北大燕园

2014年 李正元·李永乐

考研数学 6

数学

数学三

历年试题解析

主编 北京大学 刘西垣
清华大学 李永乐
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

2014年李正元·李永乐考研数学

数学

数学三

历年试题解析

主编 北京大学 刘西垣
清华大学 李永乐
北京大学 范培华
编者 (按姓氏笔画)
北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 刘西垣
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2014年李正元·李永乐考研数学．数学历年试题解析．数学三/刘西垣，李永乐，范培华主编．—北京：中国政法大学出版社，2013.2

ISBN 978-7-5620-4669-1

Ⅰ.①2… Ⅱ.①刘… ②李… ③范… Ⅲ.①高等学校-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第023651号

书　　名	2014年李正元·李永乐考研数学．数学历年试题解析．数学三 2014NIAN LIZHENGYUAN · LIYONGLE KAOYANSHUXUE SHUXUELINIANSHITIJIEXI SHUXUESAN
出版发行	中国政法大学出版社(北京市海淀区西土城路25号) 北京100088信箱8034分箱　邮编100088　fada.sf@sohu.com http://www.cuplpress.com (网络实名：中国政法大学出版社) (010)58908433(编辑部)　58908325(发行部)　58908334(邮购部)
承　　印	北京朝阳印刷厂有限责任公司
规　　格	787mm×1092mm　1/16
印　　张	24.5
字　　数	650千字
版　　本	2013年2月第1版　2013年2月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5620-4669-1/O
定　　价	38.00元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 1999 年 ~2013 年全国硕士研究生入学统考数学三试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学三试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地察出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学三的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学一、二及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了 1998 年（含）以前数学三相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学三的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读**《考研数学复习全书》（数学三）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2 ~ 3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2013 年 2 月

目　录

第一篇　2013 年考研数学三试题及答案与解析

2013 年考研数学三试题 …… (1)
2013 年考研数学三试题答案与解析 …… (4)

第二篇　1999 ~ 2012 年考研数学三试题

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (12)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (18)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (22)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (26)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (31)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (35)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (39)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (43)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (48)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (53)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (57)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (61)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (65)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (69)

第三篇　1999 ~ 2012 年考研数学三试题分类解析

第一部分　微积分 …… (74)
　第一章　函数 极限 连续 …… (74)
　第二章　一元函数微分学 …… (97)
　第三章　一元函数积分学 …… (138)

第四章　多元函数微积分学 …………………………………………………………（166）
第五章　无穷级数 ………………………………………………………………………（204）
第六章　常微分方程与差分方程 ………………………………………………………（225）

第二部分　线性代数 …………………………………………………………………（237）
第一章　行列式 …………………………………………………………………………（237）
第二章　矩阵 ……………………………………………………………………………（244）
第三章　向量 ……………………………………………………………………………（260）
第四章　线性方程组 ……………………………………………………………………（273）
第五章　矩阵的特征值与特征向量 ……………………………………………………（291）
第六章　二次型 …………………………………………………………………………（309）

第三部分　概率论与数理统计 ………………………………………………………（323）
第一章　随机事件和概率 ………………………………………………………………（323）
第二章　随机变量及其分布 ……………………………………………………………（331）
第三章　多维随机变量的分布 …………………………………………………………（339）
第四章　随机变量的数字特征 …………………………………………………………（368）
第五章　大数定律和中心极限定理 ……………………………………………………（374）
第六章　数理统计的基本概念 …………………………………………………………（376）
第七章　参数估计 ………………………………………………………………………（380）

第一篇　2013 年考研数学三试题及答案与解析

2013 年考研数学三试题

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

(1) 当 $x \to 0$ 时，用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$．　　(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$．

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$．　　(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$．

【　　】

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

(A) 0．　(B) 1．　(C) 2．　(D) 3．

【　　】

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y - x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k = 1, 2, 3, 4)$，则

(A) $I_1 > 0$．　(B) $I_2 > 0$．　(C) $I_3 > 0$．　(D) $I_4 > 0$．

【　　】

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛．

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$．

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p > 1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在．

(D) 若存在常数 $p > 1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

【　　】

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价．

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价．

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价．

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价．

【　　】

(6) 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0, b=2$.　　(B) $a=0$, b 为任意常数.

(C) $a=2, b=0$.　　(D) $a=2$, b 为任意常数.

【　】

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,2^2)$, $X_3 \sim N(5,3^2)$, $p_j = \boldsymbol{P}\{-2 \leqslant X_j \leqslant 2\}(j=1,2,3)$，则

(A) $p_1 > p_2 > p_3$.　　(B) $p_2 > p_1 > p_3$.

(C) $p_3 > p_1 > p_2$.　　(D) $p_1 > p_3 > p_2$.

【　】

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $\boldsymbol{P}\{X+Y=2\}=$

(A) $\frac{1}{12}$.　　(B) $\frac{1}{8}$.　　(C) $\frac{1}{6}$.　　(D) $\frac{1}{2}$.

【　】

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ ________.

(10) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________.

(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ________.

(12) 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i, j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________.

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $\boldsymbol{E}(X\mathrm{e}^{2X})=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

(16)（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

(17)（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=3y$, $y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为60000元,可变成本为20元/件,价格函数为 $p = 60 - \dfrac{Q}{1000}$,(p 是单价,单位:元;Q 是销量,单位:件).已知产销平衡,求:

(Ⅰ)该商品的边际利润;

(Ⅱ)当 $p = 50$ 时的边际利润,并解释其经济意义;

(Ⅲ)使得利润最大的定价 p.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导,$f(0) = 0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.证明:

(Ⅰ)存在 $a > 0$,使得 $f(a) = 1$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的 a,存在 $\xi \in (0,a)$,使得 $f'(\xi) = \dfrac{1}{a}$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$.当 a,b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设 (X,Y) 是二维随机变量,X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 在给定 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(Ⅰ)求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$;

(Ⅱ)求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅲ)求 $P\{X > 2Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本．

（Ⅰ）求 θ 的矩估计量；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量．

2013 年考研数学三试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析】 由定义分别可得

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x}\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0+0=0,$$

从而结论(A),(B),(C)都是正确的,故应选(D)．

评注 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)+o(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)}{x}+\lim\limits_{x\to0}x\cdot\dfrac{o(x^2)}{x^2}=0+0=0$,

从而只能断言 $o(x)+o(x^2)=o(x)$ 当 $x\to0$ 时成立．

---

(2)【分析】 首先由题设知 $f(x)$ 的定义域 D 由四个开区间 $(-\infty,-1)$,$(-1,0)$,$(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 构成,且 $f(x)$ 分别在这四个开区间内连续．其次利用当 $x\to0$,$x\to-1$,$x\to1$ 时分别有 $x\ln|x|\to0$,从而

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}\overset{y=x\ln|x|}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1,$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}\overset{y=x\ln|x|}{=\!=\!=}\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=\infty,$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}\overset{y=x\ln|x|}{=\!=\!=}\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=\frac{1}{2},$$

这表明 $f(x)$ 的可去间断点的个数为 2,故应选(C)．

---

(3)【分析】 不难发现在 D_1 上 $\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$,在 D_2 上 $\iint\limits_{D_2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$,在 D_3 上 $\iint\limits_{D_3}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$,在 D_4 上 $\iint\limits_{D_4}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_4}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$．从而

$$I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0．$$

故应选(B)．

---

(4)【分析一】 直接考察(D):由于存在常数 $p>1$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n=b$,于是存在 N 使得当 $n>N$ 时 $|n^pa_n-b|<1$,由此即知 $|n^pa_n|\leqslant|b|+1$,进而 $|a_n|\leqslant\dfrac{|b|+1}{n^p}$．利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 收敛及比较

判别法可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛．故应选(D)．

【分析二】 举反例分别说明(A)，(B)，(C) 均不正确．

对于(A)：令 $a_n=1+\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，显然满足对任何 n 都有 $a_n>a_{n+1}$，但由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1\neq 0$ 即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散．故(A) 不正确．

对于(B)：例如级数 $\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n-1}+\cdots$ 收敛，但数列 $\frac{1}{2},1,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\cdots$ 并非单调减少数列．故(B) 不正确．

对于(C)：例如级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$ 收敛，但当常数 $p>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^p\cdot(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}n^{p-1}=\infty$（不存在）．故(C) 也不正确．

由排除法可知，只有(D) 正确，故选(D)．

---

(5)【分析】 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，那么对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),$$

即
$$\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\\boldsymbol{\gamma}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\\cdots\cdots\\\boldsymbol{\gamma}_n=b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出．

又矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组也可由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表出．

由向量组等价的定义可知，应选(B)．

或者，可逆矩阵可表示成若干个初等矩阵的乘积，于是 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换化为 $\boldsymbol{C}$，而初等列变换保持矩阵列向量组的等价关系．故选(B)．

---

(6)【分析】 记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$，考察矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$ 的条件．

首先，显然 $|\boldsymbol{A}|=0$，因此 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．

其次，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2+b$，因此如果 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 b 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值．于是“充要条件”为 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．由

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-a&-1\\-a&2-b&-a\\-1&-a&1\end{vmatrix}=-4a^2=0\Rightarrow a=0.$$

因此充要条件为 $a=0$，b 为任意常数，故应选(B)．

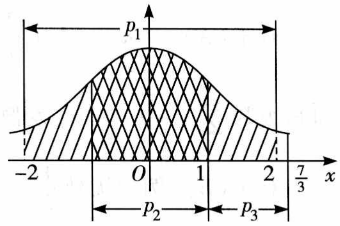
---

(7)【分析】 将随机变量 X_2 和 X_3 化成标准正态后再比较其大小．

$$p_1 = P\{-2 \leqslant X_1 \leqslant 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2),$$

$$p_2 = P\{-2 \leqslant X_2 \leqslant 2\} = P\left\{\frac{-2}{2} \leqslant \frac{X_2}{2} \leqslant \frac{2}{2}\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1),$$

$$p_3 = P\{-2 \leqslant X_3 \leqslant 2\} = P\left\{\frac{-2-5}{3} \leqslant \frac{X_3-5}{3} \leqslant \frac{2-5}{3}\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi(1),$$



由右图正态分布曲线下的面积所代表的概率可知

$$p_1 > p_2 > p_3.$$

故选(A).

评注 若对正态分布的密度函数图形较熟悉,则该题可以不必计算即能判定.由于$p_j = P\{-2 \leqslant X_j \leqslant 2\}$对$X_1,X_2,X_3$的积分区间一样长,但它们的分散程度不一样,即$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$,从而即可判定$p_1 > p_2 > p_3$.至于$X_3 \sim N(5,3^2)$则表示该曲线的峰值在$x = 5$处,因此它在区间$[-2,2]$之间的概率会更小.

---

(8)【分析】 由于X,Y独立,故

$$P\{X+Y=2\} = P\{X=1,Y=1\} + P\{X=2,Y=0\} + P\{X=3,Y=-1\} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

故选(C).

二、填空题

(9)【分析】 由题设曲线$y = f(x)$与$y = x^2 - x$在$(1,0)$处有公共切线知函数$f(x)$满足$f(1) = 0$与$f'(1) = (2x-1)\big|_{x=1} = 1$.由此即得

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} nf\left(1-\frac{2}{n+2}\right) = -\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+2}\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}} = -2f'(1) = -2.$$

---

(10)【分析】 将$x=1,y=2$代入方程$(z+y)^x = xy$可得

$$z(1,2)+2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z(1,2) = 0.$$

在点$(1,2)$的某邻域内方程可改写为$x\ln(z+y) = \ln x + \ln y$,将该方程两边对$x$求偏导数即得

$$\ln(z+y) + \frac{x}{z+y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x},$$

将$x=1,y=2$与$z(1,2)=0$代入上式就有

$$\ln 2 + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,2)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,2)} = 2 - 2\ln 2.$$

---

(11)【分析】 用分部积分法计算即得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = -\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{\ln x}{1+x}\bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}(\ln x) = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = \ln\frac{x}{1+x}\bigg|_1^{+\infty} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

(12)【分析】 本题中微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$,特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$,从而微分方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{x}{2}}$,其中 C_1 与 C_2 是两个任意常数.

(13)【分析】 题设条件"$a_{ij}+A_{ij}=0$"即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$,于是 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|^2$,可见 $|\boldsymbol{A}|$ 只可能是0或 -1.又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(-\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{A}^*)$,则 $r(\boldsymbol{A})$ 只可能为3或0.而 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵,因此 $r(\boldsymbol{A})$ 不能为0,从而 $r(\boldsymbol{A})=3$, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, $|\boldsymbol{A}|=-1$.

或,用特例法.取一个行列式为 -1 的正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$.

(14)【分析】 由于 $X\sim N(0,1)$,则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(Xe^{2X})&=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)}\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}\cdot e^2dx=e^2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx\\
&\xlongequal{x-2=t}e^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=e^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)\\
&=e^2(0+2)=2e^2.
\end{aligned}$$

评注 当 $X\sim N(2,1)$ 时,$\boldsymbol{E}X=2$,而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx$ 即随机变量 X 的期望,因此不需作变量替换而可直接得到结果 $2e^2$.

三、解答题

(15)【分析与求解】 设 n 是正整数,利用极限的四则运算法则可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^n}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x(1-\cos2x\cdot\cos3x)}{x^n}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^n}+\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^n}+\lim_{x\to0}\cos x\cdot\cos2x\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^n}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^n}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^n}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^n}.
\end{aligned}$$

由于当常数 $k\neq0$ 时有

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{x^n}=\frac{k}{n}\lim_{x\to0}\frac{\sin kx}{x^{n-1}}=\begin{cases}0, & n=1,\\ \frac{k^2}{n}, & n=2,\\ \infty, & n>2,\end{cases}$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{3^2}{2}=\frac{1}{2}+2+\frac{9}{2}=7.$$

由上述讨论即知当 $x\to0$ 时 $1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$ 与 ax^n 是等价无穷小,则 $n=2,a=7$.

(16)【分析与求解】 利用旋转体的体积公式可知

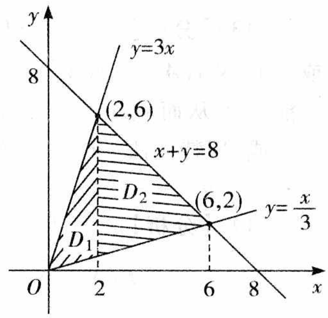
$$V_x=\int_0^a\pi(\sqrt[3]{x})^2dx=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3\pi}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}},$$

$$V_y=\int_0^a 2\pi x\sqrt[3]{x}dx=2\pi\int_0^a x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a=\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}.$$

按题设 $\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow a^{\frac{2}{3}} = 7$,即 $a = 7^{\frac{3}{2}} = 7\sqrt{7}$.

---

(17)【分析与求解】 这些直线的交点为 $(0,0)$,$(2,6)$ 与 $(6,2)$,平面区域 D 可分割成 D_1 与 D_2 两个部分区域(如图所示),其中



$$D_1 = \left\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, \frac{x}{3} \leqslant y \leqslant 3x\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \mid 2 \leqslant x \leqslant 6, \frac{x}{3} \leqslant y \leqslant 8 - x\right\}.$$

从而 $$\iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2.$$

计算可得

$$I_1 = \iint_{D_1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{3x} \mathrm{d}y = \int_0^2 x^2\left(3x - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 3\int_0^2 x^3 \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^2 x^3 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^2 x^3 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^4 \Big|_0^2 = \frac{32}{3},$$

$$I_2 = \iint_{D_2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^6 x^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} \mathrm{d}y = \int_2^6 x^2\left(8 - x - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x = 8\int_2^6 x^2 \mathrm{d}x - \frac{4}{3}\int_2^6 x^3 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{3}x^3 \Big|_2^6 - \frac{1}{3}x^4 \Big|_2^6 = \frac{8}{3}(6^3 - 2^3) - \frac{1}{3}(6^4 - 2^4) = \frac{1664}{3} - \frac{1280}{3} = \frac{384}{3},$$

代入即得 $$\iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{32}{3} + \frac{384}{3} = \frac{416}{3} = 138\frac{2}{3}.$$

---

(18)【分析与求解】 (Ⅰ)由题设知销售该商品 Q 件的总利润函数(单位:元)是

$$I = pQ - (20Q + 60000) = Q\left(60 - \frac{Q}{1000}\right) - 20Q - 60000$$

$$= 40Q - \frac{Q^2}{1000} - 60000,$$

其中 Q 是该商品的销售量(单位:件),从而该商品的边际利润为

$$I'(Q) = 40 - \frac{Q}{500}.$$

(Ⅱ)当价格 $p = 50$(元)时对应的销售量满足

$$50 = 60 - \frac{Q}{1000} \Leftrightarrow Q = 10000(\text{件}),$$

代入即得 $I'(10000) = 40 - \frac{10000}{500} = 20$. 这表明当价格 $p = 50$ 元时每销售一件产品可获利润 20 元.

(Ⅲ)为求出利润最大时的定价 p 需令 $I'(Q) = 0$,即 $40 - \frac{Q}{500} = 0$,解得 $Q = 20000$(件),此时对应的价格

$$p = \left(60 - \frac{Q}{1000}\right)\Big|_{Q=20000} = 60 - \frac{20000}{1000} = 60 - 20 = 40(\text{元}),$$

即使得利润最大的定价 $p = 40$(元).

---

(19)【分析与证明】（Ⅰ）由函数$f(x)$在$[0,+\infty)$连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$即知，存在$b>0$，使得当$x\geqslant b$时$f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$. 这样一来即知函数$f(x)$在闭区间$[0,b]$上连续且$f(0)=0$，$f(b)\geqslant\dfrac{3}{2}$，从而

$$f(0)<1<f(b).$$

由闭区间上连续函数的性质即知：存在$a\in(0,b)$使得$f(a)=1$.

（Ⅱ）由题设知在区间$[0,a]$上$f(x)$满足拉格朗日中值定理的全部条件，从而由拉格朗日中值定理知：存在$\xi\in(0,a)$使得$f(a)-f(0)=f'(\xi)(a-0)$，即$f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

---

(20)【解】设$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{CA}=\begin{bmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{bmatrix}$，

于是由$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$得方程组（Ⅰ）$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\-ax_1+x_2+ax_4=1,\\x_1-x_3-x_4=1,\\x_2-ax_3=b.\end{cases}$

由于矩阵$\boldsymbol{C}$存在，故方程组（Ⅰ）有解. 将（Ⅰ）的增广矩阵用初等行变换化为阶梯形，即

$$\left[\begin{array}{cccc:c}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&1\\0&-1&a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{array}\right],$$

从而方程组（Ⅰ）有解$\Leftrightarrow a=-1,b=0$，则存在矩阵$\boldsymbol{C}$使得$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a=-1,b=0$.

以$a=-1,b=0$代入，解得方程组的通解为

$$(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}，其中k_1,k_2为任意常数.$$

于是所有矩阵$\boldsymbol{C}$为$\begin{bmatrix}1+k_1+k_2&-k_1\\k_1&k_2\end{bmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数.

---

(21)【分析与求解】（Ⅰ）记$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^2$，则$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，$b_1x_1+b_2x_2x+b_3x_3=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$. 于是

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2x+b_3x_3)^2\\&=2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X},\end{aligned}$$

其中$2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$是对称矩阵.

所以二次型f对应的矩阵为$2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）记$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 由于$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交，则有$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$. 又$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为单位向量，则$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}=1$，于是$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$. 同理$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$.

因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant2<3$，所以$|\boldsymbol{A}|=0$，故0是$\boldsymbol{A}$的特征值.

因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$，所以2是$\boldsymbol{A}$的特征值.

因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}$，所以1是$\boldsymbol{A}$的特征值.

于是$\boldsymbol{A}$的特征值为2,1,0，因此f在正交变换下可化为标准形$2y_1^2+y_2^2$.

---

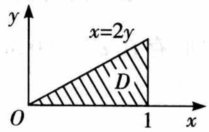
(22)【解】（Ⅰ）$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x},&0<y<x<1,\\0,&其他.\end{cases}$

(Ⅱ) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. 当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_y^1\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}x=9y^2\ln x\Big|_y^1=-9y^2\ln y,$$

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅲ) $$P\{X>2Y\}=\iint\limits_D\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{x}y^3\Big|_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{3}{x}\cdot\frac{x^3}{8}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}.$$

---

(23)【解】 (Ⅰ) $$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}\left(-\frac{\theta}{x}\right)=\theta\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\Big|_0^{+\infty}=\theta,$$

于是 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i$.

(Ⅱ) 对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,其似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{\theta^2}{x_i^3}\cdot\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n\frac{\theta}{x_i}},$$

当 $x_i>0\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时 $L(\theta)>0$,对 $L(\theta)$ 取对数得

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\ln\prod_{i=1}^nx_i^3-\sum_{i=1}^n\frac{\theta}{x_i},$$

对 θ 求导得 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}$,令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$,解得 $\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}$.

因此 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{X_i}}$.