普通高等教育“十二五”规划教材
中国地质大学“十二五”规划教材
21世纪大学数学创新教材

丛书主编　陈　化

复变函数与积分变换

罗文强　黄精华　黄　娟　马晴霞　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

中国地质大学“十二五”规划教材

21 世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

复变函数与积分变换

罗文强 黄精华 董 娟 马晴霞 主编

中国地质大学(武汉)“十二五”教材建设经费资助

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

全书共9章，主要内容包括复数与复变函数、解析函数、复积分、级数、留数及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换、MATLAB在复变函数与积分变换中的应用. 每章均配有小结和较为丰富的例题、习题，书后附有习题答案，对较难的习题给出了解题提示.

本书可作为高等工科学校地球物理、机电工程、电子信息工程等有关专业本科生的复变函数与积分变换课程教材，也可以作为同类课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/罗文强等主编. 一北京：科学出版社，2012.10

普通高等教育"十二五"规划教材　21世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-035707-6

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①罗…　Ⅲ.①复变函数－高等学校－教材　②积分变换－高等学校－教材　Ⅳ.①O174.5　②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第236932号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1 000)

2012年11月第 一 版　印张：15

2012年11月第一次印刷　字数：287 000

定价：27.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《21 世纪大学数学创新教材》丛书序

《21 世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，创新是其主要特色和要求. 经组编委员会审定，列选科学出版社普通高等教育“十一五”规划教材.

一、组编机构

《21 世纪大学数学创新教材》丛书由多所 985 和 211 大学联合组编：

丛书主编 陈 化

常务副主编 樊启斌

副 主 编 吴传生 何 穗 刘安平

丛书编委 （按姓氏笔画为序）

王卫华 王展青 刘安平 严国政 李 星
杨瑞琰 肖海军 吴传生 何 穗 陈 化
罗文强 赵东方 黄樟灿 梅全雄 彭 放
彭斯俊 曾祥金 谢民育 樊启斌

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求，创造双重品牌：

先进. 把握教改、课改动态和学科发展前沿，学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中.

知识与方法创新. 重点教材、高层次教材，应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新，有所建树，有所创造，有所贡献.

教学实践创新. 教材适用，教师好教，学生好学，是教材的基本标准. 应紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处.

继承与创新. 创新须与继承相结合，是继承基础上的创新；创新需转变为参编者、授课者的思想和行为，避免文化冲突.

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本要求，力求教材体系完整，结构严谨，层次分明，深入浅出，循序渐进，阐述精炼，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础. 除上述一般性要求外，还应具备下列特点：

（1）恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果，使学生有较新的学术视野.

（2）体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学软件的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精品教材.

（3）在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

（4）数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇，章末列出中文小结，布置若干道（少量）英文习题，并要求学生用英文解答. 章末列出习题和思考题，并列出可进一步深入阅读的文献. 书末给出中英文对照名词索引.

（5）公共数学教材具有概括性和简易性，注重强化学生的实验训练和实际动手能力，加强内容的实用性，注重案例分析，提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范，在这一框架下，每本教材的主编对本书具有明确的责权利：

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求，拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态，学科发展前沿，先进理念、知识和方法，如何引入教材；知识和内容创新闪光点及其编写方法；教学实践创新的具体操作；创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命，保持和发扬科学出版社"三高"、"三严"的传统特色，创出品牌；适用性是教材的生命力所在，应明确读者对象，篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

（1）把握教材编写人员水平，原则上要求博士、副教授以上，有多年课程教学经历，熟悉课程和学科领域的发展状况，有教材编写经验，有扎实的文字功底.

（2）充分注意著作权问题，不侵犯他人著作权.

（3）讨论、拟定教材提纲，并负责编写组的编写分工、协调与组织.

（4）拟就内容简介、前言、目录、样章，统稿、定稿，确定交稿时间.

（5）负责出版事宜，敦促编写组成员使用本教材，并优先选用本系列教材.

《21世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009年6月

前　　言

复变函数与积分变换是高等工科学校地球物理、机电工程、电子信息工程等有关专业的重要数学课程之一，主要任务是培养学生的逻辑思维能力及科学计算能力，能够应用复变函数与积分变换的基本原理和方法解决工程实际问题，并为后续的课程学习提供必备的基础.复变函数与积分变换的主要内容为复数与复变函数、解析函数、复积分、级数、留数及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换、MATLAB 在复变函数与积分变换中的应用.本书是在编者参阅近年出版的有关教材基础上，结合我们的教学实践，编写了这本复变函数与积分变换教材，在编写过程中重点考虑以下几个方面：

1. 内容编写上更加注重基本内容与基本方法，加强数学应用能力的培养，省略了较难的证明.

2. 增加了一些例题，每章配有小结和较为丰富的例题、习题，书后附有习题答案，对较难的习题给出了解题提示，帮助同学加深对课程内容的理解，提高解题的能力.

3. 目前数学计算软件发展较快，日趋于成熟，在自然科学、工程计算等领域中有广泛的应用，MATLAB 软件就是其中的代表.为加强复变函数与积分变换的应用性，提高同学的学习兴趣，本次编写增加了 MATLAB 在复变函数与积分变换中的应用一章.

本书由罗文强主持编写并统稿.其中第 1、9 章由罗文强负责编写；第 3、5 章由黄精华负责编写，第 2、4、6 章由黄娟负责编写，第 7、8 章由马晴霞负责编写。

本书的出版得到了中国地质大学(武汉)“十二五”教材建设经费资助。在编写出版过程中得到中国地质大学(武汉)教务处、数理学院的领导和教师的大力支持，李计钢硕士提供了第 9 章的计算实例和习题，在此对他们表示感谢.

由于编者水平所限，书中难免有不妥和缺点，敬请读者指正.

编　者

2012 年 3 月

目　　录

第1章

复数与复变函数

本章首先复习总结中学已学过的复数概念、性质、运算，进一步介绍了复平面上的区域、复变函数、复变函数的极限、复变函数的连续等基本概念.

1.1 复数及其运算

1.1.1 复数的概念

定义 1.1.1 形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数为复数. 其中 i 为虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2=-1$；x 和 y 为任意实数，分别称为 z 的实部和虚部，记为：$x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}z$.

当 $y=0$ 时，$z=x$ 可看成实数，可见实数集是复数集的一部分；当 $x=0, y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数.

对于两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2$ 时，$z_1=z_2$；一般来说两个复数不能比较大小.

1.1.2 复数的代数运算

根据复数的定义，复数是实数的推广，类比实数的四则运算可定义复数的四则运算.

定义 1.1.2 两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法、减法、乘法和除法定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$$

$$z_1-z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$$

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0)$$

由复数四则运算的定义，容易验证复数运算满足如下算律：

(1) 交换律　$z_1+z_2=z_2+z_1, z_1z_2=z_2z_1$

(2) 结合律　$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$，$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$

(3) 分配律　$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

定义 1.1.3　设复数 $z=x+\mathrm{i}y$,称 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数,记为 $\bar{z}$.

由共轭复数的定义,容易证明共轭复数的如下性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

(2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}(z_2\neq 0)$

(4) $\bar{\bar{z}}=z$

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$

(6) $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,z$

(7) $z\bar{z}=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2$

例 1.1.1　证明:$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$.

证　设 $z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\bar{z}=x-\mathrm{i}y,\quad z+\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y)=2x=2\mathrm{Re}z$$

例 1.1.2　证明:$-\mathrm{i}=\mathrm{i}^{-1}=\bar{\mathrm{i}}$,(i 为虚数单位).

证　$$-\mathrm{i}=\frac{-\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}}=\frac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}^{-1},\quad \bar{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$$

所以 $-\mathrm{i}=\mathrm{i}^{-1}=\bar{\mathrm{i}}$.

例 1.1.3　设 $z_1=1-2\mathrm{i}$,$z_2=5+2\mathrm{i}$,求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解　$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-2\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}=\frac{1-12\mathrm{i}}{29}=\frac{1}{29}-\frac{12}{29}\mathrm{i}$$

所以

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{1}{29}+\frac{12}{29}\mathrm{i}$$

1.1.3　复数的表示方法

1. 点表示

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与有序实数对 (x,y) 一一对应,在平面直角坐标系中,(x,y) 表示平面上一个点,由此可见复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与平面直角坐标系上点 (x,y) 一一对应. 所以复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用平面坐标上点 (x,y) 来表示,这种表示称为点表示. 用来表示复数的坐标平面称为复平面或 z 平面. 在复平面上 x 轴称为实轴,y 轴称为虚轴(图 1-1).

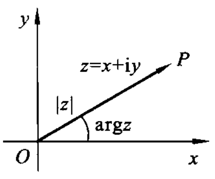

图 1-1

2. 向量表示

在复平面上，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 还与从坐标原点指向点 $P(x, y)$ 的平面向量一一对应，因此复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，这种表示称为向量表示. 向量的长度称为复数 z 的模或绝对值，记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

由复数的运算法则，两个复数的加减运算与相应向量的加减运算一致(图 1-2、图 1-3). 对于模容易证明如下各式成立：

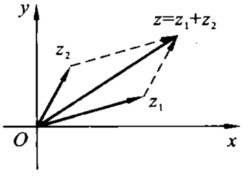

图 1-2

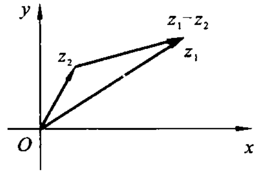

图 1-3

(1) $|z| = |\bar{z}|, z\bar{z} = |z|^2$

(2) $|x| \leqslant |z|, |y| \leqslant |z|, |z| \leqslant |x| + |y|$

(3) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$

当 $z \neq 0$，时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向间的夹角称为复数的辐角，记为 $\mathrm{Arg}\,z = \theta$. 显然 $\mathrm{Arg}\,z$ 是多值的，它们之间的差为 2π 的整数倍. 称在区间$(-\pi, \pi]$ 内的辐角为 $\mathrm{Arg}\,z$ 的主值，记为 $\arg z$(图 1-1)，于是

$$\mathrm{Arg}\,z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

当 $z = 0$，$|z| = 0$，辐角不确定.

辐角主值 $\arg z$ $(z \neq 0)$ 可由下列关系确定：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y \geqslant 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

例 1.1.4 求复数 $1+\mathrm{i}$ 的模和辐角.

解 $$|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2},\quad \arg(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

3. 三角表示

根据直角坐标与极坐标的转换关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\quad(r=|z|,\theta=\mathrm{Arg}\,z)$$

可将复数表示成 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的形式,这种形式称为复数的三角表示式.

例 1.1.5 将复数 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为三角表示.

解 $$|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=2=r,\quad \arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

所以 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 三角表示式为

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

例 1.1.6 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\neq0,z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\neq0$,证明:

(1) $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$

证 (1)

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

(2) 由商的定义同理可证.

由例 1.1.6 当 $z_1\neq0,z_2\neq0$ 时,有下式成立:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\tag{1-1}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2\tag{1-2}$$

式(1-1)、(1-2)关于辐角相等应理解为集合相等.

4. 指数表示

由复数的三角表示式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 及欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,得

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

这种形式称为复数的指数表示式.

例 1.1.7 将复数 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为指数表示.

解 $\left|1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right| = 2 = r$, $\arg(1-\sqrt{3}\mathrm{i}) = \arctan\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3}$

所以指数表达式为

$$1-\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$$

例 1.1.8 设 $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \neq 0$, $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \neq 0$,证明:

(1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

证 (1) $z_1 z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2))$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

由例 1.1.8 也可以得到式(1-1)、(1-2).

5. 球面表示

设 xOy 为复平面,取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面,球面上一点 S 与原点重合,过点 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N(图 1-4),称 S 为南极,N 为北极.对于复平面内任何一点 z,连接 zN,则该线段一定与球面相交,设交点为 P(P 异于 N);反之,对于球面上任何一个异于 N 的点 P,连接 NP 并且延长与复平面相交于一点 z.这样,复平面上点与球面上点(N 点除外)建立了一一对应关系,即可以用球面上的点表示复数.

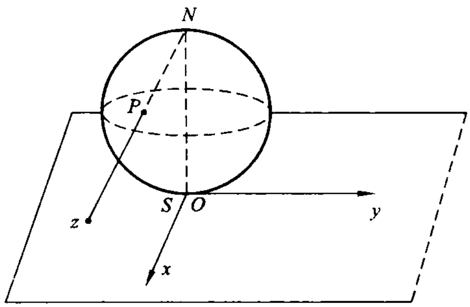

图 1-4

但是，对于球面上的北极点 N，还没有复平面上点与之对应. 由图 1-4 所示，当 z 点无限远离原点，即 z 的模 $|z|$ 趋于无穷大时，点 P 无限接近于点 N. 考虑极限形式，规定与北极点 N 对应的是复平面上的无穷远点. 在复数中引入唯一一个复数无穷大，记为 ∞，对应于复平面上的无穷远点，这样球面上的北极点 N 就与复数 ∞ 相对应. 复平面加上无穷远点称为扩充复平面，不包括无穷远点的复平面称为有限复平面.

对于复数 ∞，实部、虚部、辐角均无意义，它的模规定为正无穷大，即 $|\infty| = +\infty$. 对于复数 ∞ 的四则运算补充规定如下：

(1) $a+\infty=\infty+a=\infty\ (a\neq\infty)$

(2) $a-\infty=\infty-a=\infty\ (a\neq\infty)$

(3) $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty\ (a\neq\infty)$

(4) $\dfrac{a}{\infty}=0,\ \dfrac{\infty}{a}=\infty\ (a\neq\infty),\ \dfrac{a}{0}=\infty\ (a\neq 0$，但可为 $\infty)$

(5) $\infty\pm\infty, 0\cdot\infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 均无意义.

1.1.3 复数的乘幂与方根

定义 1.1.4 n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记为 z^n，即 $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n\text{个}}$.

设 $z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)\ (k=1,2,\cdots,n)$，对例 1.1.6 可归纳证明：

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$$

如果 $z_1=z_2=\cdots=z_n=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则上式为

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\sin n\theta) \tag{1-3}$$

当 n 为负整数，定义 $z^n=\dfrac{1}{z^{-n}}$，(1-3) 式亦成立.

特别地，当 $|z|=r=1$，由(1-3) 式得到棣莫弗(De Moivre) 公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sin n\theta \tag{1-4}$$

例 1.1.9 计算 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}$ 的值.

解 先将复数化成三角式

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad 1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

则

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}=\left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^{10}$$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10}$$

$$=\cos\frac{20\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{20\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

定义 1.1.5　对于复数 z，若存在复数 ω 满足等式：$\omega^n=z$（n 为大于 1 的整数），则称 ω 为 z 的 n 次方根，记为 $\omega=\sqrt[n]{z}$.

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$\omega=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，由 $\omega^n=z$ 及(1-3)式，得

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

即

$$\rho^n=r,\quad \cos n\varphi=\cos\theta,\quad \sin n\varphi=\sin\theta$$

考虑辐角的多值性，得

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

即

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

所以

$$\omega=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时得到 n 个不同的根，分别为

$$\omega_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$\omega_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

……

$$\omega_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right]$$

当 k 取其他整数值时，上述根重复出现，因此一个非零复数的 n 次方根共有 n 个.

n 个不同方根 ω_k（$k=0,1,\cdots,n-1$）模相同，两个相邻根的辐角差为 $2\pi/n$，所以复数 n 次方根的几何意义是：原点为中心，以 $\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点.