向，起点低、落点高，重点难点诠释明了、关键热点突出、专题集中，注重培养学生解题的灵敏性、准确性及深刻性，表述的逻辑性、完整性及流畅性。该系列预测性强、切题率高，可使不同层次的考生再上新台阶，考出理想的好成绩。各章之后均附有适量的测试题和答案，可帮助考生及时反馈、弥补缺漏。

2002 年 7 月 4 日，北京市教育委员会转发了教育部《关于印发全日制普通高级中学语文等七科教学大纲的通知》，该通知规定数学科删减教学大纲〈修订本〉中“复数的三角形式及复数三角形式的乘法、除法、乘方、开方；二项式定理及二项展开式的性质”等部分内容（三角、立体几何、解析几何没有变化）。根据通知精神，本书在出版前均作了相应的删减和调整，敬请读者关注。

该系列可供高三学生备考之用，也可供关注高考的家长、教师和数学教研人员参考。

编　者

2002 年 9 月

目　　录

第一章　立体几何六项重点内容简析

空间观念和公理化体系处理数学问题的思想方法，是进入高等学校学习所必须具备的数学基础。现行立体几何（必修）教材分直线和平面、多面体和旋转体两章，按教材章后小节归纳共有 36 个知识点，也可以概括为以下六个方面内容。立体几何知识结构见表 1-1。

一、共线与共面

共线与共面问题是立体几何中的基本问题，主要题型有：论证点共线或点共面；论证线共点或线共面；论证面共线或线异面等。论证的理论依据是三个公理及三个推论，再加一个公理。从数年来的高考试题来看，论证线共面或异面、点共线或共面的题型出现极少，近几年基本没有，但还是应引起重视，掌握其思路，做到有备无患。

1. 点共线

论证点共线的基本途径是先证明某些点是某平面的公共点，然后再根据公理 2 把各点归结于两个平面的交线上，而交线即为各点所属的直线。

【例 1】 如图 1-1 所示，四边形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，AB、DC、AD、BC（或其延长线）分别与平面 M 相交于 E、F、G、H。

求证：E、F、G、H 必在同一条直线上。

【证明】 ∵　$AB /\!/ DC$

∴　$ABCD$ 可确定一个平面。

设　$ABCD$ 所在的平面为 N

∵　E、F、G、H 分别在 AB、DC、AD、BC（或其延长线）上

∴　E、F、G、H 都在平面 N 内。

又∵　这些点也在平面 M 内

∴　由公理 2 可知，E、F、G、H 必在平面 M、N 的交线上，即 E、F、G、H 同在一条直线上。

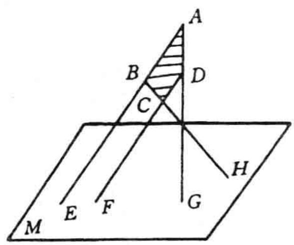
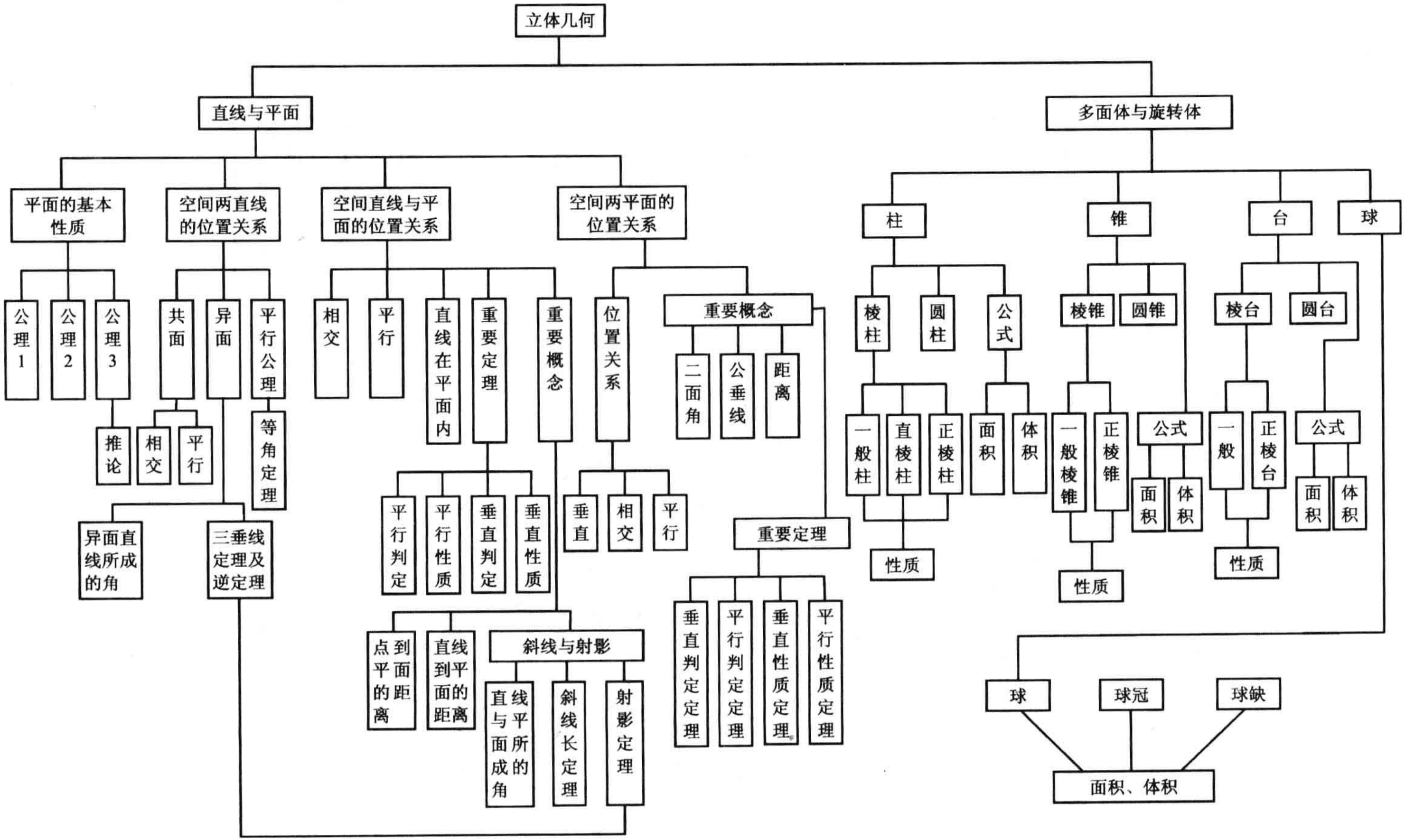


图 1-1

2. 点（线）共面

证点（线）共面时，通常要用到公理 1 或公理 4 及其推论。可以先由某些元素

表 1-1


立体几何
直线与平面
多面体与旋转体
平面的基本性质
空间两直线的位置关系
空间直线与平面的位置关系
空间两平面的位置关系
公理1
公理2
公理3
推论
共面
异面
平行公理
相交
平行
等角定理
异面直线所成的角
三垂线定理及逆定理
相交
平行
直线在平面内
重要定理
重要概念
平行判定
平行性质
垂直判定
垂直性质
点到平面的距离
直线到平面的距离
斜线与射影
直线与平面所成的角
斜线长定理
射影定理
位置关系
垂直
相交
平行
重要概念
二面角
公垂线
距离
重要定理
垂直判定定理
平行判定定理
垂直性质定理
平行性质定理
柱
锥
台
球
棱柱
圆柱
公式
一般棱柱
直棱柱
正棱柱
性质
面积
体积
棱锥
圆锥
一般棱锥
正棱锥
性质
公式
面积
体积
棱台
圆台
一般
正棱台
性质
公式
面积
体积
球
球冠
球缺
面积、体积

确定一个平面，再证其余元素都在这一平面内；也可以先将所有元素分为两（或几个）部分，分别确定两个（或几个）平面，再证这些平面重合。

【例 2】已知：正方体 AC_1，棱长为 a，M、Q、P、N、S、R 是图中各棱的中点。

求证：顺次连结这些中点所围成图形共面。

【证明】如图 1-2 所示，连接 NM 和 AC。

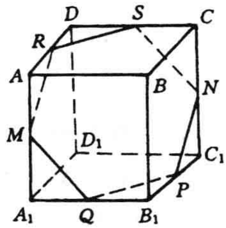


图 1-2

在△ADC 中，RS 显然是中位线。

∴ $RS /\!/ AC$

在矩形 AA_1C_1C 中，显然 $MN /\!/ AC$

∴ $RS /\!/ MN$ ∴ S、R、M、N 四点共面。

同理可证 S、R、M、P 四点共面。但过 S、R、M 的平面有且只有一个。设这个平面是α，则 N、P 在平面α上。同理可证 Q 也在平面α上。

∴ M、Q、P、N、S、R 为平面六边形。

【例 3】已知：$a /\!/ b /\!/ c$，$l \cap a = A$，$l \cap b = B$，$l \cap c = C$。

求证：a、b、c、l 共面。

【证明】如图 1-3 所示。

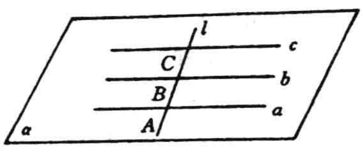


图 1-3

∵ $a /\!/ b$

∴ a、b 确定一个平面，记这个平面为α。

$$\left.\begin{array}{l} l \cap a = A \\ l \cap b = B \end{array}\right\} \Rightarrow l \text{ 上的两点 } A\text{、}B \text{ 在平面}\alpha \text{ 内} \Rightarrow l \subset \alpha\text{。}$$

∴ a、b、l 共面。

换言之，a、l 确定一个平面α，过 l 上一点 B，作 $b /\!/ a$，则 $b \subset$平面α

同理，过 l 上一点 C 作 $c /\!/ a$，则 C 也在 a、l 确定的平面内，

∴ a、b、c、l 共面。

这里，我们先由 $a /\!/ b$ 确定一个平面，然后再证 l、c 都在这个平面内。

在证 a、b、l 共面后，再证 $c \subset$平面α 时，除用直接证法外，还可以用间接证法。

假设 $c \not\subset$平面α，则在平面α 内过 C 有一条直线 $c' /\!/ a$，因 $c /\!/ a$，由三线平行公理，得 $c' /\!/ c$，这与 $c' \cap c = C$ 矛盾，故 $c \subset$平面α。

【例 4】已知：A、B、C、D 是空间四点，且$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90°$。

求证：A、B、C、D 四点共面。

【证明】如图 1-4 所示，先假设 A、B、C、D 四点不共面，记 A、B、D 三点确定的平面α，则 $C\notin$平面α。作 $CH\perp$平面α（垂足为 H），连接 BH、DH、DB。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}CH\perp\text{平面}\alpha\\ CB\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\ HB\perp AB\\[2ex] \left.\begin{array}{r}CH\perp\text{平面}\alpha\\ CD\perp AD\end{array}\right\}\Rightarrow\ HD\perp AD\\ \qquad\qquad\qquad\angle DAB=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\ ABHD\text{ 是个矩形}$$

$$\Rightarrow\ \angle BHD=90^\circ$$

$$\Rightarrow\ BD^2=BH^2+DH^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BCD=90^\circ\Rightarrow BD^2=BC^2+DC^2\\ CH\perp\text{平面}\alpha\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}BC>BH\\ DC>DH\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow\ \text{矛盾}$$

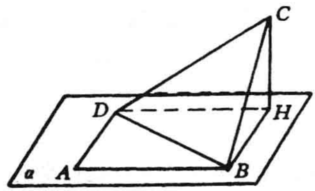


图 1-4

$\therefore$ 假设不成立，故 A、B、C、D 四点共面。

证明共面问题时，当确定一个平面后，证其他直线在这个平面内时，若不能用“线在面内公理”，可考虑反证法来证明。

3. 线共点

在论证线共点时，通常是先确定两条直线有一个交点，再确定这个交点也在其他直线上。一般说来，共点的这些线是平面的交线。

【例 5】已知：四面体 A–BCD，E、G 分别是 BC、AB 的中点，F 在 CD 上，H 在 AD 上，且有 $DF:FC=1:3$，$DH:HA=1:3$。

求证：EF、GH、BD 必交于同一点。

【证明】如图 1-5 所示，连接 EG、FH。

$\because$ $GE/\!/AC$

又$\because$ $DF:FC=DH:HA=1:3$

$\therefore$ $HF/\!/AC$

$\therefore$ $HF/\!/GE$

$\therefore$ E、F、H、G 共面

$\because$ EF、GH 不平行

$\therefore$ EF、GH 相交，设交点为 P。

又$\because$ 点 $P\in$平面 ABD，点 $P\in$平面 BCD

$\therefore$ P 点必在平面 ABD、BCD 的交线 BD 上

即 EF、GH、BD 相交于同一点 P。

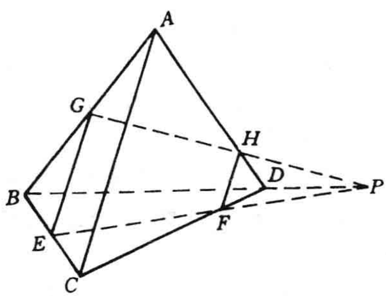


图 1-5

二、平行与垂直

平行与垂直是高考命题的重点和热点之一，基本的题型有：指令证明平行或垂直关系，即在结论中明确要求证明某种平行或垂直关系；隐含平行或垂直关系的论证，即在求角度、距离、面积及体积等时，需要先论证某种平行或垂直关系。

线线、线面、面面平行与垂直的关系，通常是相互联系、相互转化、相互为用的。从宏观上把握住它们之间的联系、转化及互用，图 1-6 表明了这种关系，它在转化中具有重要的地位和作用。

此图中，直线和平面垂直（$l\perp$平面α）关系处在十分重要的地位，它是转化的中心环节。

如果把线线、线面、面面关系依次看成由低级走向高级，那么图中从低一级向高一级的转化，一般要用到判定定理，而从高一级向低一级的转化，一般要用到性质定理。

图中有三处出现辅助元素，它们是从面面垂直转化为线面垂直中的直线 l；从线面平行转化为线线平行中的平面γ；从面面平行转化为线线平行中的平面γ。

在证明有关直线与平面位置关系时，依据这个转化图，思路清晰，可在转化中，达到灵活运用知识的目的。

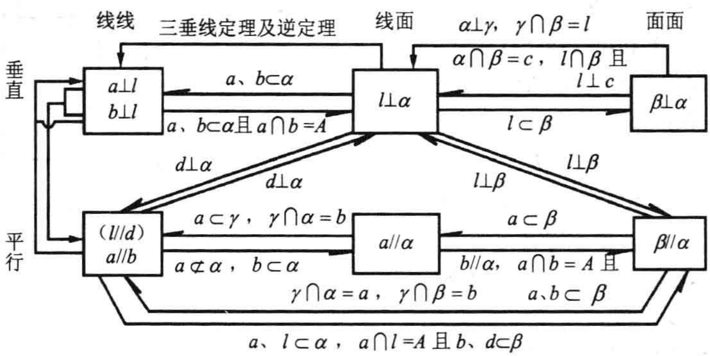


图 1-6

（一）平行

立体几何中的平行问题包括直线与直线平行、直线与平面平行及平面与平面平行三类问题的证明。

1．直线与直线平行的方法

（1）三线平行公理　欲证两条直线平行，可证它们都平行于第三条直线。即若 $a//c$，$b//c$，则 $a//b$。

（2）线面平行性质定理　欲证两条直线平行，可证其中一条直线平行于过另一条直线的一个平面，即把证线线平行转化为证线面平行。即若 $a /\!/$ 平面α，$a\subset$平面β，平面$\alpha\cap$平面$\beta=b$，则 $a /\!/ b$。

（3）面面平行性质定理　欲证两条直线平行，可将这两条直线看作两个平行平面与第三个平面的交线。即若平面$\alpha /\!/$平面β，平面$\gamma\cap$平面$\alpha=a$，平面$\gamma\cap$平面$\beta=b$，则 $a /\!/ b$。

（4）线面垂直性质定理　欲证两条直线平行，可证这两条直线同垂直于某一个平面。即若 $a\perp$平面α，$b\perp$平面α，则 $a /\!/ b$。

（5）线面平行性质　若平面$\alpha\cap$平面$\beta=b$，$a /\!/$平面α，$a /\!/$平面β，则 $a /\!/ b$。

（6）线面平行关系　若平面$\alpha\cap$平面$\beta=c$，$a\subset$平面α，$b\subset$平面β，且 $a /\!/ b$，则 $a /\!/ b /\!/ c$。

（7）定义法　利用定义法证明线与线平行通常要用到反证法。证明在同一平面内的两条直线没有公共点。

（8）同一法　同一法证线线平行的基本思路是：过第一条直线上一点作第二条直线的平行线，证明所作直线与第一条直线重合。

【例 1】如图 1-7 所示，过正方体的棱 BB_1 作一平面交平面 CDD_1C_1 于 EE_1。

求证：$BB_1 /\!/ EE_1$。

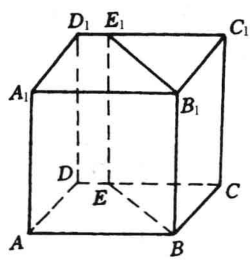


图 1-7

【证法 1】利用三线平行公理

$\because$ $CC_1 /\!/ BB_1$，$CC_1\not\subset$面 BB_1E_1E

$BB_1\subset$面 BB_1E_1E

$\therefore$ $CC_1 /\!/$ 面 BB_1E_1E

又$\because$ 面 $CC_1E_1E\cap$面 $BB_1E_1E=EE_1$，且

$CC_1\subset$面 CEE_1C_1

$\therefore$ $CC_1 /\!/ EE_1$，又 $CC_1 /\!/ BB_1$

$\therefore$ $BB_1 /\!/ EE_1$

【证法 2】利用线面平行性质定理

$\because$ $BB_1 /\!/ CC_1$

$BB_1\not\subset$面 CC_1D_1D，$CC_1\subset$面 CC_1D_1D

$\therefore$ $BB_1 /\!/$ 面 CC_1D_1D

又$\because$ 面 $BB_1E_1E\cap$面 $CC_1D_1D=EE_1$

且 $BB_1\subset$面 BB_1E_1E

$\therefore$ $BB_1 /\!/ EE_1$

【例 2】已知：平面$\alpha\cap$平面$\beta=b$，$a /\!/$平面α，$a /\!/$平面β。

求证：$a\parallel b$。

【证法 1】利用线面平行性质定理

由于 $a\parallel$ 平面α，$a\parallel$ 平面β，可作两个平面分别与平面α、平面β 相交，再用线面平行性质定理证明如下：

如图 1-8 所示，在平面α 内取一点 A，且 $A\notin b$，过 a、A 作平面γ，设平面$\gamma\cap\alpha=c$。在平面β内取一点 B，且 $B\notin b$，过 a、B 作平面δ，设平面$\delta\cap$平面$\beta=d$。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a\parallel\text{平面}\alpha\\ a\subset\text{平面}\gamma\\ \text{平面}\gamma\cap\text{平面}\alpha=c\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel c\\ \left.\begin{array}{l}a\parallel\text{平面}\beta\\ a\subset\text{平面}\delta\\ \text{平面}\delta\cap\text{平面}\beta=d\end{array}\right\}\Rightarrow d\parallel a\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}c\parallel d\\ d\subset\text{平面}\beta\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow c\parallel\text{平面}\beta\\ c\subset\text{平面}\alpha\\ \text{平面}\alpha\cap\text{平面}\beta=b\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow c\parallel b\\ a\parallel c\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

【证法 2】利用线面垂直定理

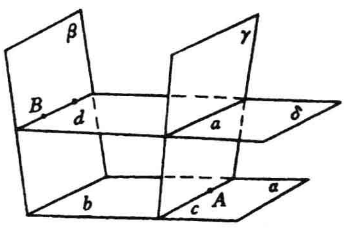


图 1-8

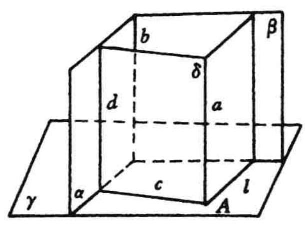


图 1-9

如图 1-9 所示，作平面$\gamma\perp b$，设 $a\cap$ 平面$\gamma=A$，在γ 内过 A 作 c 垂直于平面α 与γ 的交线，过 a、c 作平面δ，设平面$\delta\cap$平面$\alpha=d$。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}b\perp\text{平面}\gamma\\ b\subset\text{平面}\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\text{平面}\gamma\\ c\perp\text{平面}\alpha\text{与平面}\gamma\text{ 的交线}\end{array}\right\}\Rightarrow c\perp\text{平面}\alpha\\ d\subset\text{平面}\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow c\perp d\\ \left.\begin{array}{l}a\parallel\alpha\\ a\subset\text{平面}\delta\\ \text{平面}\delta\cap\text{平面}\alpha=d\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel d\\ a\subset\text{平面}\delta\\ c\subset\text{平面}\delta\\ d\subset\text{平面}\delta\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp c$$

同理，由 $a\parallel$平面β 和平面$\beta\perp$平面γ 可得出在平面 γ 内过 A 作直线 $l\perp a$。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a\perp c\\ a\perp l\\ c、l\subset\text{平面}\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\text{平面}\gamma\\ \qquad\qquad\qquad\quad b\perp\text{平面}\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

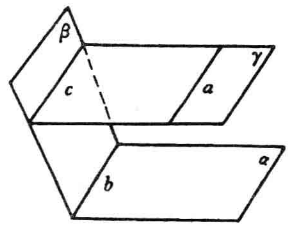


图 1-10

【证法 3】利用面面平行性质定理

由于 $a\parallel$平面α，因此过 a 有且仅有一个平面与平面α 平行，记这个平面为γ。由平面 β与平面 α相交，可得平面 β与平面 γ也相交，从而可用面面平行性质定理证明如下：

如图 1-10 所示，因 $a\parallel$平面α，故过 a 可作平面$\gamma\parallel$平面α。

$$\left.\begin{array}{l}\text{平面}\beta\cap\text{平面}\alpha=b\\ \text{平面}\alpha\parallel\text{平面}\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\beta\text{与}\gamma\text{相交，设}\gamma\cap\beta=c$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{平面}\alpha\parallel\text{平面}\gamma\\ \text{平面}\beta\cap\text{平面}\gamma=c\\ \text{平面}\beta\cap\text{平面}\alpha=b\end{array}\right\}\Rightarrow c\parallel b\\ \left.\begin{array}{l}a\parallel\text{平面}\beta\\ a\subset\text{平面}\gamma\\ \text{平面}\gamma\cap\text{平面}\beta=c\end{array}\right\}\Rightarrow c\parallel a\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

【证法 4】同一法

设 $A\in b$，过 a、A 作平面 γ，设平面$\alpha\cap$平面$\gamma=b'$，平面$\beta\cap$平面$\gamma=b''$，用同一法证明 b'与 b''重合于 b 如下：

如图 1-11 所示，在 b 上取一点 A，过 a、A 作平面γ，设平面$\alpha\cap$平面$\gamma=b'$，平面$\beta\cap$平面$\gamma=b''$。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a\parallel\text{平面}\alpha\\ a\subset\text{平面}\gamma\\ \text{平面}\gamma\cap\alpha=b'\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b'\\ \qquad\text{同理}\qquad\Rightarrow a\parallel b''\end{array}\right\}\Rightarrow b'\text{与}b''\text{重合}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b'\subset\text{平面}\alpha\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b''\subset\text{平面}\beta\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}b'=\text{平面}\alpha\cap\text{平面}\beta\\ b=\text{平面}\alpha\cap\text{平面}\beta\end{array}\right\}\Rightarrow b'\text{与}b\text{重合}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b'\parallel a\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

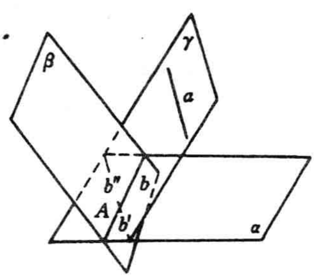


图 1-11

在例 1 和例 2 的几种证法中，分别用到了线线平行公理、线面平行的性质定理、线面垂直的性质定理、面面平行的性质定理及同一法等。这些证法严谨、处理灵活、思路开阔的证题方法，有助于提高学生应用基本知识的能力。

2．直线与平面平行的方法

（1）线面平行判定定理　如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面平行。即若 $a\not\subset$平面α，$b\subset$平面α，且 $a/\!/b$，则 $a/\!/$平面α。

由此定理可知，欲证线面平行，可证线线平行。

（2）线面平行判定定理推论　若 $a\not\subset$平面α，$b\not\subset$平面α且 $a/\!/b$，$a/\!/$平面α，则 $b/\!/$平面α。

（3）面面平行性质　若两个平面平行，则其中一个平面内的任一条直线必平行于另一个平面。即若平面$\alpha/\!/$平面β，$a\subset$平面α，则 $a/\!/$平面β。

利用面面平行性质，可将线面平行转化为证面面平行。

（4）反证法　假设直线与平面不平行，则直线与平面相交或直线在平面内，从而设法推出矛盾。

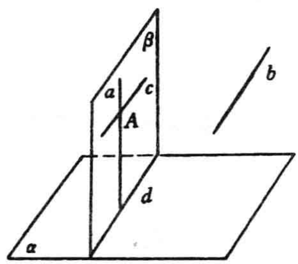


图 1-12

【例 3】已知：a、b 是异面直线，$a\perp b$，$a\perp$平面α，$b\not\subset$平面α。

求证：$b/\!/$平面α。

【证法 1】利用线面平行判定定理

如图 1-12 所示，设 $A\in a$，过 A 作 $c/\!/b$。再设 a、c 确定的平面为β，$\alpha\cap\beta=d$。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} b/\!/c \\ a\perp b\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp c \\ \left.\begin{array}{l} a\perp\text{平面}\alpha \\ d\subset\text{平面}\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp b \\ c\subset\beta \\ d\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow c/\!/d \\ c/\!/b\end{array}\right\}\Rightarrow b/\!/d \\ d\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow b/\!/\alpha$$

【证法 2】反证法

假设 $b\nparallel$平面α，因 $b\not\subset$平面α，故 b 与α相交，记 $b\cap$平面$\alpha=A$，从而由 $a\perp$平面α，$a\perp b$ 可推出 $b\subset$平面α，这与已知条件 $b\not\subset$平面α 相矛盾。于是，假设不成立，因此 $b/\!/$平面α。

【例 4】四边形 $ABCD$、$ADEF$ 都是正方形，并且 M、N 分别在 BD、AE 上，$AN=BM$。又平面 BD 和平面 AE 是不同平面，求证：$MN/\!/$平面 CDE。

【证明】如图 1-13 所示，在平面 AE 内过 N 作 $NP /\!/ DE$ 与 AD 相交于 P，连接 MP。

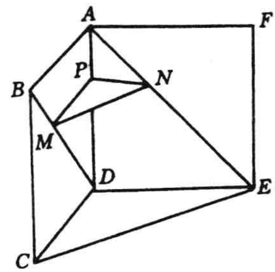


图 1-13

∵ $AE=BD$，$AN=BM$

∴ $AN:AE=BM:BD$

∵ $PN /\!/ DE$

∴ $AN:AE=AP:AD$

∴ $BM:BD=AP:AD$

∴ $MP /\!/ AB$，又 $AB /\!/ CD$

∴ $MP /\!/ CD$

∴ $MP /\!/$ 平面 CDE

又由 $PN /\!/ DE$，$DE\subset$平面 CDE，得 $PN /\!/$ 平面 CDE，而 PM、PN 是相交直线

∴ 平面 $PMN /\!/$ 平面 CDE

又 $MN\subset$平面 PMN

∴ $MN /\!/$ 平面 CDE

这里关键是利用与平面 CDE 平行的平面 PMN，但在证平面 $PMN /\!/$ 平面 CDE 时，又要利用面面平行的判定定理及平面几何的有关知识。

3．平面与平面平行的方法

（1）平面与平面平行的判定定理　如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行。即若 $a\cap b=A$，$a\subset$平面α，$b\subset$平面α，$a /\!/$ 平面β，$b /\!/$ 平面β，则平面$\alpha /\!/$ 平面β。

（2）平面与平面平行判定定理的推论　如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面内的两条直线分别平行，那么这两个平面平行。即若 $a\cap b=A$，$a\subset$平面α，$b\subset$平面α，$a'\subset$平面β，$b'\subset$平面β，且 $a /\!/ a'$，$b /\!/ b'$，则平面$\alpha /\!/$ 平面β。

由面面平行定理和推论可知，欲证面面平行，即证线面平行，只需证线线平行。

（3）线面垂直定理　垂直于同一条直线的两个平面平行。

这个定理表明，欲证面面平行可转化为证线面垂直。

（4）定义法和反证法

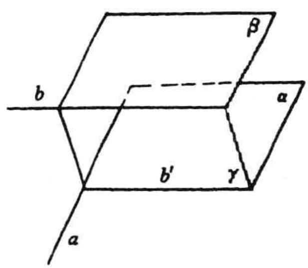


图 1-14

【例 5】已知：a、b 是异面直线，$a\subset$平面α，$b\subset$平面β，$a /\!/$ 平面β，$b /\!/$ 平面α。

求证：平面$\alpha /\!/$ 平面β。

【证明】利用面面平行判定定理

如图 1-14 所示，过 b 作平面 γ 与平面α交于 b'。

$$\left.\begin{array}{l} b /\!/ \text{平面}\alpha \\ b' \subset \text{平面}\gamma \\ \alpha \cap \gamma = b' \end{array}\right\} \Rightarrow b /\!/ b' \Rightarrow b' /\!/ \text{平面}\beta$$

同理　平面α//平面β

$$\left.\begin{array}{l} a\text{、}b\text{ 异面} \\ b /\!/ b' \\ a\text{、}b' \subset \text{平面}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a /\!/ b'\text{相交}$$

∴　平面α//平面β

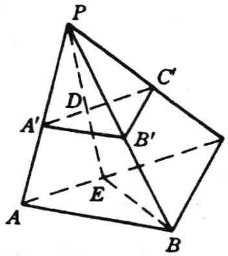


图 1-15

【例 6】已知：如图 1-15 所示，在三棱锥 $P\text{–}ABC$ 中，$PA=PB=PC$，$AP\perp PC$，$\angle APB=\angle BPC=60°$，$A'$、$C'$分别是 PA、PC 的中点，过 A'、C'作截面 $A'B'C'\perp$平面 PAC。

求证：平面 $A'B'C'$ // 平面 ABC。

【证明】利用线面垂直定理

在平面 PAC 中，作 $PD\perp A'C'$（垂足为 D），并延长 PD 交 AC 于 E，连接 EB。

$$\left.\begin{array}{l} \text{平面 } PA'C' \perp \text{ 平面 } A'B'C' \\ \qquad PD \perp A'C' \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$　$PD\perp$平面 $A'B'C'$。

$$\left.\begin{array}{l} PA' = A'A \\ PA' = C'C \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A'C' /\!/ AC \\ PD \perp A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} PE \perp AC \\ PA = PC \\ \angle APC = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow AE = EC = PE$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle APB = \angle BPC = 60° \\ PA = PB = PC \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} AB = PA \\ \left.\begin{array}{l} AB = BC \\ AE = EC \end{array}\right\} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BE \perp AC \\ AE = AE \\ PA = AB \\ PE \perp AE \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{Rt}\triangle PEA \cong \mathrm{Rt}\triangle BEA$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BE = PE \\ PE = AE \\ PB = PA \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \angle PEB = \angle PEA = 90°$$