高等代數學概論

劉遂生
余源慶 編

中華書局印行

民國三十七年五月初版
民國三十七年五月發行

高等代數學概論（全一冊）

定價國幣三元六角
（郵運匯費另加）

編者 劉遂生 余源慶

發行人 中華書局股份有限公司代表 李虞杰

印刷者 上海澳門路八九號 中華書局永寧印刷廠

發行處 各埠中華書局

（一三七九一）（海）

高等代數學概論目次

第一章　排列

第二章　組合

章五第 行列式

第六章 複數

第七章 或然率

高等代數學概論

第一章 排列

1. 排列 (Permutation) 排列亦稱順列或錯列,所論範圍,爲關於各種物體或事件之排列方法,其定義俟述於第三節.

在本章及次章內,規定以小寫文字 $a, b, c, \cdots\cdots$ 表物體,以大寫文字 $A, B, C, \cdots\cdots$ 表事件. 又除特別情形外,相異之文字各表相異之物體或事件.

2. 基本定理 **定理 1.** 一事 A, 有 m_1 個不同作法; 又一事 B, 有 m_2 個不同作法,則連作 A、B 兩事,就有 $m_1 m_2$ 個不同作法;換言之,其不同作法之總數,等於原二數之乘積.

〔證明〕 A 事有 m_1 個不同作法. 試取其中一個作法與 B 事 m_2 個不同作法連結,卽得 m_2 個不同作法.

仿此,若將 A 事 m_1 個不同作法一一與 B 事 m_2 個不同作法連結,卽得 $m_1 m_2$ 個不同作法.

故聯合作成 A、B 二事,所有不同作法之總數,應爲原二數之乘積.

定理 2. A 事有 m_1 個不同作法, B 事有 m_2 個不同作法, C 事有 m_3 個不同作法, $\cdots\cdots L$ 事有 m_n 個不同作法,則連做 A、B、$C\cdots\cdots L$ 諸事,就有 $m_1 m_2 m_3 \cdots\cdots m_n$ 個不同作法. 換言

之，其不同作法之總數，等於原有諸數之連乘積.

〔證明〕 由定理 1，將 A、B 二事之各種作法一一連結，共得 $m_1 m_2$ 個不同作法；又將此 $m_1 m_2$ 個作法與 C 事之 m_3 個作法一一連結，共得 $(m_1 m_2) m_3$ 個不同作法，仿此至最後與 L 事之 m_n 個作法一一連結，便知不同作法之總數爲原有諸數之連乘積 $m_1 m_2 m_3 \cdots\cdots m_n$.

舉例如次，以說明上述定理之應用.

〔例題 1〕 甲、乙、丙三市，自甲至乙，有三路可通；自乙至丙，有五路可通.今有人欲自甲市經乙市而至丙市，問其不同之取道方法，共有幾種?

〔解〕 此人自甲市至乙市，有三種方法，可以任擇其一，既至乙市，再往丙市，又有五種方法，可以任擇其一.故結果自甲市經乙市至丙市，其不同之取道方法，共有 $3 \times 5 = 15$ 種.

〔例題 2〕 室有六門，某人欲自一門入而自另一門出.問共有幾種不同走法?

〔解〕 本題可就下述二事分別考之:

第一事，入室；第二事，出室.

就第一事言，有六門可入，故共有六個不同走法.

就第二事言，除入室之門外，尚有五門可出，故共有五種不同走法.

故合二事言之，自一門入而自另一門出，共有 $6 \times 5 = 30$ 種不同走法.

〔例題 3〕 某市有五個旅館.今有旅客三人分宿其中,問有幾種不同住法?

〔解〕 本題須就三旅客分別考之.

I. 甲旅客宿館事.

II. 乙旅客宿館事.

III. 丙旅客宿館事.

I. 甲有五個旅館可以選住,故有五種不同住法. II. 除甲所住外,尙有四個旅館供乙選住,故有四種不同住法. III. 除甲乙所住外,尙有三個旅館供丙選住,故有三種不同住法.

故合三事言之,三人分宿五個旅館,共有 $5\cdot4\cdot3=60$ 種不同之住法.

3. **排列之定義** 自 n 個物體中,依不同順序選取 r 個,所有不同方法之總數,稱爲"自 n 個取 r 個"之排列 (Permutation) 或排列數.

例如自 a、b、c 三物中依不同順序選取二物,其不同之取法爲

$$ab,\quad ac,\quad bc,\quad ba,\quad ca,\quad cb,$$

卽其排列之數爲六.

4. **排列之符號及階乘** 自 n 個物體中取 r 個所成排列之數,以符號 ${}_nP_r$ 表之.

如前節之例,自三物中選取二物之排列數,可記爲 ${}_3P_2=6$.

n 爲正整數,自 n 爲始,順次減 1 得一正整數,至 1 而止,

則此諸數之連乘積,可用符號 $\underline{|n}$ 或 $n!$ 表之,即

$$\underline{|n}=n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1.$$

稱為 n 之階乘,或階乘 n. 在本書內,採用 $\underline{|n}$ 之記法.

5. 定理 自 n 個物體中,選取 r 個之排列數為

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

〔證明〕 自 n 個物體中選取 r 個之方法,得按 r 之數分列如下:

第一次選取 1 個之方法數.

第二次選取 1 個之方法數.

第三次選取 1 個之方法數.

………………………………

………………………………

第 r 次選取 1 個之方法數.

第一次,自 n 物中可以自由選取一個,故有 n 個取法.

第二次,除第一次已取一個外,尚有 $(n-1)$ 個,可以自由選取一個,故有 $(n-1)$ 個取法.

仿此,第三次選取一個有 $(n-2)$ 個方法.至第 r 次選取一個有 $[n-(r-1)]=(n-r+1)$ 個方法.

故由基本定理,即知自 n 物中取 r 個,其排列之總數等於以上諸數之連乘積,即

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

系 自 n 個物體中,取其全部 n 個之排列數為

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=\underline{|n}.$$

6. **關於非重複排列之例題**　本節爲前節定理之應用，期藉若干例題以闡明排列之意義.

〔例題 1〕　童子五人，排成一個整列，有幾種方法？

〔解〕　設自左端爲始，第一位置五人皆可任選擇，故有五種方法．第一位置確定後，繼以第二位置，惟有四人可以任擇，故有四種方法．仿此，第三位置有三種方法，第四位置有二種方法，第五位置有一種方法．故所求之排法共有

$${}_5P_5=\underline{|5}=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120\text{ 種}.$$

〔例題 2〕　"Integral" 一字由八個字母組成．問用此八個文字共可作若干種不同之排列？

〔解〕　本題爲將不同之八個字母全部取用所成之排列，故其總數爲　${}_8P_8=\underline{|8}=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=40320.$

〔例題 3〕　同時用 1、2、3、4、5 五個數字，得作幾個五位數？

〔解〕　題內不同之五個數字完全取用時所成之排列，即所求五位數之總數.

$${}_5P_5=\underline{|5}=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120.$$

〔例題 4〕　用 0、1、2、3、4、5、6 七個數字，可作成若干個七位數？

〔解〕　盡取此七個數字所成排列之總數爲

$${}_7P_7=\underline{|7}.$$

但其中有一部分 0 在首位，不成七位數，須行除去．其個數

與盡取其他六個數字所成之排列數相等，即

$$ {}_6P_6 = \underline{|6}. $$

故實際所成之七位數共有

$$ \underline{|7} - \underline{|6} = \underline{|6}\,(7-1) = 6\underline{|6}\ (\text{個}). $$

〔例題 5〕　用 1、2、3、4、5 五個數字，可作成幾個三位之偶數？（注意在一個數內，任何數字皆不能重複使用）.

〔解〕　作成之偶數，個位或爲 2，或爲 4.

個位數字若爲 2，則十、百兩位數字當於 1、3、4、5 四個數字中取之，故作成之三位數共有

$$ {}_4P_2 = 4\cdot 3 = 12\ (\text{個}). $$

同理，個位數字若爲 4，所得作成之三位數亦有

$$ {}_4P_2 = 4\cdot 3 = 12\ (\text{個}). $$

故所求之三位偶數，共有

$$ {}_4P_2 + {}_4P_2 = 12 + 12 = 24\ (\text{個}). $$

〔例題 6〕　朋友八人，圍坐一圓桌，共有幾種不同坐法？

〔解〕　設此八人爲

$$ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h. $$

若排爲一長列，則將有不同方法之數爲

$$ {}_8P_8 = \underline{|8}. $$

今圍坐一圓桌，則因首尾相接，順序相同，而生 8 倍之重複.

例如　*abcdefgh*,　*habcdefg*,　*ghabcdef*,　*fghabcde*,

efghabcd,　*defghabc*,　*cdefghab*,　*bcdefgha*.

在長列爲不同之八法,圍坐時則合爲一法.

故設不同坐法之總數爲 N, 則

$$N=\frac{\underline{|8}}{8}=\underline{|7}=5040.$$

〔例題 7〕 兵士九人,排成一列,但其中有一人不得爲排頭或排尾.問共有幾種不同之排法?

〔解〕 先將此人除去,其餘 8 人共有 $\underline{|8}$ 種排法. 然後將此一人插入,每法可增爲 7 法.故排列法之總數有 $7\underline{|8}$ 種.

〔例題 8〕 某鐵路有十個車站,站與站間所用車票互不相同,問共有幾種車票?

〔解〕 車票之種數,與自 10 取 2 之排列數相等,故共有車票

$${}_{10}P_2=10\cdot9=90\ (\text{種}).$$

7. **關於重複排列之定理** 自 n 個不同之物取 r 個,如同物可以重複使用,則其排列之總數爲 n^r.

〔證〕 設 n 個不同之物爲

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e\cdots\cdots l.$$

自其中取 r 個以作排列,可如下分別考之:

第一次取一個,

第二次取一個,

………………,

第 r 次取一個.

就第一次言,其取法有 n 個.

就第二次言，因題意同物可許重複使用，故其取法亦有 n 個. 同理，第 r 次之取法亦有 n 個.

故依基本定理，得所求之總數爲 n^r，以下列符號表之，

$$ {}_n\Pi_r = n^r. $$

〔例題 1〕 用 2、3、4、5 四個數字，得作若干個三位數？但同一數字不禁重複使用.

〔解〕 百位數有四個數字可用，故定百位數共有 4 個方法. 同理，定十位數亦有 4 個方法. 定個位數亦有 4 個方法. 故所作之三位數，共有

$$ {}_4\Pi_3 = 4^3 = 64 \text{ (個)}. $$

〔例題 2〕 用 1、2、3、4、5 五個數字，得作千以內之數若干個？(同一數字可許重複使用).

〔解〕 所作之數在千以內，故其位數祇限於一位、二位、三位之三種. 而

$$ \text{一位數有 } {}_5P_1 = 5 \text{ 個}, $$
$$ \text{二位數有 } {}_5\Pi_2 = 5^2 = 25 \text{ 個}, $$
$$ \text{三位數有 } {}_5\Pi_3 = 5^3 = 125 \text{ 個}. $$

∴ 所求之千以內數，共有

$$ 5 + 25 + 125 = 155 \text{ 個}. $$

〔例題 3〕 貨幣四個，給學生 10 人，每人可以任得幾個，或一無所得，問共有幾種給法？

〔解〕 以四個貨幣爲主體考之.

就甲貨幣言，有 10 種不同之給法.

就乙、丙、丁貨幣言，亦各有 10 種不同之給法.

故所求分配方法之總數有

$$ {}_{10}\Pi_4 = 10^4 = 10000 \text{ 種}. $$

8. 定理　在 n 個物體中，若有 n_1 個 a, n_2 個 b, n_3 個 c, ……，則全部取用此 n 個物體，所得作成之排列數爲

$$ N = \frac{\lfloor n}{\lfloor n_1 \lfloor n_2 \lfloor n_3 \cdots\cdots}. $$

〔證明〕 設　$a, a, a, \cdots\cdots a$: n_1 個,

$b, b, b, \cdots\cdots b$: n_2 個,

$c, c, c, \cdots\cdots c$: n_3 個,

………………………,

………………………,

$l, l, l, \cdots\cdots l$: n_m 個.

又設　$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots\cdots + n_m = n$.

若設排列之總數爲 N, 取其中任意之一個排列

$$ abaacad\cdots\cdots lab \cdots\cdots\cdots\cdots (1) $$

考之，其中必有 n_1 個 a 甚明.

今若將此 n_1 個 a 各附以相異之符號，而爲種種不同之排列，則 (1) 當增爲

$$ {}_{n_1}P_{n_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (2) $$

倍，而 N 中其他之排列亦各依同理增加，亦甚明. 故結果如次：

假定 n_1 個 a 全部相異時，則排列之總數增爲

$$N\times\underline{|n_1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

同理，更在 (3) 之任何一個排列中，假定 n_2 個 b 全部相異而爲種種之排列，則排列之總數更當增爲

$$N\times\underline{|n_1}\times\underline{|n_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

依此順次推之，最後所得排列之總數爲

$$N\times\underline{|n_1}\times\underline{|n_2}\cdots\cdots\underline{|n_m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此最後之 (5)，必與 n 個物全異時之排列總數 ${}_nP_n=\underline{|n}$ 相等，因得次之等式：

$$N\times\underline{|n_1}\,\underline{|n_2}\,\underline{|n_3}\cdots\cdots\underline{|n_m}=\underline{|n}.$$

$$\therefore\quad N=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n_1}\,\underline{|n_2}\,\underline{|n_3}\cdots\cdots\underline{|n_m}}.$$

〔例題 1〕　組成 Mathematics 之字母，若全部取用，得作成若干不同之排列？

〔解〕　已知字母之總數爲

Mathematics：11 個.

其中相同之字母有　a：2 個

m：2 個

t：2 個

故設所求排列之總數爲 N，則

$$N=\frac{\underline{|11}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|2}}$$

$$=4989600.$$