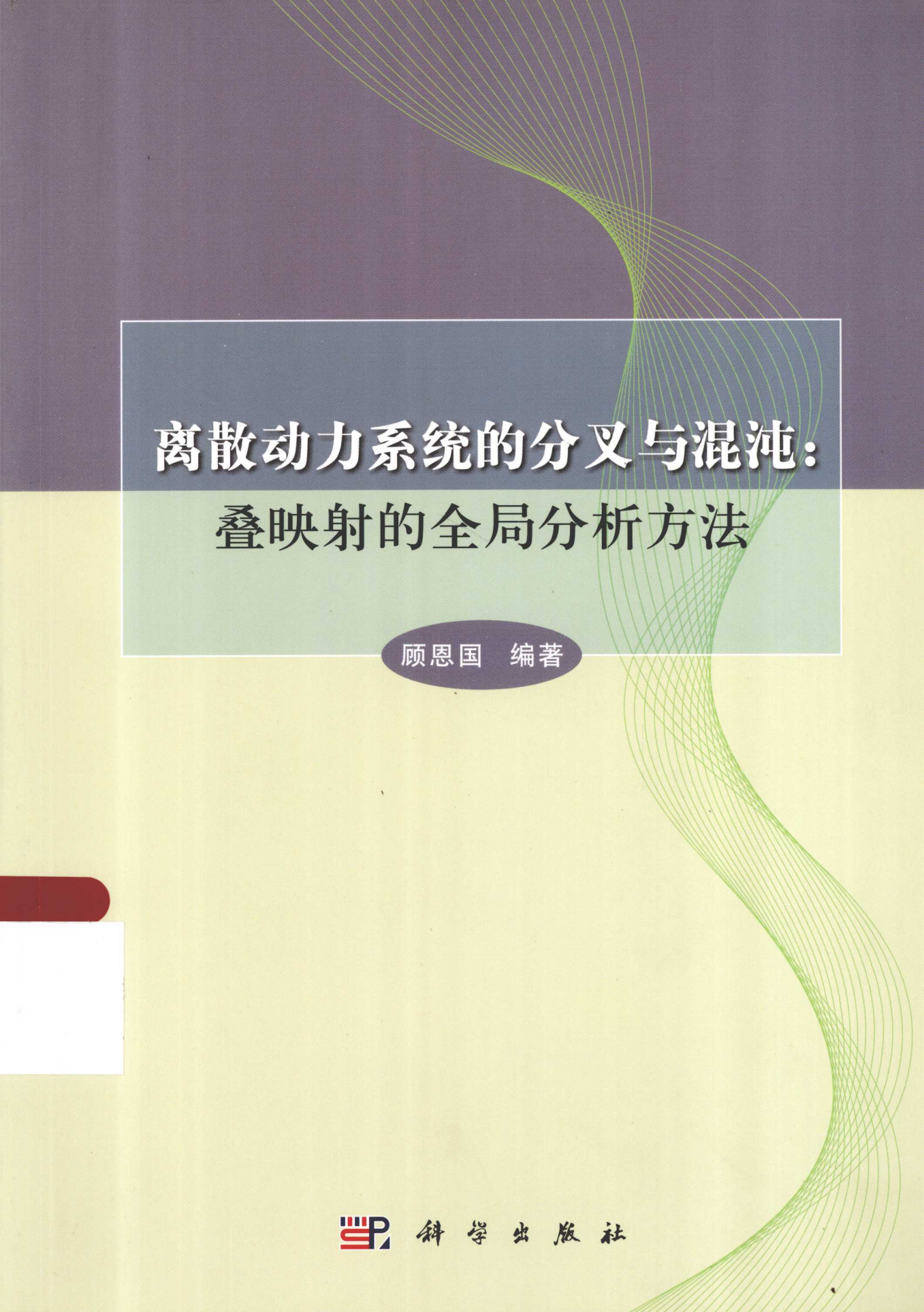




离散动力系统的分叉与混沌： 叠映射的全局分析方法

顾恩国 编著



科学出版社

. 013332989

0193
02

离散动力系统的分叉与混沌:

叠映射的全局分析方法

顾恩国 编著



科学出版社

北京



北航

C1640710

0193
02

880500210

内 容 简 介

本书是关于映射动力系统定性理论的最新研究成果的总结,共5章,分别介绍一维映射动力系统的全局分析、二维不可逆的连续映射动力系统的全局分析、二维分母为零映射动力系统的全局分析,以及它们在生物学和经济学中的应用.

本书可作为高年级本科生和研究生的系统动力学教材或参考书,也可供从事非线性动力学研究的科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

离散动力系统的分叉与混沌:叠映射的全局分析方法 / 顾恩国编著.
— 北京:科学出版社,2013.3

ISBN 978-7-03-036700-6

I. ①离… II. ①顾… III. ①离散动力系统-研究 IV. ①O193

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 028474 号

责任编辑:杨瑰玉 房 阳 / 责任校对:张凤琴
责任印制:彭 超 / 封面设计:苏 波

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市首壹印务有限公司 印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年3月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2013年3月第一次印刷 印张:10 3/4

字数:246 000

定价:49.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书内容属于映射动力系统的定性理论,大家都熟悉常微分方程的定性理论,然而对于差分方程(可以化为映射动力系统)的定性理论却不一定那么熟悉,其实映射动力系统的定性理论与常微分方程的定性理论差别很大.映射动力系统的定性理论侧重映射的奇异集对映射不变集的影响,这方面在欧洲(特别是法国、意大利等)有较多的研究.1973年由法国的Toulouse研究所发起的迭代理论的会议,至今已举办了17次专题研讨会,极大推动了相关研究,到1996年,已出版两部不可逆平面映射的专著,并且已成功应用其理论分析经济系统的复杂性.1999年至今,G. I. Bischi等又提出了一些重要概念(分母为零的点集、焦点和焦前集).它们与不可逆平面映射的关键集的概念一起在描述映射系统的不变集的结构及其分叉中起重要作用.本书在系统介绍这些理论基础上,着重介绍它们在生物、经济系统中的应用,特别是第4章和第5章是作者近年来的主要研究结果的总结,因为本书涉及的主要内容在国际上较新颖,在国内更是很少涉及,出版本书可以推动叠映射系统理论在国内的研究和应用.

本书可作为高年级本科生和研究生系统动力学教材或教学参考书,也可供从事非线性动力学研究的科研人员参考.本书假设读者具有数学分析、线性代数和动力系统的基础知识.感谢研究生期间复旦大学阮炯教授的指导以及国家自然科学基金(10871209)的资助.

第1章首先系统介绍不可逆映射的关键点概念和性质及其在吸引域和吸引子的定义中的应用,系统介绍关键点在全局分叉中的应用;然后介绍一维分母为零映射的性质和无界吸引集以及标志无界不发散轨线产生和消失的接触分叉等内容.第2章介绍二维不可逆映射的全局分析,包括关键集与二维映射的分类和吸引域分叉理论.第3章涉及二维分母为零映射系统的全局分析.首先介绍奇异集(无定义集、焦点、焦前集)概念和基本性质,然后介绍焦点和焦前曲线的几何性质及其在可逆与不可逆映射中的应用,最后介绍二维分母为零映射的无界吸引集以及相应的分叉.第4章为不可逆映射与分母为零映射的奇异集理论在生物学中的应用,内容涉及两个饲养季节成熟种群存活模型、时迟的logistic模型、推广的logistic模型、捕食者与食饵模型等,它们要么化为不可逆映射,要么化为退化的可逆映射,即它们的逆映射有一个分量是分母为零的函数.因此应用分母为零的平面映射的奇异点集以及焦点和焦前曲线理论,分析考虑过去的两代种群密度对当前种群增长的影响的离散种群模型的持久性对初值的依赖性,即确定初始的种群密度的范围(即可行吸引域的大小),保证系统在给定参数的情况下不灭绝,并给出其可行吸引域的全局分叉(可行吸引域结构随参数变化情况).第5章涉及二维不可逆映射系统的关键曲线理论和分母为零的平面映射的无定义集,以及焦点和焦前曲线理论在经济中的应用.分析有部分个体合作的多个体博弈公共渔业资源的模型,渔业资源储量与捕捞量之间相互作用模型给出可行吸引域结构随系统参数的变化的全局分叉情况.特别是

对捕食和被捕食模型、产量调整且具有自适应预期的两寡头博弈模型进行了系统分析.

本书未介绍计算机编程问题, 所有程序可以用 Matlab, IDMC(interactive dynamical model calculator)来实现.IDMC 可以从 <http://www.dss.uniud.it/nonlinear/> 获得.

编 者

目 录

第 1 章 一维映射动力系统的全局分析	1
1.1 一维叠映射与差分方程、微分方程	1
1.2 图示迭代法	2
1.3 不可逆映射的性质	5
1.3.1 关键点及不可逆映射的分类	5
1.3.2 关键点在逆映射的确定中的应用	7
1.4 单极值映射的分叉及其“内嵌盒子”的分形结构	9
1.4.1 单极值映射基本分叉和性质	9
1.4.2 单极值映射的“内嵌盒子”分叉结构	13
1.5 一维连续映射动力系统的吸引域	16
1.5.1 一维连续可逆映射的吸引域	16
1.5.2 有单极值点的不可逆映射的吸引域及其全局分叉	17
1.5.3 有两个极值点的不可逆映射的吸引域及其全局分叉	19
1.6 一维连续映射动力系统的吸引域的分类和全局分叉	20
1.6.1 简单连通吸引域	20
1.6.2 具有有限边界的不连通吸引域及其分叉	22
1.6.3 第一类具有分形边界的吸引域,产生混沌瞬时的分叉	24
1.6.4 第二类具有分形边界的吸引域,产生模糊边界的分叉	25
1.6.5 产生混沌瞬时和模糊边界的分叉的一般考虑	26
1.7 一维分母为零映射的全局分析	28
1.7.1 牛顿映射的吸引域	28
1.7.2 一维分母为零映射的无界吸引集	29
1.7.3 标志无界不发散轨线产生和消失的接触分叉	31
1.7.4 一个具有闭合形式解的混沌递归系统	34
第 2 章 二维不可逆的连续映射动力系统的全局分析	37
2.1 关键集与二维映射的分类	37
2.2 二维连续映射动力系统吸引域分叉	41
2.2.1 吸引域连通和不连通以及单连通和复连通的等价条件	41
2.2.2 吸引域分叉的一般理论	45
2.2.3 一个具体二维二次映射的一般性质	49
2.2.4 一个具体二维二次映射的吸引域分叉	54
第 3 章 二维分母为零映射系统的全局分析	62
3.1 分母为零映射的奇异集概念和基本性质	62

3.1.1	分母为零映射的无定义集及其性质	62
3.1.2	分母为零映射的焦点和焦前集	64
3.2	焦点和焦前曲线的几何性质	69
3.3	有一个焦前曲线的可逆映射	73
3.4	有一个焦前曲线的 Z_0 - Z_2 型不可逆映射	78
3.5	有两个焦前曲线的 Z_0 - Z_2 型不可逆映射	82
3.5.1	与焦前曲线横交弧的前象	84
3.5.2	实例	87
3.6	二维分母为零映射的无界吸引集	94
3.6.1	从有界混沌集到无界混沌集	94
3.6.2	从有界不变闭曲线到无界吸引子的分叉	100
第 4 章	在生物学中的应用	105
4.1	两个饲养季节成熟种群存活模型	106
4.2	两代不重叠的生态种群系统模型的可行吸引域的全局分叉	110
4.2.1	时迟的 logistic 系统的可行吸引域全局分叉	111
4.2.2	推广的 logistic 系统的可行吸引域全局分叉	116
4.2.3	外部干扰对推广的 logistic 系统的影响	119
4.3	捕食者与食饵模型的全局分叉分析	127
4.3.1	系统的一般性质	127
4.3.2	可行吸引域的边界确定	129
4.3.3	可行吸引域和吸引子的全局分叉	133
第 5 章	在经济学中的应用	139
5.1	有部分个体合作的多个体博弈公共渔业资源的模型	139
5.1.1	模型的建立	139
5.1.2	正平衡点的存在性和稳定性	141
5.1.3	正平衡点的正平衡态的全局分析	142
5.2	渔业资源储量与捕捞量之间相互作用模型	144
5.2.1	动力学模型建立	144
5.2.2	不动点的存在性和稳定性	146
5.2.3	全局动力学行为	147
5.3	产量调整且具有自适应预期的两寡头博弈模型	152
参考文献		158

第 1 章 一维映射动力系统的全局分析

1.1 一维叠映射与差分方程、微分方程

考虑一维叠映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 是实数集. 点集 $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\}$ 称为点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的(正)轨道, $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \dots$.

如果令 $x(n) = f^n(x_0)$, 可以得到一阶差分方程

$$x(n+1) = f(x(n), \lambda), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1.1)$$

这里 $f(x, \lambda)$ 是实变量 x 和实参数 λ 的单值函数. 有时也将一阶差分方程称为一阶自治递归、一维自同态(one-dimensional endomorphism).

例 1.1 (logistic映射) 令 $x(n)$ 是某一种群在 t 时刻的种群密度, μ 是种群从一代到另一代的生长率, 则描述种群密度的数学模型为

$$x(n+1) = \mu x(n), \quad \mu > 0. \quad (1.1.2)$$

如果初始种群密度为 $x(0) = x_0$, 则 $x(n) = \mu^n x_0$ 是差分方程(1.1.2)的解. 如果 $\mu > 1$, 种群密度增加到 ∞ ; 如果 $\mu = 1$, 种群密度增加到 $x(n) = x_0$; 如果 $\mu < 1$, 种群密度增加到 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$.

可以观察到上述情况是不合理的, 由于资源是有限的, 种群密度不可能无限增加, 由于 $x(n+1)/x(n)$ 给出了单位种群密度的增长系数, 在上面它是一个常数, 如果单位种群密度的增长系数随种群密度的变化而变化, 则得到更复杂的模型, 最简单地假设它是种群密度的线性函数, 即 $x(n+1)/x(n) = a - bx(n)$, 则 $x(n+1) = x(n)(a - bx(n))$. 为了简化, 令 $y(n) = \frac{a}{b}x(n)$, 则

$$y(n+1) = ay(n)(1 - y(n)). \quad (1.1.3)$$

方程(1.1.3)被称为logistic方程, 映射 $f(y) = ay(1 - y)$ 被称为logistic映射.

考虑微分方程

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (1.1.4)$$

在大多数情况下, 微分方程(1.1.4)不能得到公式解, 此时可以用数值方法得到其近似解. 例如, 应用Euler算法时, 取步长 $h = t_{n+1} - t_n$, 令 $x(t) \approx x(t_n)$, $x'(t) \approx \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$, 方程(1.1.4)产生差分方程

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(x(t_n)). \quad (1.1.5)$$

令 $x(n) = x(t_n)$, 差分方程(1.1.5)可以写成

$$x(n+1) = x(n) + hf(x(n)). \quad (1.1.6)$$

给初值 $x(0) = x_0$, 由差分方程(1.1.6)得到的值 $x(1), x(2), x(3), \dots$, 只要 h 充分小, 这些值近似于微分方程的解在格栅点 $t_1, t_2, t_3, \dots$ 的值.

差分方程(1.1.1)可以看成映射(1.1.1)的隐式定义, 而映射(1.1.2)是差分方程(1.1.1)的以 x_0 为初值的解. 在理论上该函数十分令人满意, 但在实际上它几乎是无用的. 因为除了线性和很少的几个非线性实例外, 所有的非线性情况 $x(n)$ 均不可能由初等函数或超越函数明确表出. 所以要研究差分方程(1.1.1), 我们不能希望求出它的解 $x(n)$, 因此建立叠映射的定性方法或图示方法来确定其轨道的行为非常重要.

1.2 图示迭代法

图示迭代法是确定一维叠映射系统不动点的稳定性和吸引域的最有效方法. 在 $x(n) - x(n+1)$ 或 $f^n(x_0) - f^{n+1}(x_0)$ 平面上, 画出曲线 $y = f(x)$ 和对角线 $y = x$, 从坐标轴上的点 $(x_0, 0)$ 出发向上或向下作竖线与曲线 $y = f(x)$ 交于点 $(x_0, f(x_0))$, 从该点出发作水平直线交对角线于点 $(f(x_0), f(x_0))$, 便得到第一次迭代值 $x_1 = f(x_0)$. 重复此过程, 得到 x_0 的轨道的所有值, 即 $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$ (图1.1).

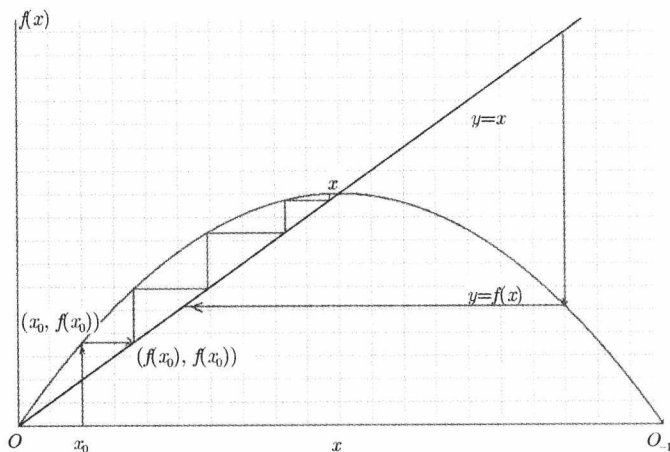


图 1.1 f 的图示迭代

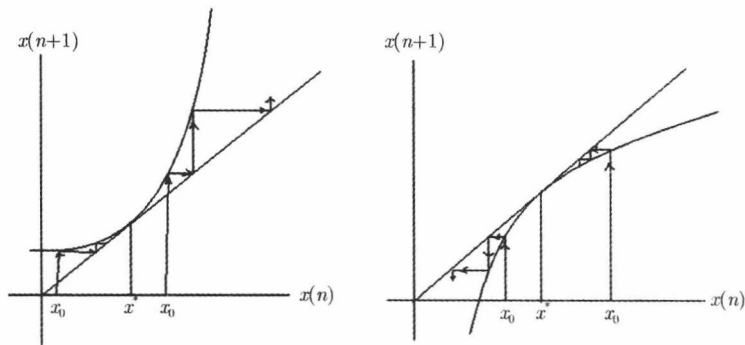
定义 1.1 如果 $f(x^*) = x^*$, 则称 x^* 为不动点.

(1) 如果 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $x(n) \in U(x^*), \forall n$, 则不动点 x^* 是稳定的. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = 0$, 则不动点 x^* 是吸引的或是渐近稳定的(图1.1).

(2) 如果 $\forall \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ 和 $\forall x_0 \in U(x^*), |x(n) - x^*|$ 增加直到一个 $x(n)$ 离开 $U(x^*)$, 则不动点 x^* 是排斥的或称为扩张的. x^* 是扩张不动点的充要条件是 $|df(x)/dx| > 1, \forall x \in U(x^*)$.

(3) 如果对于 $x(n) < x^*$ (或 $x(n) > x^*$), $|x(n) - x^*|$ 减小并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = 0$, 对于 $x(n) > x^*$ (或 $x(n) < x^*$), $|x(n) - x^*|$ 增加, 则不动点 x^* 一边吸引另一边排斥, 称为中性不动点或半稳定不动点. 这种情况是Lyapunov稳定意义下的临界情况, 它与传统的折分叉(fold bifurcation)有关. 此时在不动点处的导数为 $f'(x^*) = 1$, 最简单的情况是一个吸引不动点与一个排斥不动点合并所产生的分叉(图1.2).

定义 1.2 如果存在一正整数 k 使得 $f^k(p) = p$, 则称 p 为周期点. 如果 $f^r(p) \neq p$ 对于 $0 < r < k$, 则称 k 为周期点 p 的最小正周期, 称集合 $\mathcal{O}(p, f) = \{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$ 为周期点 p 的轨道, 经常被称为环.

图 1.2 f 的中性不动点

定义 1.3 x^* 是 f 的不动点, 如果初值得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0) - x^*| = 0$, 则称 x_0 属于 x^* 的吸引域. 如果用 $\mathcal{B}(x^*, f)$ 表示的吸引域, 则 $\mathcal{B}(x^*, f) = \{x_0 : |f^n(x_0) - x^*| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$. 同理称 $\mathcal{B}(p, f) = \{x_0 : |f^n(x_0) - p| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$ 为 k 周期点 p 的吸引域. 周期轨 $\mathcal{O}(p, f)$ 的吸引域是指该轨道上的点的吸引域的并集: $\mathcal{B}(\mathcal{O}(p), f) = \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathcal{B}(f^i(p), f)$.

根据图 1.1, 可以总结出下面定理:

定理 1.1 令 f 是连续映射, x^* 是其不动点, 假设存在开区间 (a, b) 除了包含 x^* 外不含其他不动点, 而 f 在 (a, b) 上单调递增, 并且 $x < f(x) < x^*$ 对应于 $a < x < x^*$, $x^* < f(x) < x$ 对应于 $x^* < x < a$, 则 x^* 的吸引域必包含区间 (a, b) , 即 $(a, b) \subset \mathcal{B}(x^*, f)$.

证明 仅证明 $(a, x^*) \subset \mathcal{B}(x^*, f)$, $(x^*, b) \subset \mathcal{B}(x^*, f)$ 可类似证明. 取 x_0 满足 $a < x_0 < x^*$, 令 $x_n = f^n(x_0)$, 由假设可知当 $x \in (a, x^*)$ 时, 位于对角线的上方或下方, 如图 1.1 所示, 有

$$a < x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x^*.$$

这是一个单调递增有上界序列, 因此它一定收敛于一点 $\bar{x} < x^*$. 由连续性可知 $x_{n+1} = f(x_n)$ 必收敛于 $f(\bar{x})$, 由于 $x_{n+1} = f(x_n)$ 也收敛于 $\bar{x}$, 从而 $f(\bar{x}) = \bar{x}$, 又因为无其他不动点, 所以 $\bar{x}$ 就是 x^* , 即 x_n 收敛于 x^* , 因此 $x_0 \in \mathcal{B}(x^*, f)$, 由 x_0 的任意性可知 $(a, x^*) \subset \mathcal{B}(x^*, f)$. ■

定义 1.4 若 $f(A) \subseteq A$, 称集合 A 是 f 的正向不变集 (或 f 在 A 上不变); 若 $f^{-1}(A) \subseteq A$, 称集合 A 是 f 的反向不变集, 这里 f^{-1} 是 f 的一个逆映射; 若 $f(A) = A$, 称集合 A 是 f 的不变集.

考虑由 (1.1.1) 定义的映射 f , f 的最简单的零维不变集是不动点和 k 周期轨道 (也称 k 环). 定义 k 环的特征乘子为所有周期点的微分值的乘积, 即 $S = \frac{df^k(p)}{dx} = f'(p)f'(f(p)) \cdots f'(f^{k-1}(p))$. 如果 k 环的特征乘子满足 $|S| < 1$, 则该环是吸引的 (或渐近稳定的). 如果 k 环的特征乘子满足 $|S| > 1$, 则称它是排斥的环. 因为 (1.1.1) 一般是非线性的, 它一般有多个不动点. 除了特殊情况和较小的 k 以外, f^k 和 (1.1.1) 的表达式很少可以明确给出.

考虑一个孤立不动点 p^* , 如果存在一个邻域 $U(p^*) = (p^* - \varepsilon, p^* + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, 从点 $x_0 \in U(p^*)$ 出发的序列 x_n (即轨道) 在 $n \rightarrow \infty$ 时有定义 1.1 中的三种情况: 在 (2), (3) 两种情况下, 称不动点 p^* 是不稳定的.

定义 1.5 如果对于一个开集 $\mathcal{B}(A)$ 的任意一点 x , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f^n(x) \rightarrow A$, 则称开集 $\mathcal{B}$ 是不变集 A 的吸引域.

定义 1.6 如果 A 是一个闭的不变集, 存在一个 A 的邻域 U 使得 $f(U) \subset U$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = A, \forall x \in U$, 则 A 是一个吸引集.

设 p^* 是 f 的不动点, p^* 的稳定集记为 $W^s(p^*)$, 即如果 $q \in W^s(p^*)$, 则存在一个整数 m 使得 $f^m(q) = p^*$. p^* 的不稳定集记为 $W^u(p^*)$, 即如果 $q \in W^u(p^*)$, 则存在 q 点的秩 $-n$ 前象 $q^{-n} \in U(p^*)$.

如果它是一个吸引不动点, 则 $W^s(p^*) \subseteq \mathcal{B}(p^*)$ 而 $W^u(p^*) = \emptyset$. 如果 p^* 是一个排斥不动点, 它的稳定集可以由 $W^s(p^*) = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(p^*)$ 给出, 而它的不稳定集由 $W^u(p^*) = \cup_{n \geq 0} f^n(U(p^*))$ 给出, 这里 $U(p^*) = \{x | x \in \mathbb{R}, |df(x)/dx| > 1\}$ 是 p^* 的局部不稳定集.

对于二维动力系统, 鞍型不动点的同宿和异宿点的定义在3.1节给出, 对于一维不可逆映射动力系统, 这一概念由下面定义给出 [150].

定义 1.7 设 p^* 是排斥(扩张)不动点, 若 $q \in W^s(p^*) \cap W^u(p^*)$, 则称 q 是 p^* 一个同宿点.

记 $q_i = f^i(q), i = 1, \dots, m$, 称

$$\mathcal{O}(q) = \{\dots, f^{-j}(q), \dots, q, q_1, \dots, q_m = p^*\}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f^{-j}(q) = p^*$$

是与 q 有关的同宿轨道.

定义 1.8 如果 p^* 和 r^* 是 f 的两个扩张不动点, 并且 $q \in W^u(p^*) \cap W^s(r^*)$, 则 q 是一个连接 p^* 到 r^* 的异宿点.

从 $q \in W^s(r^*)$ 知存在一个整数 m , 使得 $f^m(q) = r^*$. 从 $q \in W^u(p^*)$ 知存在 q 点的秩 $-N$ 前象使得 $q \in U(p^*)$.

记 $q_i = f^i(q), i = 1, \dots, m$, 称

$$\varepsilon(q) = \{\dots, f^{-j}(q), \dots, q, q_1, \dots, q_m = r^*\}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f^{-j}(q) = r^*$$

是与 q 有关的异宿轨道.

定义 1.9 (1) 如果 p^* 是扩张不动点;

(2) 在 p^* 的某一邻域 $U(p^*)$ 中存在一点 q 和整数 m 使得 $f^m(q) = p^*$,

则称 p^* 是突然返回排斥子(snap-back repeller, SBR) [115].

定义 1.10 设 f 是一个依赖参数 λ 的不可逆映射, 若参数 $\lambda < \lambda^*$ ($\lambda > \lambda^*$), 不动点是扩张不动点但不是SBR; 若参数 $\lambda > \lambda^*$ ($\lambda < \lambda^*$) 不动点是SBR, 则 λ 的值 λ^* 是SBR分叉值.

定义 1.11 如果参数 λ 跨越值 $\tilde{\lambda}$ 时有无限多个 p^* 的同宿轨道出现和消失, 则称当 $\lambda = \tilde{\lambda}$ 发生不动点 p^* 的同宿分叉(同宿扩张).

很明显不动点 p^* 的SBR分叉是它的同宿分叉. 如果一个同宿或异宿轨道包含Jacobi行列式为零(即 $J = 0$)的点, 则称该轨道是退化的, 否则称之为非退化的. 如果一个同宿或异宿轨道是退化的, 并且包含关键点的流形($f^j(c), j$ 是整数)的一个, 则称该轨道是临界的, 否则称之为非临界的.

定义 1.12 设 $\mathcal{H}$ 是映射 f 的一个有界不变闭集, 如果存在一个 $N > 0$ 使得当 $n \geq N$ 时, 对于任意的 $x \in \mathcal{H}$ 均有 $|dT^n(x)/dx| > 1$, 则称 $\mathcal{H}$ 是排斥双曲集.

定义 1.13 如果集合 Λ 满足:

(1) 集合 Λ 是 f 的一个闭的不变集, 即 $f(\Lambda) = \Lambda$,

(2) $\Lambda = \{V_s, s \in \Sigma_2\} = \bigcup_s V_s, V_s \cap V_{s'} = \emptyset$ 对于 $s \neq s'$,

(3) 如果 $x \in V_s$, 则 $f(x) \in V_{\sigma(s)}$,

则集合 Λ 称为具有 **Cantor 结构** 的集合, 这里 $\Sigma_2 = \{s = (s_1 s_2 s_3 \cdots); s_i = 0 \text{ 或 } 1\}$ 是一个双号半无穷序列空间, σ 表示一个位移映射: 如果 $s = (s_1 s_2 s_3 \cdots)$, 则 $\sigma(s) = (s_2 s_3 s_4 \cdots)$.

1.3 不可逆映射的性质

如果映射 f^{-1} 存在且唯一, f 是一个可逆映射; 如果 f^{-1} 存在且 $f, f^{-1}(x, \lambda)$ 均为光滑映射, 则 f 是一个微分同胚(diffeomorphism). 很明显, 单值函数 $f(x, \lambda)$ 定义的映射 f 的逆映射 f^{-1} 可能不存在也可能存在多个. 例如简单映射 $f(x, \lambda) = x^2 - \lambda$, 逆映射为 $f^{-1}(x, \lambda) = \pm\sqrt{x + \lambda}$. 如果 f^{-1} 不存在(是非实数)或不唯一, f 是一个不可逆映射. 我们在多数情况下遇到的映射是不可逆映射, 本节研究不可逆映射的性质.

1.3.1 关键点及不可逆映射的分类

例 1.2 映射 $f: x' = 0.5 + e^{-(x-3)^2}$ 是一个不可逆映射, 它有一个极值点 $x = 3$. $x' = 1.5$ 与点 $x' = 0.5$ 将 x' 轴分成不同的区域(或区间) $Z_0 = (-\infty, 0.5) \cup (1.5, +\infty)$, $Z_2 = (0.5, 1.5)$ (图1.3), 在 Z_0 的点没有秩-1前象, 在 Z_2 区域中的点有两个秩-1前象, 例如在 Z_2 中 x 的点有两个秩-1(或一阶)前象 x_1^{-1}, x_2^{-1} . 在点 $x' = 1.5$ 处, 映射 f 的两个秩-1前象合并, 这样的点称为映射的**关键点**(critical point), 记为 c , 它的秩-1(或一阶)前象是极值点, 记为 $c_{-1} = 3$.

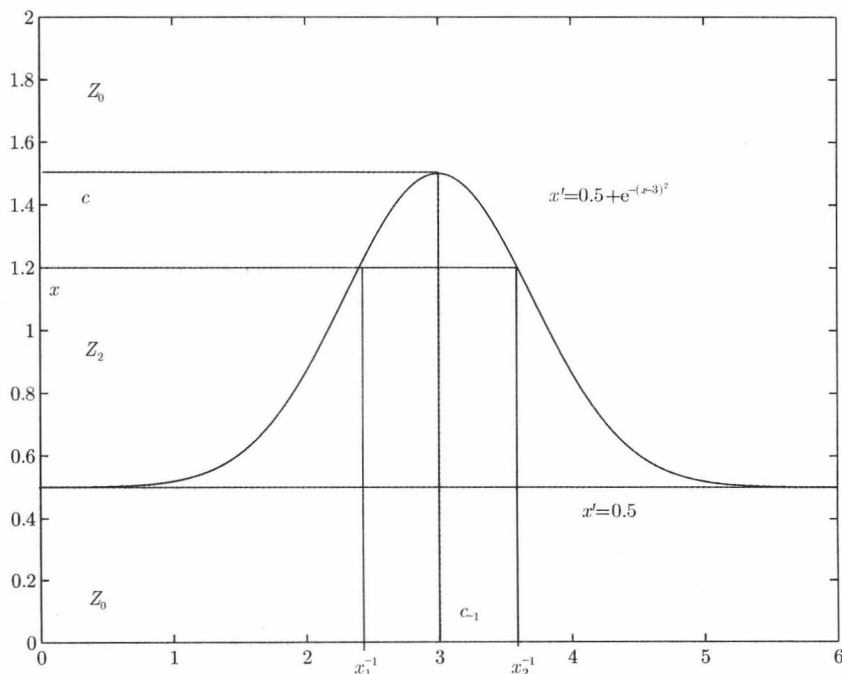


图 1.3 映射 $f: x' = 0.5 + e^{-(x-3)^2}$ 关键点

一般地, 映射 f 的关键点是至少有两个合并的秩-1前象那些点, 它们将 x' 轴分成不同的区域(或区间) $Z_i, i = 0, 1, \cdots, k$, 相邻的两个区域中的点的秩-1前象的数量不同. 如果

假设 $f(x, \lambda)$ 有极值点的个数是有限的, 映射 f 的关键点集 c 是 $f(x, \lambda)$ 的极值点集的象. 若记

$$C_{-1} = \{x \text{ 是映射 } T \text{ 极值点}\}, \quad (1.3.1)$$

则秩-1关键点的集合 $C = f(C_{-1})$. 当 $f(x, \lambda)$ 没有水平渐近线时, C 的点将实直线分成若干区间, 它们构成的不同逆映射 f^{-1} 的定义域, 而逆映射 f^{-1} 的值域以 C_{-1} 的点为端点的区间. 当 $f(x, \lambda)$ 有水平渐近线 $x' = h$ 时(图1.3), 水平渐近线 $x' = h$ 和 C 的点一起构成不同逆映射 f^{-1} 的定义域, 而逆映射 F^{-1} 的值域仍然是由 C_{-1} 的点界定的区间. 一般来说, 映射 f 满足

$$C_{-1} \subseteq f^{-1}(C), \quad C = f(C_{-1}), \quad (1.3.2)$$

这里 f^{-1} 表示映射 f 的所有秩-1前象集. 如果 f 有超过两个一阶逆映射时, 方程(1.1.3)的包含关系是严格(图1.4), 即 $C_{-1} \subset f^{-1}(C)$. 我们称关键点集 C 的秩-1前象中不属于 C_{-1} 的点的集合为关键点的**额外前象集(extra primages)**, 记为 $[C_{-1}^e]$:

$$f^{-1}(C) = C_{-1} \cup [C_{-1}^e]. \quad (1.3.3)$$

按照表示映射的函数的性质, 可以分成三种情况:

(1) 如果 f 连续可微, 则 $C_{-1} \subset J_0 = \{x \in \mathbb{R} | df(x)/dx = 0\}$. 这里 $=$ 和 $\subset$ 均可能发生. 其逆映射在映射 f 的定义域内部的区间 Z_i 上连续可微, 并且 C_{-1} 将实直线分成若干区间 R_j , 在这些区间 $df(x)/dx$ 中定号. **穿越关键点将有成对的一阶前象产生和消失.**

(2) 如果 f 连续但分段连续可微, $C_{-1} = [\beta] \cup [\lambda]$, 这里 $[\beta] \subseteq \{x \in \mathbb{R} | df(x)/dx = 0\}$, $[\lambda] \subseteq \{x \in \mathbb{R} | T \text{ 在 } x \text{ 处不可导}\}$, $=$ 和 $\subset$ 均可能发生. $[\beta]$ 和 $[\lambda]$ 之一和两者均可能为空集. 其逆映射在映射 f 的定义域内部的区间 Z_i 上连续可微, 并且 $df(x)/dx$ 在由 C_{-1} 界定的区间中定号. $[\lambda]$ 中的点可能使得Jacobi行列式为零, 不可导点可能不属于 C_{-1} . **穿越关键点将有成对的一阶前象产生和消失.**

(3) 如果 f 分段连续, C_{-1} 可以分成两个子集, 一个是由连续可微并且 $df(x)/dx = 0$ 或者分段可微的点组成的集合, 另一个是不连续点组成的集合. 为了避免复杂性, 假设映射是分段连续映射, 它仅包含不连续的关键点, 并且间断点仅有一个有限跳跃间断点. 如图1.5, c_{-1} 是映射的间断点, $f(c_{-1}) = C = \{c^1, c^2\}$ 是一个关键集. **穿越关键点将不会有成对的一阶前象产生和消失, 而是一个一阶前象产生和消失.**

秩 $-(i+1)$, $i > 0$, 关键点 c_i 是 c 的秩 $-i$ 象, 即 $c_i = f^i(c) = f^{i+1}(c_{-1})$, $c_0 = C$.

一般来说, 实直线 $\mathbb{R}$ 可以分成开区间 Z_i , $\mathbb{R} = \cup_i \bar{Z}_i$, $\bar{Z}_i$ 是 Z_i 的闭集, Z_i 中的点有 i 个秩-1前象. Z_i 的边界一般属于一阶关键点集 C . Z_i 的最大指数 i , 即映射产生的一阶前象的最大个数称为映射的**次数**, 值得注意的是它并不等同于多项式的次数.

在下面的研究中, 根据由关键集定义的区域 Z_i 的性质, 将不可逆映射分为不同类型:

$(Z_0 - Z_2)$ 型: C 仅由一个点 c 构成, 该点将 $\mathbb{R}$ 分成两个区间, 一个为 Z_0 其中的点没有前象, 另一个为 Z_2 其中的点有两个一阶前象.

$(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ 型: C 由两个点构成, 这两个点将 $\mathbb{R}$ 分成两三个区间, 两个为 Z_1 其中的点仅有一个一阶前象, 另一个为 Z_3 其中的点有三个一阶前象.

等价地, 可以定义 $(Z_0 - Z_2 - Z_4)$ 型的映射或更加复杂类型的映射. 当有 $s > 1$ 个区间,

并且这些区间上的点的前象均有 i 个一阶前象时, 用 $Z_i^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, s$ 表示. 当 $s = 1$ 时, 简记为 $Z_i^1 \equiv Z_i$. 当 $s = 2$ 时, $Z_i^1 \equiv Z_i, Z_i^2 \equiv Z_i'$.

1.3.2 关键点在逆映射的确定中的应用

例 1.3 考虑一个有两个极值点的函数定义的映射(图1.4), 我们称之为双峰谷映射(bimodal map).

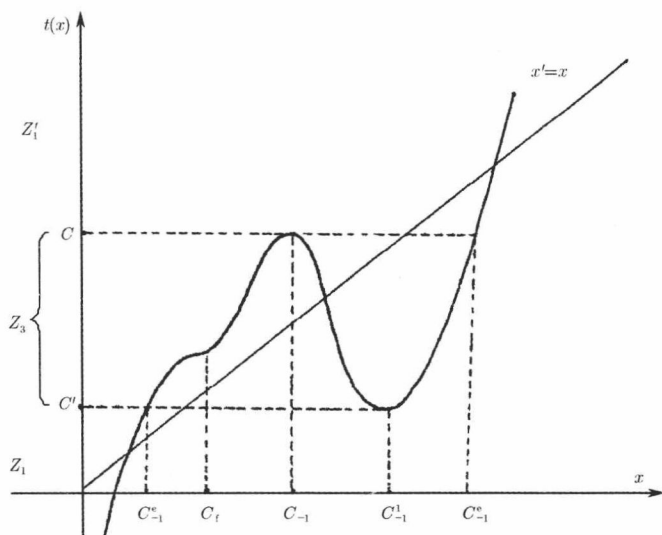


图 1.4 关键点和关键点的秩-1前象

此时 $c_{-1} = \{c_{-1}, c'_{-1}\}$, c 是函数的极大值点, c' 是函数的极小值点. $C = \{c, c'\}$, 其中 $c = f(c_{-1}), c' = f(c'_{-1})$. c 和 c' 将实直线分三个开区间 $Z_1 = (-\infty, c')$, $Z_3 = (c, c')$ 和 $Z_1 = (c, +\infty)$. 在它们上的点分别有1, 3和1个不同的前象. 我们可以定义 f 的三个不同的逆映射 $f_i^{-1}, i = 1, 2, 3$; $f_1^{-1} : (-\infty, c] \rightarrow (-\infty, c_{-1}]$, $f_2^{-1} : [c', c] \rightarrow [c'_{-1}, c_{-1}]$, $f_3^{-1} : [c', +\infty) \rightarrow [c'_{-1}, +\infty)$. 关键点 c 有两个合并的前象 $c_{-1} = f_1^{-1}(c) = f_2^{-1}(c)$ 和一个额外的前象 $c_{-1}^e = f_3^{-1}(c)$. 关键点 c' 有两个合并的前象 $c'_{-1} = f_1^{-1}(c') = f_2^{-1}(c')$ 和一个额外的前象 $c_{-1}'^e = f_3^{-1}(c')$. 如果 $x \in Z_1^1$, 则 $f^{-1}(x) = f_1^{-1}(x)$, 我们可以说 $f_1^{-1}(x) \in (-\infty, c_{-1}^e)$. 如果 $x \in Z_3$, 则 $f^{-1}(x) = \{f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x), f_3^{-1}(x)\}$, 这里 $f_1^{-1}(x) \in (c_{-1}^e, c_{-1})$, $f_2^{-1}(x) \in (c_{-1}, c'_{-1})$, $f_3^{-1}(x) \in (c'_{-1}, c_{-1}^e)$. 如果 $x \in Z_1^2$, 则 $f^{-1}(x) = f_3^{-1}(x)$, 并且 $f_3^{-1}(x) \in (c_{-1}^e, +\infty)$.

一般地, 在区间 $Z_i^\alpha, i > 0$ ($i = 0$ 没有逆映射存在)内, 可以定义 i 个逆映射. 设 $R_{i,j}^\alpha, j = 1, \dots, i$ 是定义在 Z_i^α 上的逆映射的值域, 则相应的逆映射为

$$f_{i,j}^{-1,\alpha} : Z_i^\alpha \rightarrow R_{i,j}^\alpha; j = 1, \dots, i, \alpha = 1, \dots, s, f_{1,1}^{-1,\alpha} \equiv f_1^{-1,\alpha}, R_{1,1}^\alpha \equiv R_1^\alpha. \quad (1.3.4)$$

当 $s = 1$ 时, 简单记为

$$f_{i,j}^{-1} : Z_i \rightarrow R_{i,j}; j = 1, \dots, i, s = 1$$

下面给出实直线上连通集合 S (一维区间线段)的象与前象(图1.5).

例 1.4 考虑logistic型映射 $f : x' = ax(1-x)$, 它有唯一的关键点 $c = a/4$, 它将实直

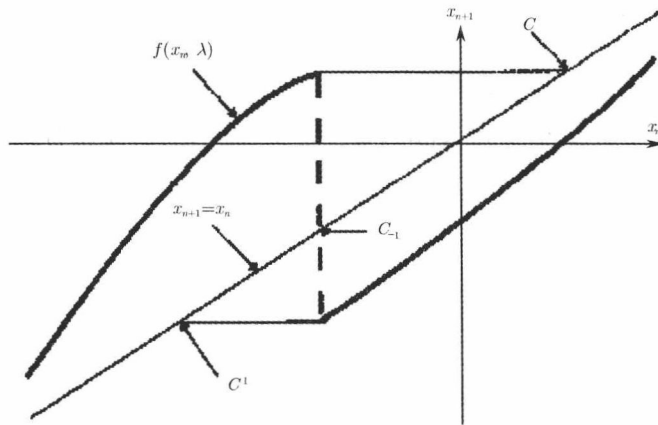


图 1.5 分段连续函数定义的映射的关键点

线分成两个子区间 $Z_0 = (c, +\infty)$ 和 $Z_2 = (-\infty, c)$. 如果 $x' \in Z_2$, 则它有两个秩-1前象

$$x_1 = f_1^{-1}(x') = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a(a-4x')}}{2a},$$

$$x_2 = f_2^{-1}(x') = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a(a-4x')}}{2a}.$$

关于极值点 $c_{-1} = 1/2 = f^{-1}(a/4)$ 对称. 映射 f 将区间线段折起, 而逆映射 f^{-1} 将区间线段开折(图1.6).

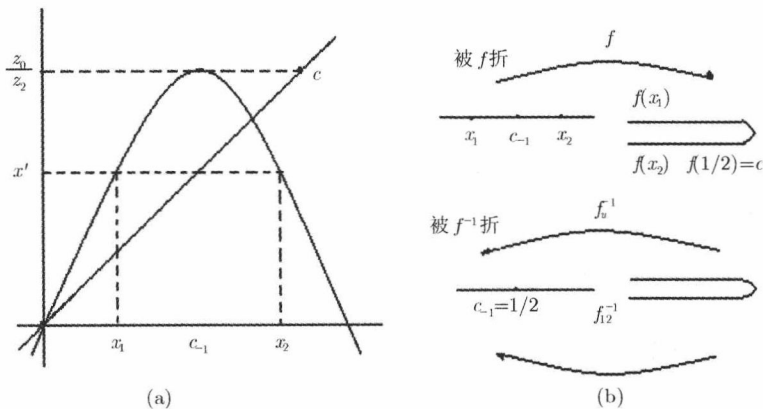


图 1.6 logistic型映射关键点和区间线段的折和开折

一般地, 实直线上连通集合 S (一维区间线段) 的象与前象有下面三种情况:

- (1) 如果 $S \cap C_{-1} = \emptyset$, 则 $\partial f(S) = f(\partial S)$, 这里 ∂S 是集合 S 的边界.
- (2) 如果 $S \cap C_{-1} \neq \emptyset$ 且仅包含 C_{-1} 中的一个点 c_{-1} , 则 $f(S)$ 在 c 处被折起, 并且 $f(S)$ 的边界 $\partial f(S)$ 一个为 c , 另一个为 $f(\partial S)$ 的一个点.
- (3) 如果 $S \cap C_{-1} \neq \emptyset$ 且包含 C_{-1} 中的几个点, $f(S)$ 在这些关键点处被折起, 并且 $f(S)$ 的

边界 $\partial f(S)$ 可能包含一个或两个关键点,也可能不包含关键点.

连通集合 S (一维区间)的前象随着 f 的逆映射 f^{-1} 的确定而确定,因为 Z_i^α 是不相连的开集,因此集合 S 的前象是有限区间的并集.

$$f^{-1}(S) = \bigcup_{\alpha} \bigcup_i \bigcup_j (f_{i,j}^{-1,\alpha}(\bar{Z}_i^\alpha \cap S)).$$

因为 $\bar{R}_{i,j}^\alpha$ 的内部为不相连区间,所以 $f_{i,j}^{-1,\alpha}(\bar{Z}_i^\alpha \cap S)$ 的内部也是不相连的区间. 由于 f 是连续的,如果 S 是一个闭集,则 $f^{-1}(S)$ 也是一个闭集. 假设 f 没有水平渐近线,如果 S 是一个有界集,则 $f^{-1}(S)$ 也是一个有界集. 如果 S 由关键点界定,则前象 $f_{i,j}^{-1,\alpha}(\bar{Z}_i^\alpha \cap S)$ 分为两部分:一部分是以关键点($\bar{Z}_i^\alpha \cap S$ 的点的秩-1前象)为边界的一些区间,另一部分是以额外前象点为边界的区间(图1.7).

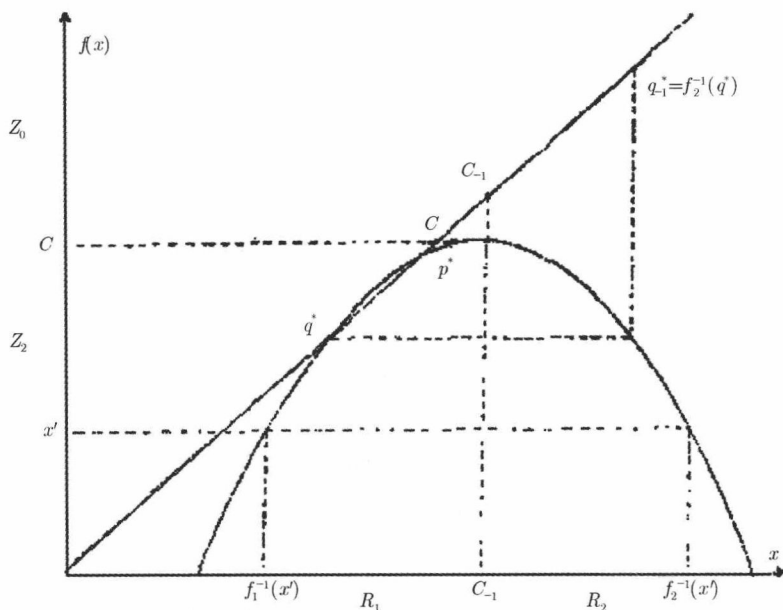


图 1.7 单极值映射的两个逆映射的定义域和值域由关键点和秩-1前象界定

1.4 单极值映射的分叉及其“内嵌盒子”的分形结构

1.4.1 单极值映射基本分叉和性质

有单极值点的不可逆映射被称为单极值映射, logistic映射是这类映射的一个代表

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) \quad \text{或} \quad x' = f(x, \lambda), \quad (1.4.1)$$

这里 $f(x, \lambda)$ 是光滑映射, 假设 $f(x, \lambda)$ 最多只有一个有限极值点, 有时省略参数 λ 记为 $f(x)$.

对于由(1.4.1)定义的映射 f , 当参数 λ 变化时发生下面两种局部分叉:

$$\emptyset \leftrightarrow \text{吸引}k\text{环} + \text{排斥}k\text{环} \quad (1.4.2)$$

$$\text{吸引}k \cdot 2^i \text{环} \leftrightarrow \text{排斥}k \cdot 2^i \text{环} + \text{吸引}k \cdot 2^{i+1} \text{环} \quad (1.4.3)$$

这里 $\emptyset$ 表示没有任意阶环存在, k 是环相应的阶(周期). 当吸引和排斥环特征乘数为 $S = 1$ 时, 发生两个环合并的分叉(1.4.2)被称为fold分叉(也称为鞍结分叉). 当 $k2^i$ 环的特征乘数为 $S = -1$ 发生的分叉(1.4.3)被称为flip分叉(也称为倍周期分叉).

由(1.4.1)定义的映射 f (图1.7)可能有两个不动点 p^* 和 q^* . q^* 是一个排斥不动点, 其特征值为 $S > 1$. p^* 的特征值 $S < 1$, 在 $S = -1$ 发生flip分叉产生倍周期环. $c = f(c_{-1})$ 是函数 f 的秩-1关键点. c_{-1} 是函数 $f(x)$ 极值点, c_{-1} 将 $\mathbb{R}$ 分成不相交的两个开区间 R_1 和 R_2 , $\mathbb{R} = \bar{R}_1 \cup \bar{R}_2$, $c_{-1} = \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2$. 唯一的关键点 c 将 $\mathbb{R}$ 分成不相交的两个开区间 Z_0 和 Z_2 , Z_0 的点无前象, Z_2 的点有两个秩-1前象 $f_1^{-1}(x') \in R_1$ 和 $f_2^{-1}(x') \in R_2$. 映射 $f(x)$ 有两个逆映射

$$f_1^{-1}: \bar{Z}_2 \rightarrow \bar{R}_1 = (-\infty, c_{-1}); \quad f_2^{-1}: \bar{Z}_2 \rightarrow \bar{R}_2 = (c_{-1}, +\infty)$$

关键点 c 有两个一致的一阶前象 $f_1^{-1}(c) = f_2^{-1}(c) = c_{-1}$. 它的象 $c_k = f^{k+1}(c_{-1})$, $k > 0$ 被称为秩 $-k + 1$ 的关键点. 下面记由 c_i 和 c_j 界定的区间为 (c_i, c_j) . 如图1.7所示, 由于 c_i 满足 $c > c_1 > c_2 > c_3 > \cdots > c_k > \cdots$ 并且 $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = p^*$, 因此 $f((c, c_1)) = (c_1, c_2) \not\subset (c, c_1)$, 称区间 (c, c_1) 为非吸收区间. 一般地, 有下面定义:

定义 1.14 如果一个区间 I 满足下面条件:

- (1) 其边界由关键点组成;
- (2) $f(I) \subset I$;
- (3) I 严格包含在某一吸引子 A 的吸引域 $\mathcal{B}(A)$ 中,

则称区间 I 是吸收区间.

定义 1.15 如果(1) 在 I 中至多存在一个吸引集 A ;

- (2) $\mathcal{A} = \bigcap_{k \geq 0} f^k(I)$,

则称吸收区间 I 是严格意义的吸收区间.

定义 1.16 如果 k 个区间的集合 $I(k) = \{I_1, \cdots, I_k\}$ 满足下面条件:

- (1) 每一个区间的边界由关键点组成;
- (2) $f(I_1) = I_2, \cdots, f(I_{k-1}) = I_k, f(I_k) \subset I_1$;
- (3) 每一个 $I_j, j = \cdots, k$ 是 f^k 的吸收区间,

则称 $I(k)$ 是周期为 k 的吸收线段.

下面以Myrberg映射

$$f(x, \lambda) = x^2 - \lambda \quad (1.4.4)$$

为例说明一些基本分叉的定义 [109]. 函数(1.4.4)有一个极值点 $c_{-1} = 0$, 参数变化使得函数图形在平面 oxo' 内垂直平移. 当 $\lambda = \lambda_{(1)0} = -1/4$ 时, fold分叉(1.4.2)发生(图1.8(a)), 也称为切分叉. 当 $\lambda > -1/4$ 时, 函数(1.4.4)有两个不动点 q_1 和 q_2 :

$$x(q_1) = 1/2 + (1/4 + \lambda)^{1/2}, \quad x(q_2) = 1/2 - (1/4 + \lambda)^{1/2}$$

其特征乘数为 $S = 2x(q_i), i = 1, 2$. 对于任意 λ , q_1 始终是一个排斥子. 而当 $-1/4 < \lambda < 3/4$ 时, q_2 是一个吸引子, 当 $\lambda > 3/4$ 时, q_2 是一个排斥子. q_2 的特征乘数随 λ 增加而减小.