普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

（下册）

张明望　沈忠环　杨雯靖　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

张明望　沈忠环　杨雯靖　主编

科学出版社
北京

内容简介

本书是根据编者多年的教学实践，吸收近年教学研究及教学改革的新成果，按照《高等数学课程教学基本要求》编写而成的. 分上、下两册出版. 上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等六章. 下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等五章. 并在每章插入了利用 Mathematica 软件求解相关问题的内容. 书末附有习题答案与提示.

本书可作为高等院校理工科各专业高等数学课程的教材，也可供其他相关学科学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 张明望，沈忠环，杨雯靖主编.
—北京：科学出版社，2013. 2
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036605-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②沈… ③杨… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 020873 号

责任编辑：杨瑰玉 冯桂层 / 责任校对：王望容
责任印制：彭超 / 封面设计：苏波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

南京展望文化发展有限公司排版
武汉中科兴业印务有限公司印刷
科学出版社出版 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)
2013 年 1 月第 一 版 印张：20 1/2
2013 年 1 月第一次印刷 字数：402 000

定价：39.00 元

《高等数学》编委会

主　编　张明望　沈忠环　杨雯靖

编　委　（按姓氏笔画排序）

朱永刚　杨元启　杨雯靖　沈忠环

张小华　张明望　陈东海　陈将宏

陈继华　陈　勤　赵守江　赵克健

崔　盛

前　言

本书是为理工科各专业编写的教材，分为上、下两册. 上册包括一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数论. 这些理论与方法为解决自然科学和工程技术领域的相关问题提供了有力的工具.

本书具有以下特点：

第一，按照精品课程教材的要求，努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果，从实例出发，引入微积分的一些基本概念，在保持数学学科本身的科学性、系统性的同时，简化了一些概念的叙述和繁琐的数学推理. 同时，对于那些学生必需的基本理论、基本知识和基本技能，我们则不惜篇幅，力求解说清楚，使学生容易接受和理解. 另外，本书还着重介绍了有关理论、方法在科学技术领域的应用，使学生了解数学与实际问题的紧密联系，以及学习数学对后续课程的重要性.

第二，第一章以张景中院士提出的非 ε 极限理论为基础展开编写. 所谓非 ε 极限理论，就是用科学严谨而又易于为学生接受的方式讲述极限概念的一种理论. 这种理论不讲述 ε 语言，讲述方式也不同于 ε 极限理论由极限到无穷小再到无穷大的次序，而是由无穷大到无穷小再到极限的次序来讲述极限理论. 我们的教学实践表明，教学效果良好.

第三，第五章将定积分的基本概念、基本计算方法以及定积分的应用等知识点整合在一起，使教材的结构得到优化.

第四，为了适应大学数学教学改革以及创新人才培养模式的要求，也为了将数学实验引入课堂，本书在每一章中，针对相关内容，引入了 Mathematica 进行微积分的基本计算，并且利用 Mathematica 强大的数值计算功能和图形功能，演示、验证了微积分的概念和理论.

第五，本书的习题按节配备，每章后面有总习题，总习题中有填空题、选择题、计算题和证明题. 题目遵循循序渐进的原则，既注意到对基本概念、基本理论和基本方法的考查，又注重加强对概念的理解和一些解题技巧的训练. 另外，为了更好地与中学数学教学相衔接，本书将极坐标系简介作为附录，放在本书上册的最后.

本书不仅可供高等学校理工类学生作为教材，也可供其他学科学生选用或参考.

本书由张明望、沈忠环和杨雯靖主编. 参加编写的主要人员有朱永刚、赵克健、张小华，另外，崔盛、陈将宏、杨元启等也参与了后期的一部分编写工作. 全书由杨雯靖、沈忠环副教授负责统稿，张明望教授负责审阅.

三峡大学理学院、教务处和教材供应中心对本书的编写与出版给予了大力支持，对此我们表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

类似于平面解析几何，空间解析几何也是通过建立空间直角坐标系，把空间的点与三元有序实数组一一对应，使空间图形与代数方程对应起来，从而可以用代数方法来研究空间几何问题.

向量的概念起源于物理学，经过数学的抽象、运用和发展，已成为一种重要的数学工具，在相关学科领域都有着广泛的应用.

本章先介绍向量的概念以及向量的线性运算、乘法运算与坐标表示，然后以向量为工具，讨论空间的平面与直线，最后介绍空间曲面与曲线的有关内容. 掌握这些内容是学习多元函数微积分的基础.

第一节　向量及其线性运算　向量的坐标表示

一、向量的概念

在自然界中，有一些量完全由数值的大小决定，如时间、温度、长度、面积、质量等，这种只有大小的量叫做数量（或标量）. 还有一些量，它们不仅有大小也有方向，如速度、加速度、力、力矩、电场强度等，这种既有大小又有方向的量叫做向量（或矢量）.

数学上常用一条有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的指向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，如图 7－1 所示. 为了区别于数量，向量也常用一个粗体的字母或带箭头的字母来表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{v}$，$\vec{r}$，$\vec{F}$ 等等.

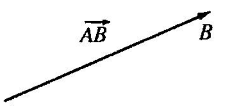


图 7－1

在数学上，我们只讨论与起点无关的向量，即只考虑向量的大小和方向而不论它的起点在何处，这样的向量称为自由向量，简称向量.

向量的大小称为向量的模. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记作 $|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$. 模为 1 的向量称为单位向量. 模为 0 的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看做是任意的.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等且方向相同，就称它们是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说经平移后能完全重合的向量是相等的.

方向相同或相反的向量称为平行向量. 把若干个平行向量的起点移至同一点，则它们的终点与公共起点都位于同一直线上，故也称这些向量是共线的. 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(共线)，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

把若干个向量平移到同一起点，如果它们的终点与公共起点都位于同一平面上，则称这些向量是共面的. 显然，任意两个向量都是共面的，零向量与任何向量都共线也都共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 7-1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，平移向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 使它们的起点重合于 A. 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 如图 7-2 所示，则以 AB、AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$, 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \quad 或 \quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$$

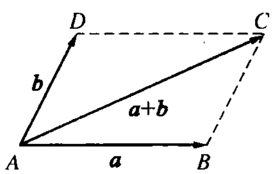


图 7-2

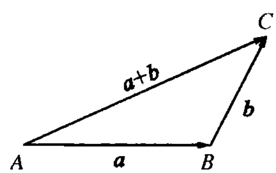


图 7-3

上述作出两向量的和的方法称为向量加法的平行四边形法则. 若在图 7-2 中平移 $\boldsymbol{b}$，使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 如图 7-3 所示，这一方法称为向量加法的三角形法则.

根据三角形法则，将几个非零向量依次平移，使其首尾相接，则由第一个向量的起点到最后一个向量终点的向量，就是这几个向量的和，如图 7-4 所示，有 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

容易证明向量加法符合以下运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (如图 7-5 所示).

特别地，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

我们称 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差，记作

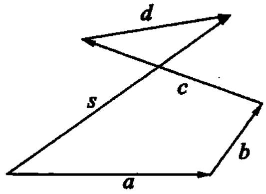


图 7 - 4

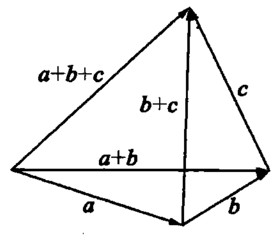


图 7 - 5

$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

如图 7 - 6 所示. 若把向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平移到同一起点,则由 $\boldsymbol{a}$ 的终点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, 如图 7 - 7 所示.

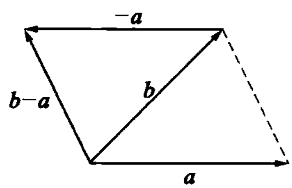


图 7 - 6

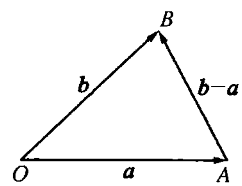


图 7 - 7

从图 7 - 7 中可见,任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O,都有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

由三角形两边之和大于第三边,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

定义 7 - 2　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|.$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;特别地,当 $\lambda=\pm1$ 时,有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

容易证明,向量与数的乘法符合下列运算规律:

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu\boldsymbol{a})$;

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，$\boldsymbol{a}^{\circ}$(或记作 $\boldsymbol{e}_a$)是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，则有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

即非零向量除以它的模就得到与原向量同方向的单位向量，这一过程称为向量的单位化.

向量的加法运算和数乘运算统称为向量的线性运算. 我们常用向量的线性运算来描述向量共线和向量共面的特征.

定理 7-1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ (称向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量 $\boldsymbol{a}$ 线性表示).

证 充分性 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，当 $\lambda\neq 0$ 时，由向量与数相乘的定义知 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$；当 $\lambda=0$ 时，必然有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，由于零向量的方向是任意的，因此可认为零向量与任何向量都平行.

必要性 设 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，因此 $\boldsymbol{b}$ 总与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

即 $|\lambda-\mu|\,|\boldsymbol{a}|=0$. 因 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，可得 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

推论 向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ_1，λ_2，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\ (\text{称向量 } \boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{b} \text{ 线性相关}).$$

例 7-1 证明三角形两边中点连线平行于第三边，且等于第三边的一半.

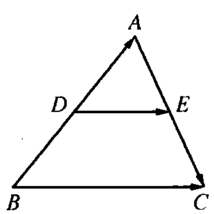


图 7-8

证 如图 7-8 所示，D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC的中点，显然有

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以，$\overrightarrow{DE}\parallel\overrightarrow{BC}$，且 $|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

三、向量的坐标表示

向量的运算仅用几何方法研究是不够的，引入向量的坐标，就可以用有序数组

来表示向量，从而将向量的运算转化为代数运算.

1. 向量的投影

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$，把它们的起点平移至空间任一定点 O，使一向量绕 O 点转到与另一向量正向一致时所转过的最小角度 θ，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，如图 7-9 所示，记作 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$. 当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向；当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 零向量与另一向量的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

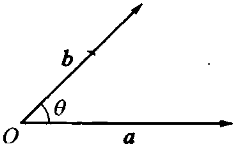


图 7-9

类似地，可规定向量与轴的夹角.

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 确定了 u 轴，A 为轴外任一点，过点 A 作与 u 轴垂直的平面，交 u 轴于点 A'，则称点 A' 为点 A 在 u 轴上的投影，如图 7-10 所示.

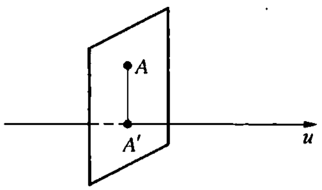


图 7-10

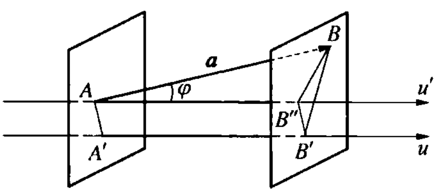


图 7-11

设有向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 和 u 轴，它们之间的夹角为 φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，如图 7-11 所示. 点 A 和 B 在 u 轴上的投影分别为 A' 和 B'，$\overrightarrow{A'B'}$ 为 u 轴上的有向线段，我们将向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$ 或 $(\overrightarrow{AB})_u$，并规定 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影为

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'=\begin{cases}|\overrightarrow{A'B'}|, & 0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \varphi=\dfrac{\pi}{2},\\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi.\end{cases}$$

显然，向量的投影是一个数值，它可正可负，也可以是零. 当点 A' 和 B' 在 u 轴上对应的坐标分别是 u_A 和 u_B 时，则

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'=u_B-u_A.$$

向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的分向量（或投影向量），且

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = u_B \boldsymbol{e}_u - u_A \boldsymbol{e}_u = (u_B - u_A)\boldsymbol{e}_u.$$

类似地,可以定义向量在向量上的投影.

向量的投影具有如下性质:

性质 1 向量$\overrightarrow{AB}$在 u 轴上的投影等于向量$\overrightarrow{AB}$的模与它们夹角 φ 的余弦的乘积,即

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi.$$

证 如图 7-11 所示,过点 A 引与 u 轴平行且有相同正向的 u'轴,则 u 轴与$\overrightarrow{AB}$的夹角等于 u'轴与$\overrightarrow{AB}$的夹角,从而有

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB'' = A'B' = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi.$$

显然,当角 φ 分别是锐角、钝角和直角时,相应的投影依次为正值、负值和零.

性质 2 $\text{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{Prj}_u\boldsymbol{a} + \text{Prj}_u\boldsymbol{b}$ (如图 7-12 所示).

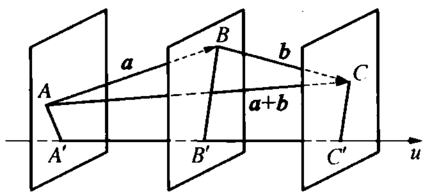


图 7-12

性质 2 可以推广到有限个向量的情形.

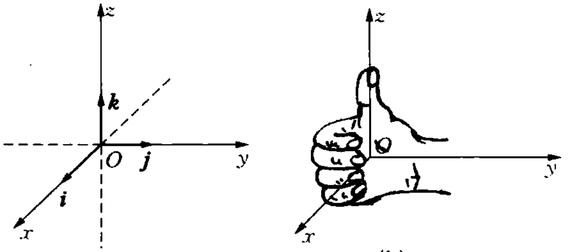
性质 3 $\text{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\text{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

性质 2 和性质 3 的证明请读者自己完成.

2. 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$,就确定了三条以 O 为原点且两两垂直的数轴,依次称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴),它们统称为坐标轴. 通常将 x 轴和 y 轴放置在水平面上,z 轴则铅直放置. 三个轴的正方向符合右手规则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向 y 轴时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,这样的三条坐标轴就构成了一个空间直角坐标系,如图 7-13(a)、(b)所示.

由 x 轴和 y 轴所确定的平面叫做 xOy 面, y 轴和 z 轴所确定的平面叫做 yOz 面,z 轴和 x 轴所确定的平面叫做 zOx 面,它们统称为坐标面. 三个坐标面将空间



(a)　(b)

图 7 - 13

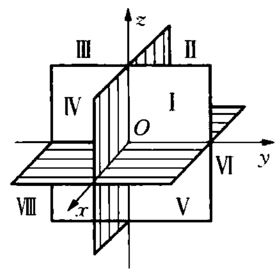


图 7 - 14

分成八个部分，如图 7 - 14 所示，每一部分叫做一个卦限. 含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的那个卦限是第一卦限，第二、三、四卦限均在 xOy 面上方且按逆时针方向确定，第五、六、七、八卦限在 xOy 面下方，依次位于第一、二、三、四卦限之下，这八个卦限分别用数字Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示.

设 M 为空间一点，过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面，依次交坐标轴于 P, Q, R 三点，它们的坐标依次为 x, y, z，则点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x, y, z)；反之，对任意一个有序数组 (x, y, z)，在三个坐标轴上可以找到坐标分别为 x, y, z 的三个点 P, Q, R，过点 P, Q, R 分别作垂直于它们所在坐标轴的平面，这三个平面就相交于唯一的点 M，如图 7 - 15 所示. 这样，空间点 M 与有序数组 (x, y, z) 之间就建立了一一对应关系. 称有序数组 (x, y, z) 为点 M 的直角坐标，记作 $M(x, y, z)$.

原点、坐标轴和坐标面上的点的坐标各有特点. 原点的坐标为 $(0, 0, 0)$；x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$；xOy 面、yOz 面和 zOx 面上点的坐标分别为 $(x, y, 0)$, $(0, y, z)$ 和 $(x, 0, z)$.

3. 向量的坐标

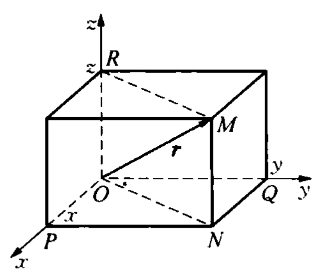


图 7 - 15

起点固定在原点 O，终点为 $M(x, y, z)$ 的向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 参见图7 - 15，由向量的线性运算，有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

因为 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$，所以

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (7-1)$$

式(7 - 1)称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量，有序数 x, y, z 分别是 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴上的投影，称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，

记作 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$.

显然,给定向径 $\boldsymbol{r}$ 就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$三个分向量,从而确定了 x, y, z 三个有序数,反之亦然.这样,点 M、向径 $\boldsymbol{r}$ 与有序数 x, y, z 之间就有一一对应关系

$$M \leftrightarrow \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \leftrightarrow (x, y, z).$$

空间一个点与该点的向径有相同的坐标,记号(x, y, z)既可表示点 M,又可表示该点的向径$\overrightarrow{OM}$.注意,在几何中点与向量是两个不同的概念,以后当看到记号(x, y, z)时,须从上下文来加以区分.

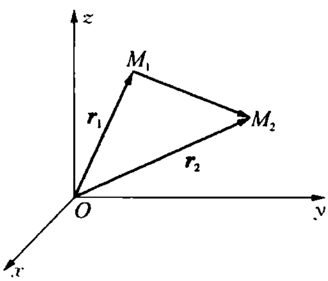


图 7-16

设$\overrightarrow{M_1M_2}$是以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$为起点、$M_2(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量,如图 7-16 所示,则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

利用向量的线性运算,得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}. \tag{7-2}$$

这说明任何向量都可以用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的线性运算来表示,且表示法是唯一的.式(7-2)称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标分解式,其中数 x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 分别是$\overrightarrow{M_1M_2}$在三个坐标轴上的投影,称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标,并将向量$\overrightarrow{M_1M_2}$记作

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1), \tag{7-3}$$

式(7-3)称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

一般地,向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影 a_x, a_y, a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,这样,$\boldsymbol{a}$ 既可以用向量的坐标分解式

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{7-4}$$

表示,也可以将 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z), \tag{7-5}$$

式(7-5)就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

例如,零向量和三个基本单位向量的坐标表示式分别为

$$\boldsymbol{0}=(0, 0, 0),\quad \boldsymbol{i}=(1, 0, 0),\quad \boldsymbol{j}=(0, 1, 0),\quad \boldsymbol{k}=(0, 0, 1).$$

4. 利用坐标进行向量的线性运算

引入向量的坐标后,向量间的线性运算就能通过向量坐标的代数运算进行.

设

$$\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z),$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律、结合律以及向量与数乘法的结合律、分配律，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},\\ \lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\ (\lambda\ \text{为实数}).\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z),\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z),\\ \lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z).\end{aligned}$$

可见，对向量进行线性运算时，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

由定理 7-1 知，当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 等价于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$(b_x,\ b_y,\ b_z)=\lambda(a_x,\ a_y,\ a_z),$$

这也就等价于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标分别成比例，即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

上式中，若有分母为零，则应理解为相应的分子也为零. 例如，若向量 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{j}+\mu\boldsymbol{k}$ 平行(其中 $\lambda,\ \mu$ 为实数)，即

$$\frac{\lambda}{0}=\frac{2}{-2}=\frac{-1}{\mu},$$

则 $\lambda=0,\ \mu=1$.

特别地，向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z$.

例 7-2 已知两点 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 和 $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 M，使

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}.$$

解 如图 7-17 所示，设点 $M(x,\ y,\ z)$ 为所求的点，则有