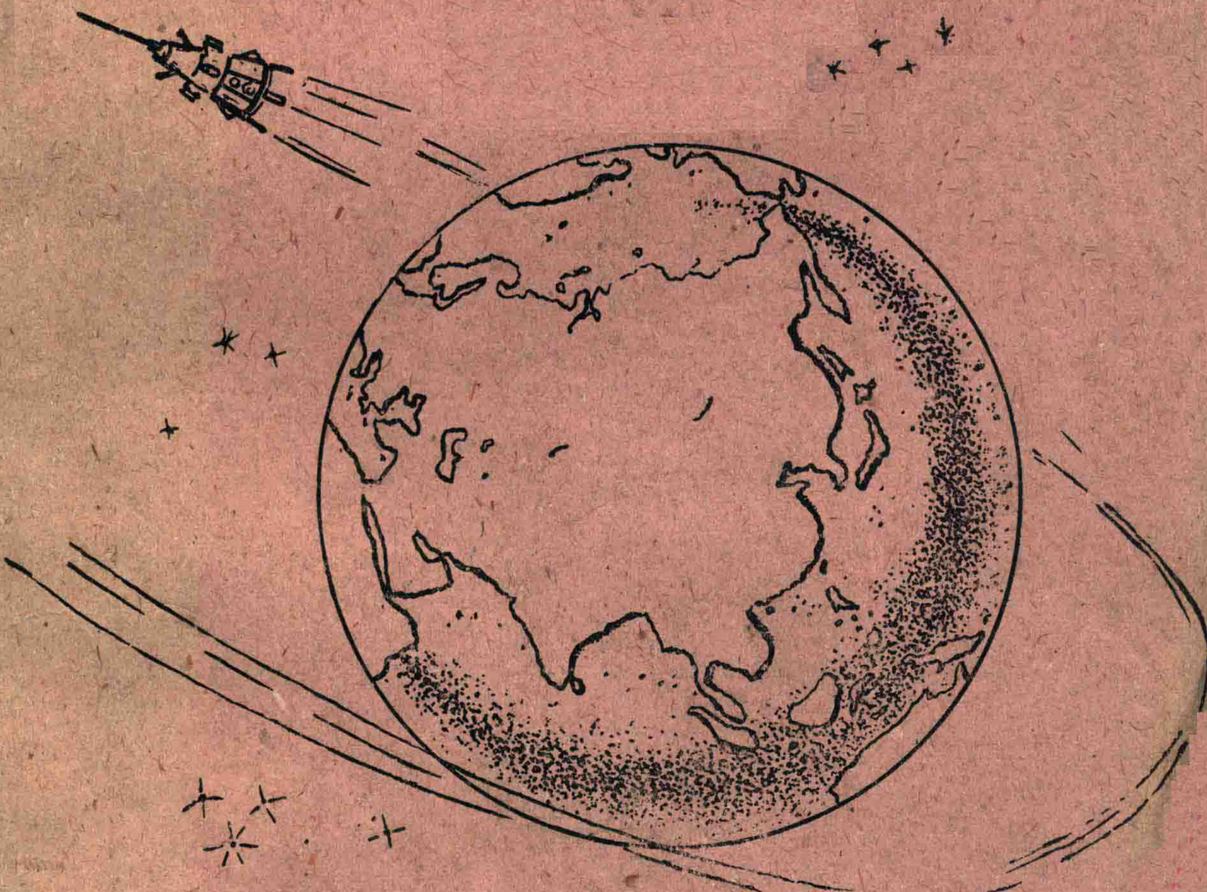
# 理論力学習題集

·中 册·

运 动 学



清華大學

理論力学教研組編

1958★北京

# 点的運動学

(1) 點的運动學的任務，就是根據已給定的運动條件，求出點在所選定的參考座標系中的軌跡，以及每瞬時點的位置，速度與加速度。决定點運动的方法，最常用的有下面兩種：

i) 直角座標法：根據已知的運动條件和幾何條件，建立點在直角座標中的運动方程式，從這些方程式中消去時間就可得出點的軌跡方程式。點的速度與加速度在座標軸上投影，等於點的座標對時間的一次與二次導數，即：

$$v_x=\frac{dx}{dt}; \qquad v_y=\frac{dy}{dt}; \qquad v_z=\frac{dz}{dt}。$$

$$w_x=\frac{d^2x}{dt^2}; \qquad w_y=\frac{d^2y}{dt^2}; \qquad w_z=\frac{d^2z}{dt^2}。$$

由此即可求出點的速度與加速度的大小與方向。

ii) 自然法：在點的軌跡已知情況下，可以應用自然法確定點的運动，在已知軌跡上建立弧座標，根據已知的運动條件與幾何條件，寫出點沿軌跡的運动規律 $s=f(t)$，點的速度與加速度在自然座標軸上投影分別等於：

$$v=\frac{ds}{dt}; \qquad w_\tau=\frac{d^2s}{dt^2}; \qquad w_n=\frac{v^2}{\rho}。$$

點的切綫加速度是描寫點速度大小的改變，它僅决定於點沿軌跡的運动規律，而與軌跡形狀無關，點的法綫加速度是描寫點速度方向的改變，因此它的大小與軌跡的形狀有關。

在點的運动方程式，或點沿已知軌跡的運动規律已給定情况下，應善於從方程式中觀察判斷點運动的性質。

(2) 在實際問題中，有時衹能測出某些特定瞬時點運动的情形，因此難以用函數形式表示點的運动與時間的關系，這時必須用圖解法來確定點的運动，利用測得數據作出點的運动圖，速度圖與加速度圖。從這些圖上可以很清楚的看出點運动的性質。

(3) 點的速度端圖是描寫點速度的變化規律，點的加速度可以用速度端圖上端點的“速度”來表示。

(4) 利用點的直角座標的運动方程式，可以求出點的速度與加速度。點的速度與加速度所在的平面就是點的軌跡在此位置的密切面。加速度在速度方向的投影就是點的切綫加速度。加速度在垂直於速度方向的投影就是點的法綫加速度。

點的軌跡在某點的曲率半徑可由點在該位置的速度與法綫加速度來求得，即：

$$\rho=\frac{v^2}{w_n}。$$

**1.** 已知點按下列運动方程式而運动：

1) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=4t^2 \end{cases}$。 2) $\begin{cases} x=4t-2t^2 \\ y=3t-1.5t^2 \end{cases}$。

3） $\begin{cases} x=a\cos kt \\ y=a\sin kt。\end{cases}$ （其中 $t$ 以秒計，$x$，$y$ 以公分計）

畫出其軌跡，並求點沿軌跡的運動規律。

**2.** 點在運动時畫出李薩茹圖，其方程式爲 $x=3\sin t$；$y=2\cos 2t$（$t$ 以秒計）。求軌跡方程式，畫出軌跡的圖，並指出在不同瞬時點的運動方向。又求在開始運動後第一次和 $Ox$ 軸相交的時間。

**3.** 已知曲柄銷的運动方程式爲：

$$x=15\sin\frac{\pi}{4}t;\qquad y=15\cos\frac{\pi}{4}t。$$

（$x$，$y$ 以公分計，$t$ 以秒計）。當曲柄銷在座標軸上時，求其速度在座標軸上的投影，並求速度端圖的方程式。

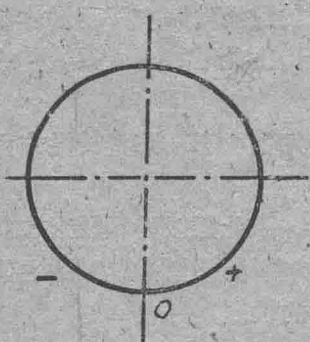
**4.** 有三个點沿着半徑爲 5 公分的同一圓周由同一點 $O$ 出發運动，它們的運动規律分別爲 $S=2t$；$S=t^2$；$S=4\sin\frac{\pi t}{4}$。

（$t$ 以秒計，$S$ 以公分計）

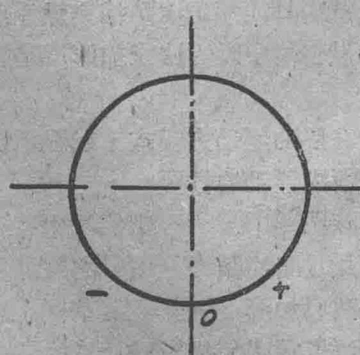
1） 求出它們每瞬時的速度，加速度。

2） 在同一个座標系上，畫出它們的運动圖。並指明在什麼時候這三點相遇。

3） 求當 $t=8$ 秒時，它們與弧坐標原點的距離。



題 4



題 5

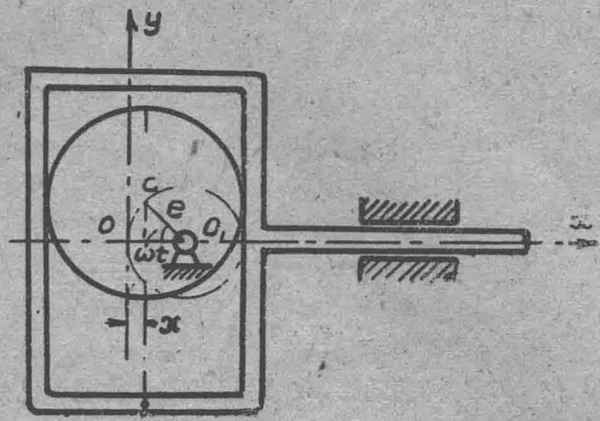
**5.** 點沿半徑 $r=20$ 公分的圓周運动。它的運动規律爲 $S=10\pi\cos\frac{\pi}{5}t$。（$t$ 以秒計，$S$ 以公分計）。

1） 說明點運动的性質。並求出其週期 $T$。

2） 作出點的運动圖。指出在那些時刻动點到原點的距離爲零。在那些時刻动點改變運动方向。

3） 求 $t=\frac{5}{3}$ 秒時點的速度與加速度。

**6.** 已知壓力機的圓偏心之外框的運动方程式爲 $x=e(1-\cos\omega t)$，其中 $x$ 以公分計，$t$ 以秒計，$e$ 表示偏心率，$\omega$ 表示偏心輪的角速度（$e$ 與 $\omega$ 是常數）。求 1）在瞬時 $t=0$ 以後改變運动方向的最初兩个瞬時；2）速度到達最大值時的最初瞬時；3）運动的週期



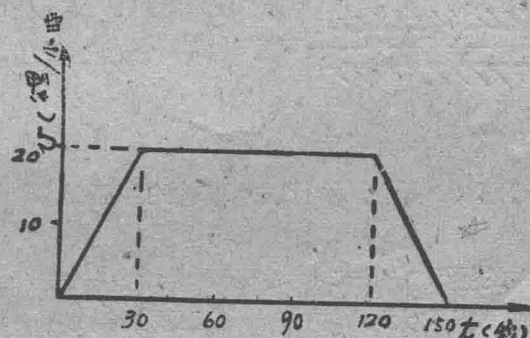

題 6

7. 電車自甲站開至乙站，需時 150 秒。電車之速度圖如下所示，求：

1) 甲乙兩站間的距離；

2) 作電車的運动圖和加速度圖。

答： 1) $S=0.66$ 公里




題 7

8. 飛機在起飛滑跑時爲等加速直綫運动，已知在各不同瞬時飛機所走过的路程 $S$ 如下表所示：

| $t$（秒） | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$（公尺） | 2 | 8 | 18 | 32 | 50 | 205 | 450 | 810 | 1250 |

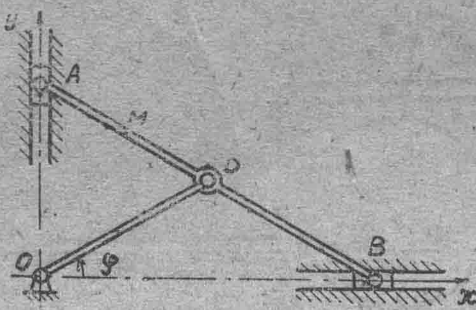
試畫出運动圖並求當 $t=20$ 秒時飛機之速度。

答： $V=80$ 公尺/秒

9. 椭圓規尺的機構如圖所示， 曲柄 $OD$ 以 $\omega=\pi$ 1/秒的角速度繞 $O$ 軸轉动 。已知 $OD=AD=DB=20$ 公分。$AM=10$ 公分。起始時 $OD$ 在水平位置。

1) 寫出 $M$ 點的運动方程式及軌跡方程式。

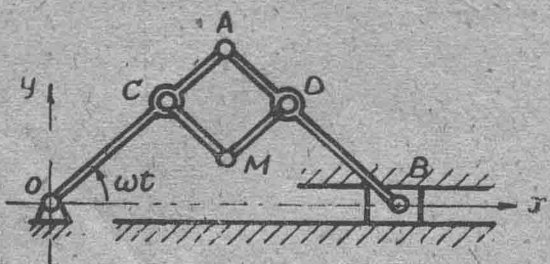
2) 求當 $t=\frac{1}{2}$ 秒時及 $t=2$ 秒時 $M$ 點的速度，加速度及軌跡在這點的曲率半徑。



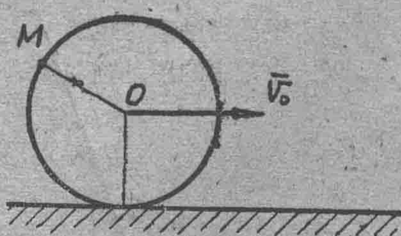

題 9

**10.** 圖示爲一曲綫規，當 $OA$ 桿轉动時 $M$ 點即畫出一曲綫。已知 $OA=AB=l$，$CM=DM=AC=AD=a$。

試求當 $OA$ 以等角速度 $\omega$ 轉动時 $M$ 點的運动方程式及 $M$ 所描出的曲綫方程式。




題 10




題 11

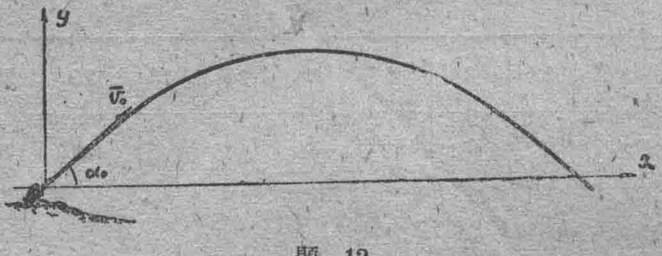
**11.** 機車沿直綫軌道以等速 20 公尺/秒行駛。車輪的半徑爲 $R=1$ 公尺。如車輪只滚动而不滑动求：

1） 輪緣上一點 $M$ 的運动方程式

2） 每一瞬時 $M$ 點速度的大小與方向。作出速度端圖。

3） 每一瞬時 $M$ 點加速度的大小與方向。

4） 每一瞬時軌跡的曲率半徑 $\rho$。




題 12

**12.** 海岸砲砲彈運动方程式爲：

$$\begin{cases} x=at \\ y=at-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$ （$x$，$y$ 以公尺計，$t$ 以秒計）

求：1）砲彈射出時的初速度 $v_0$ 及傾角 $\alpha_0$。

2）畫出砲彈之速度端圖。

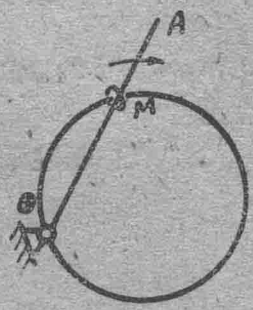
3）求砲彈在發射處及最高點的加速度及在該處軌跡的曲率半徑。

**13.** 自飛機上扔下之炸彈按下列方程式運動：$x=40\,t$，$y=4.9\,t^2$（$x$，$y$ 以公尺計，$t$ 以秒計）。將炸彈扔出之點取作座標的原點，$Ox$ 軸定爲水平，$Oy$ 軸鉛垂向下。如飛機飛行高度 $h=3000$ 公尺，求炸彈的軌跡方程式，並求炸彈的墮落時間及其水平射程。

答：　$y=0.00306\,x^2$；　$t=24.74$ 秒；　$L=989.6$ 公尺。

**14.** 列車的初速度爲 54 公里/小時，在最初的 30 秒內走了 600 公尺。設列車在半徑 $R=1$ 公里的圓弧上作等變速運動，求其在第 30 秒末的速度與加速度。

答：$v=25$ 公尺/秒；　$w=0.708$ 公尺/秒$^2$。




題 15

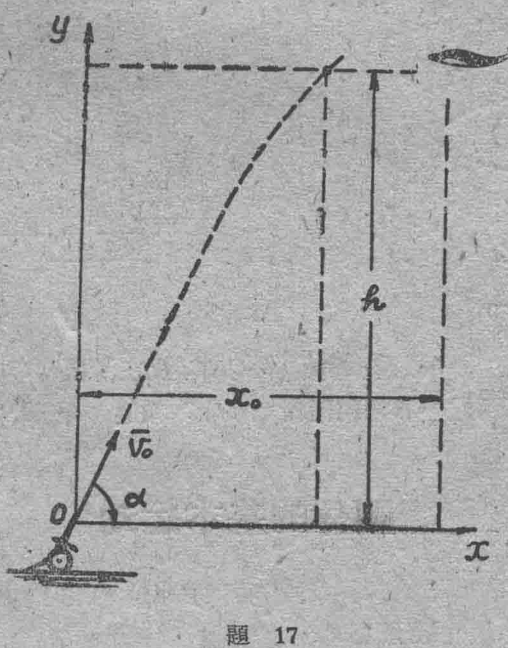
**15.** 在半徑爲 10 公分的鐵圈上，套一小環 $M$；有桿 $OA$ 穿過小環 $M$，並繞鐵圈上一點 $O$ 等速轉動，其角速度相當於在 5 秒內轉一直角。求小環的速度 $v$ 與加速度 $w$。

**16.** 掛在彈簧上的重物作直綫簡諧運動。如 1）當 $t=0$ 時，$x_0=0$，　$v_0=62.8$ 公分/秒；2）每分鐘的振動數爲 120 次；求重物的運動方程式，並畫出重物的運動圖及速度圖。

**17.** 敵機作等速水平飛行，其速度爲 $v$，當它飛至距離我軍高射砲陣地 $x_0$ 處時，高射砲向敵機射擊，已知砲彈之運動方程式爲：

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha t \\ y=v_0\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$v_0$ 爲砲彈之初速。問若擊中敵機，發射角 $\alpha$ 與飛機高度 $h$ 應滿足什麼關系。




題 17

**18.** 已知點以極坐標表示的運動方程式爲：

$$\begin{cases} r=ae^{kt} \\ \varphi=kt。\end{cases}$$

其中 $a$, $k$ 均爲常數。試畫出點運动的軌跡，寫出其軌跡方程式，並求在起始瞬時點的速度，加速度，及軌跡在該點的曲率半徑。

**19.** 已知點以極坐標表示的運动方程式爲：

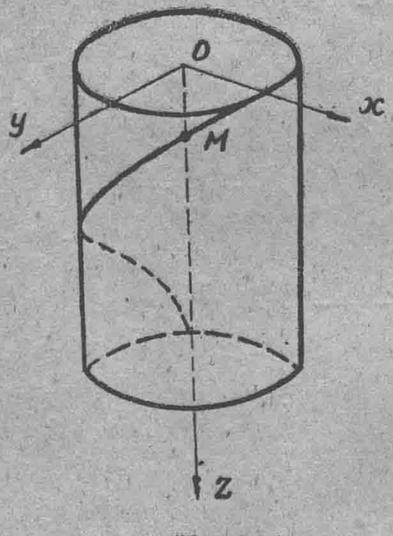
$$\begin{cases} r=\mu t \\ \varphi=\omega t \end{cases}$$

其中 $\mu$ 及 $\omega$ 均爲常數。試畫出點運动的軌跡，寫出其軌跡方程式，並求起始瞬時點的速度及加速度。

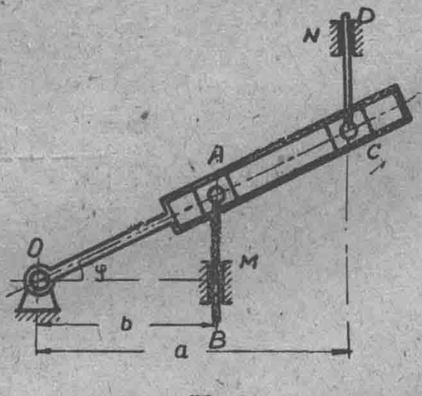
**20.** 點在圓柱面上的運动方程式爲：

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}\qquad (t \text{ 以秒計，} x,\ y,\ z \text{ 以公分計})$$

其中 $a$, $\omega$, $g$ 均爲常數。試畫出點的速度端圖，並求起始瞬時密切面的位置及此瞬時軌跡的曲率半徑。




題 20




題 21

**21.** 數學機械中應用的乘子機構，由擺桿 $OAC$ 及在滑槽 $M,N$ 中滑动的桿 $AB,CD$ 構成，桿 $AB,CD$ 在 $A,C$ 兩點各和槽內兩滑塊 $A,C$ 相連。今 $AB$ 桿輸入位移 $S=f(t)$，求 $CD$ 桿輸出的位移。

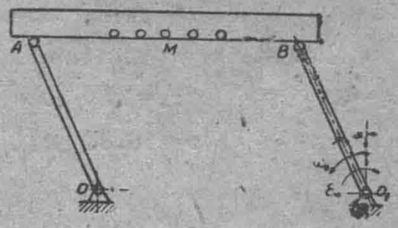
## 剛体的基本运动

(1) 移动剛體上各點的軌跡形狀，每瞬時的速度與加速度都相同，因此如剛體上某點的運动已經確定，則剛體的運动就完全確定。

(2) 繞定軸轉动剛體每瞬時位置，可用其轉角 $\phi$ 表示，剛體的角速度是剛體轉动快慢的度量，即 $\omega=\frac{d\phi}{dt}$。剛體的角加速度是速度改變快慢的度量，即 $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$。剛體上各點速度與加速度的大小與該點到轉动軸的距離成正比。即：

$$v=R\omega\text{；}\qquad w=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$$

(3) 輪系傳动時，利用兩輪接觸點的速度與切向加速度相等，即可求出從动輪的角速度與角加速度。

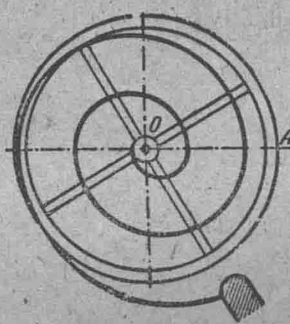



題 22

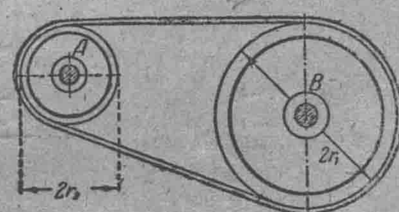
**22.** 在輸送散粒的擺动式運輸機中，$OO_1=AB$，$OA=O_1B=l$，如某瞬時曲柄 $O_1B$ 與鉛垂綫成 $\alpha$ 角，且該瞬時其角速度與加速度分別為 $\omega_0$ 及 $\varepsilon_0$，(方向如圖)。試求輸送槽上顆粒 $M$ 的速度與加速度，設該瞬時顆粒是附着在槽上。

**23.** 鐘表擺盤作週期為 $T=\frac{1}{2}$ 秒的簡諧扭轉擺动。擺动邊緣上一點離開其平衡位置最大的角偏度為 $\alpha=\frac{\pi}{2}$弧度。求自平衡位置開始運动後 2 秒時擺盤的角速度與角加速度。

答： $\omega=2\pi^2$ 1/秒；$\varepsilon=0$。




題 23

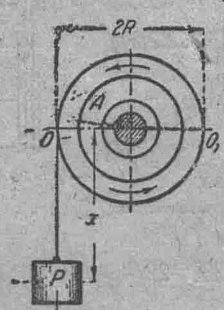



題 24

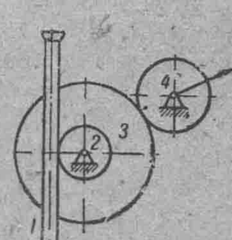
**24.** 具有皮帶輪 $A$ 的發電機由蒸氣機的皮帶輪上的皮帶而帶动。兩皮帶輪的半徑分別為：$r_1=75$ 公分，$r_2=30$ 公分。當蒸氣機開动後，其角加速度為 $0.4\pi$ 1/秒$^2$。如不計皮帶輪與皮帶間之滑动，問經多少秒後發電機作 300 轉/分鐘的轉动？

答： 10 秒。

**25.** 半徑為 $R=10$ 公分的軸 $A$ 由用綫掛在其上的重錘帶动而轉动。重錘的運动由方程式 $x=100t^2$ 表示，其中 $x$ 為重錘到水平綫 $OO_1$ 的距離，以公分計，$t$ 以秒計。求該軸的角速度 $\omega$ 與角加速度 $\varepsilon$，並求在瞬時 $t$，該軸表面上一點的全加速度。




題 25

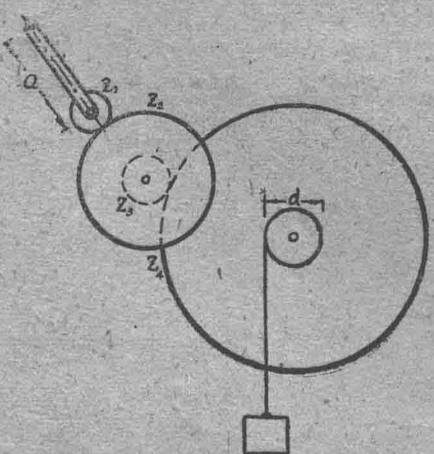


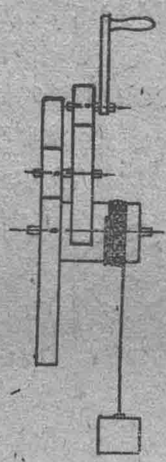

題 26

**26**．如圖所示之指針指示器機構中，齒條 1 帶动齒輪 2，在齒輪 2 之軸上裝一與齒輪 4 相嚙合的齒輪 3。齒輪 4 上帶有一指針。如已知齒條的運动方程式爲 $x=a\sin kt$，且各齒輪的半徑分別爲 $r_2$、$r_3$ 與 $r_4$。求指針的角速度和轉动方程式。

**27**．如圖所示的絞車機構中，把柄 $a$ 長爲 400 公厘，當其轉动時，重物 $P$ 作鉛垂方向之移动。由於制动機構故障的緣故，重物突然地開始下降。重物的運动方程式爲：$x=5t^2$ 公分（$t$ 以秒計），$ox$ 軸沿繩索而向下。鼓輪直徑 $d=200$ 公厘。絞車機構的齒數爲：$z_1=13$，$z_2=39$，$z_3=11$，$z_4=77$。求把柄在開始運动後經过兩秒鐘其頂端的速度與加速度。

答： $v=16.80$ 公尺/秒；$w=705.60$ 公尺/秒$^2$。

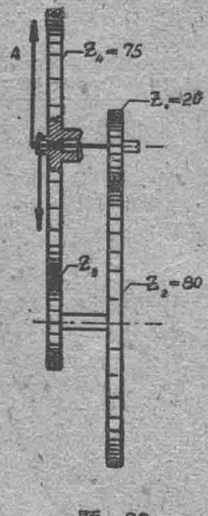


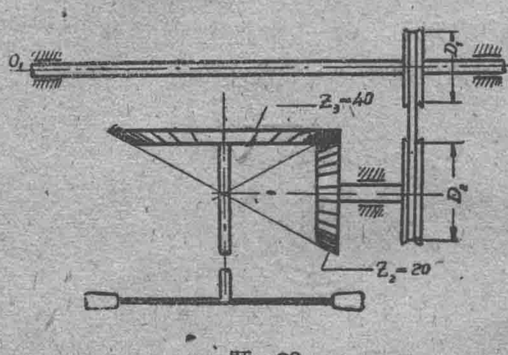
題 27

**28**．時鐘內由分針 $A$ 到時針的齒輪傳动機構是由四個齒輪所組成，其齒數各爲：$z_1=20$，$z_2=80$，$z_4=75$，求齒輪 $III$ 的齒數。

答：$z_3=25$




題 28



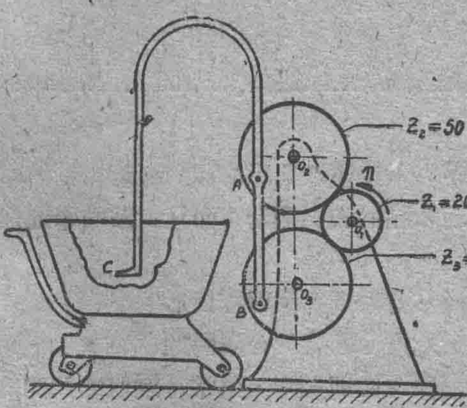

題 29

**29**．求攪拌機中葉槳之轉动角速度 $\omega$。如傳送軸 $O_1$ 的迴轉速度爲 $n_1=200$ 轉/分，皮

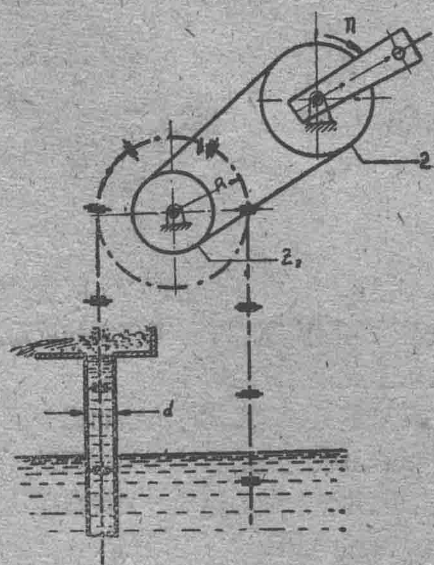
帶輪的直徑爲：$D_1=40$ 公分，$D_2=50$ 公分；錐面齒輪 2 與 3 的齒數爲：$Z_2=20$，$Z_3=40$。

答： $\omega=\frac{8}{3}\pi$ 1/秒。

**30**. 攪拌機由主动軸 $O_1$ 同時帶动齒輪 $O_2$，$O_3$ 轉动，攪棍 $ABC$ 用銷釘 $A$，$B$ 和 $O_2$，$O_3$ 輪相連，若已知主动輪轉动角速度爲 $n=950$ 轉/分，$AB=O_2O_3$，$O_2A=O_3B=25$ 公分，各輪之齒數如圖所示。求攪桿端點 $C$ 的速度及軌跡。




題 30

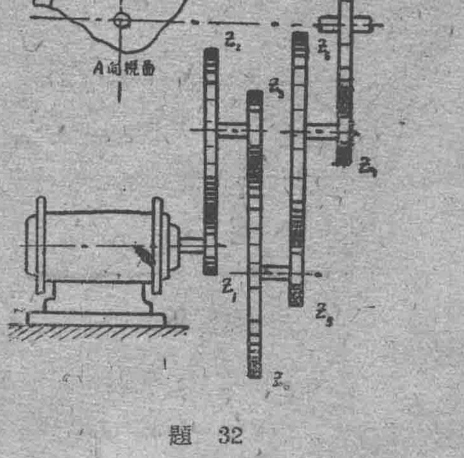



題 31

**31**. 圖示爲河南省修武縣懷鳳鄉星火農業社利用解放式水車改裝之手搖水車，若已知 $Z_1=12$，$Z_2=8$，$R=0.5$ 公尺，$d=7.5$ 公分（圓形管），$n=50$ 轉/分，求每小時出水多少噸。（水的重度爲 1 噸/米$^3$）

**32**. 已知龍門鉋床切削速度 $v=10$ 公尺/分，傳动齒輪的齒數爲：$Z_1=15, Z_2=47, Z_3=22, Z_4=58$, $Z_5=18$, $Z_6=58$, $Z_7=14$, $Z_8=46$, 齒輪 8 的直徑 $D_8=50$ 公分，試求電动機轉速。

$n=334$ 轉/分。




題 32

# 点的复合运动(一)

(1) 點的較複雜的運动,可以分解爲跟隨着动座標系的運动及相對於动座標系的運动來研究。
(2) 點的絕對速度等於其牽連速度與相對速度的幾何和,即:

$$\bar{v}_a=\bar{v}_e+\bar{v}_r \cdots\cdots(1)$$

或用與其相當的投影式表示:

$$\left.\begin{aligned} v_{ax}&=v_{ex}+v_{rx}\\ v_{ay}&=v_{ey}+v_{ry}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2)$$

在應用速度合成定理時,所選取的动座標系應使牽連運动與點的相對運动比較簡單。在解決具體問題時,必須仔細分析动座標系的運动和點的相對運动。而且對點的牽連速度的概念要有很好的理解。

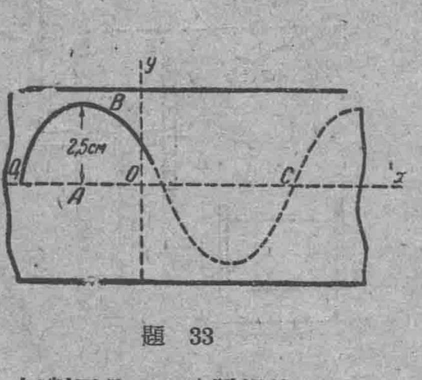
(3) 在應用速度合成定理解決點的複合運动問題時,通常會碰到下列兩種情形:

i) 給出牽連運动和點的相對運动,要求點的絕對速度(速度的合成問題)。

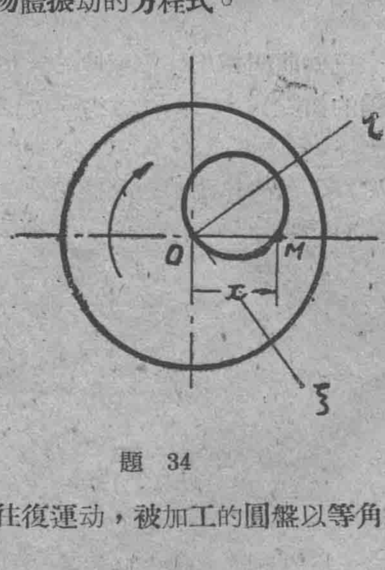
ii) 已知主动件的運动,要找出從动件的運动,解決這類問題時,通常是選取它們間的連接點作爲所考慮的动點,再把此點的運动分解,分解時應很明確知道动座標系的運动和點的相對運动的軌跡。和利用已知條件求出點的絕對速度或牽連速度,從而了解從动件的運动(速度的分解問題)。

(4) 在分析問題時,應首先弄清楚問題是屬於上述的那種情形,然後利用(2)式或畫出由(1)式所决定的速度向量三角形,從方程式或向量圖中求出未知量。

**33**. 記錄振动所用之儀器的卷帶以 2 公尺/秒之速度沿 $Ox$ 方向運动。沿 $Oy$ 方向而振动的物體在卷帶上畫出正弦曲綫,其最大的座標爲 $AB=2.5$ 公分,而長度 $O_1C=8$ 公分。設此正弦曲綫上的 $O_1$ 點相當於 $t=0$ 時物體的位置,求物體振动的方程式。



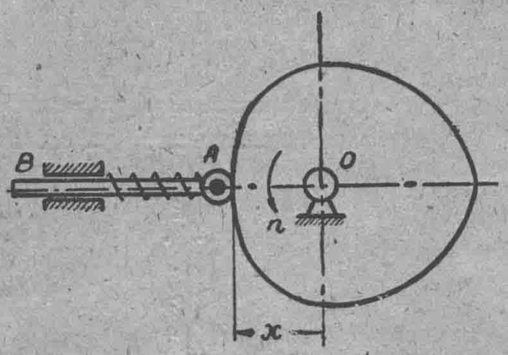

題 33



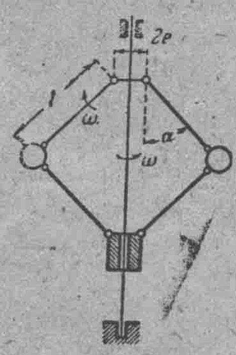

題 34

**34**. 切削刀具 $M$ 按照規律 $x=a\sin\omega t$ 作橫向的往復運动,被加工的圓盤以等角速度 $\omega$ 繞 $O$ 軸轉动,求刀具的圓盤上所切削出來的曲綫。

**35.** 凸輪使桿 $AB$ 作等速的往復移动，桿的運动方程式爲：當凸輪轉角從 $O$ 至 $\pi$ 時，$x=5t+30$，當轉角從 $\pi$ 至 $2\pi$ 時，$x=-5t+70$（$x$ 以公分計，$t$ 以秒計）。凸輪的轉速爲 $n=7.5$ 轉/分，求凸輪輪廓曲綫的方程式。




題 35

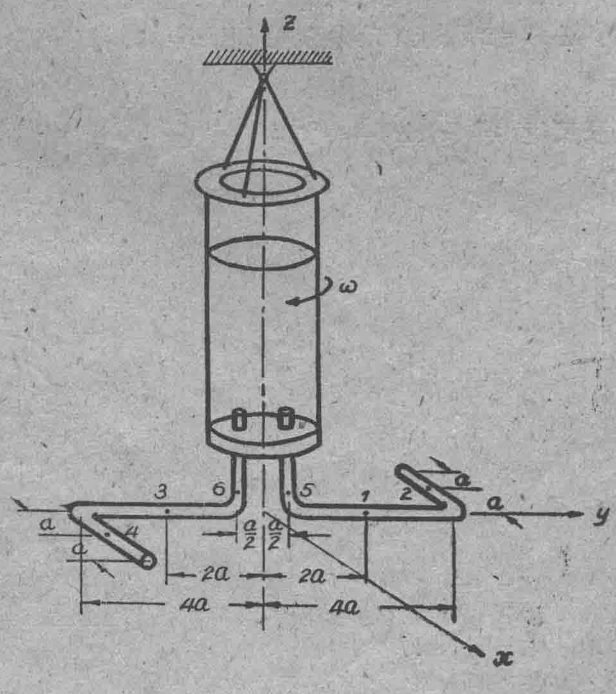



題 36

**36.** 瓦特離心調速器以角速度 10 1/秒繞鉛垂軸轉动，由於機器負荷的變化，調速器重球離開轉动軸，並在該位置時球柄的角速度 $\omega_1=1.2$ 1/秒。如球柄長 $l=50$ 公分，球柄所懸掛之軸間的距離 $2e=10$ 公分，又球柄與調速器軸所成交角 $\alpha=30°$，求調速器重球的絕對速度。

答： $v=306$ 公分/秒。

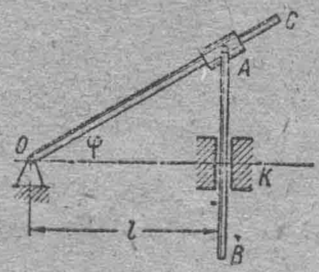
**37.** 如圖示的反衝輪以角速度 $\omega$ 繞 $z$ 軸轉动，其轉动方向與彎管所排出的水流方向相反，如水點在彎管內的相對速度爲 $u$，求在圖示的 1、2、3、4、5、6 處水點的絕對速度。



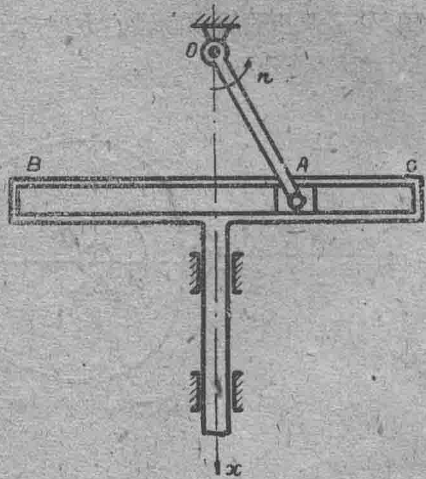

題 37

**38.** 在滑道搖桿機構中，當曲柄 $OC$ 繞垂直於圖面的軸 $O$ 而擺动時，滑塊 $A$ 在曲柄 $OC$

上移动並帶动在鉛垂導板 $K$ 中運动之桿 $AB$，距離 $OK=l$。求滑塊 $A$ 對曲柄 $OC$ 的相對速度，以曲柄之角速度 $\omega$ 與轉角 $\varphi$ 的函數表示之。




題 38



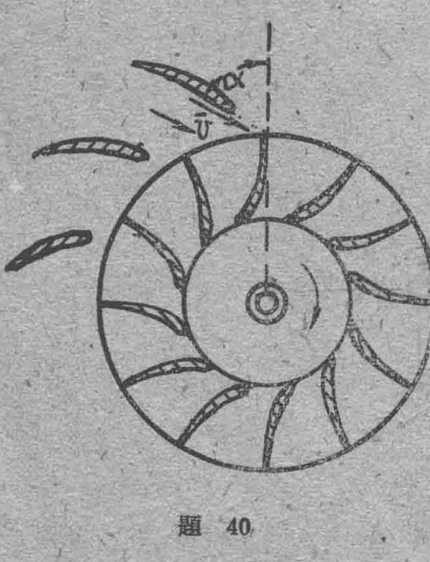

題 39

**39.** 曲柄滑道搖桿機構具有作移动之滑道搖桿 $BC$，曲柄 $OA$ 長 200 公厘，以相當於 $n=90$ 轉/分鐘的等角速度轉动。曲柄一端 $A$ 用銷子與在搖桿槽中滑动的滑塊相連，以帶动搖桿作往返運动。求當曲柄與搖桿之軸成交角 $xOA=30°$ 時，搖桿的速度 $v$。

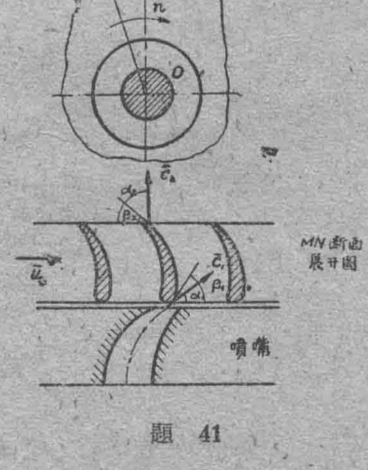
答： $v=0.942$ 公尺/秒。

**40.** 在水渦輪中，水自導流片進入动輪，爲避免水入口處水的衝擊，輪翼應作恰當的按裝，使水的相對速度 $v_r$ 與翼面相切。如水在入口時的絕對速度爲 $v=15$ 公尺/秒並與半徑成交角 $\alpha=60°$；入口處的半徑 $R=2$ 公尺，动輪的角速度 $n=30$ 轉/分鐘，求在动輪外緣上水的相對速度。

答： $v_r=10.06$ 公尺/秒； $(\widehat{v_r, R})=41°50'$




題 40




題 41

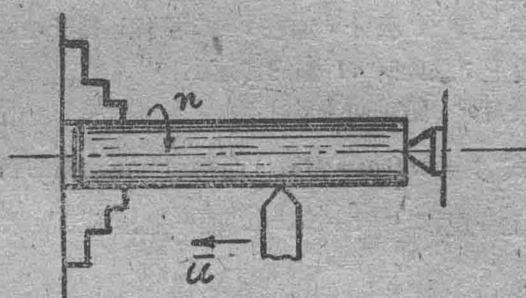
41．航空用的燃氣輪中，已知從噴嘴噴出氣體的絕對速度 $C_1=650$ 公尺/秒，葉片的平均直徑 $D=0.60$ 公尺，葉片的進氣角 $\beta_1$ 與排氣角 $\beta_2$ 大小相等，氣體流經葉片時的相對速度大小保持不變，葉片的圓周速度 $u=\frac{\pi Dn}{60}$ 公尺/秒，$n=9000$ 轉/分，爲了能使氣體離開葉片時沿着軸向流出（即 $\alpha_2=90°$），問噴嘴與切向的夾角 $\alpha_1$ 等於多少？並求角 $\beta_1$ 與 $\beta_2$ 的大小及噴出氣體的絕對速度 $C_2$。

答： $\alpha_1=29°30'$；$\beta_1=\beta_2=48°40'$；$C_2=320$ 公尺/秒。

42．輪船朝東南方向航行，當航速爲每小時 $a$ 浬時，船上風標指向正東，而當航速爲每小時 $a/2$ 浬時，風標指向東北。求實際風速及風向。

43．欲在車床上車一螺釘，工作物的直徑爲 20 公厘，車床主軸的轉速 $n=180$ 轉/分，刀子横向走刀的速度 $u=$常數，試証明車刀在工作物上切出一螺旋綫，如欲使螺距爲 2.5 公厘，問 $u$ 應爲多少。

答： $u=7.5$ 公厘/秒




題 43

## 点的复合运动（二）

（1）當牽連運动爲移动時，點的絕對加速度等於其牽連加速度與相對加速度的幾何和，即：

$$\overline{w_a}=\overline{w_e}+\overline{w_r}$$

或
$$\overline{w_a}=\overline{w_{e\tau}}+\overline{w_{en}}+\overline{w_{r\tau}}+\overline{w_{rn}} \quad\cdots\cdots(1)$$

常見的運动機構是平面機構，故加速度向量都分佈在同一平面內，此時（1）式可寫成與其相當的兩投影式：

$$\left.\begin{aligned} w_{ax}&=w_{e\tau x}+w_{enx}+w_{r\tau x}+w_{rnx}\\ w_{ay}&=w_{e\tau y}+w_{eny}+w_{r\tau y}+w_{rny}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

當牽連運动爲繞定軸轉动時，點的絕對加速度等於其牽連加速度，相對加速度與哥氏加速度的幾何和，即：

$$\overline{w_a}=\overline{w_e}+\overline{w_r}+\overline{w_K}$$

或：
$$\overline{w_a}=\overline{w_{e\tau}}+\overline{w_{en}}+\overline{w_{r\tau}}+\overline{w_{rn}}+\overline{w_K} \quad\cdots\cdots(3)$$

在平面機構情况下，其相當投影式爲：

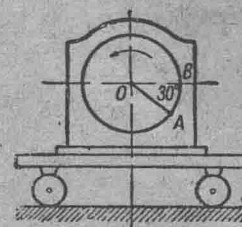
$$\left.\begin{aligned} w_{ax}&=w_{e\tau x}+w_{enx}+w_{r\tau x}+x_{rnx}+w_{Kx} \\ w_{ay}&=w_{e\tau y}+w_{eny}+w_{r\tau y}+w_{rny}+w_{Ky} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

（2）應用加速度合成定理解題時，其原則及過程與應用速度合成定理時同。通常在經過速度分析後，即可求出动座標系的角速度 $\omega$ 及點的相對速度 $v_r$，利用它們即可求出 $w_{en}$，$w_{rn}$，$w_K$，而其他未知的加速度分量可根據加速度合成定理求出。

（3）在平面機構問題中，無論應用（2）式［在牽連運动爲定軸轉动時是（4）式］，或應用由（1）式［或（3）式］所决定的加速度向量多邊形解題時，都只能解决兩未知量。因此，在所研究的問題中，未知量不能超過兩個。

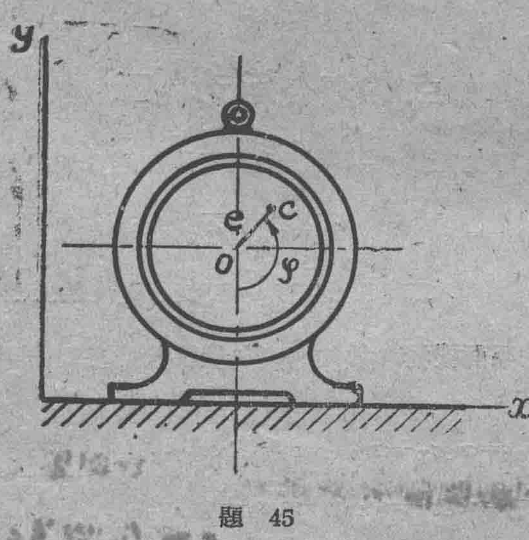
**44.** 小車以加速度 $w=49.2$ 公分/秒$^2$ 沿水平面向右運动，在小車上裝有電动機，電动機發动時其轉子按運动方程式 $\varphi=t^2$ 而轉动，其中 $\varphi$ 以弧度計。轉子半徑爲 20 公分。如在 $t=1$ 秒時，轉子邊緣上 $A$ 點在如圖所示的位置上，求此時 $A$ 點的加速度。

答： $w_A=74.6$ 公分/秒$^2$，鉛垂向上。




題 44

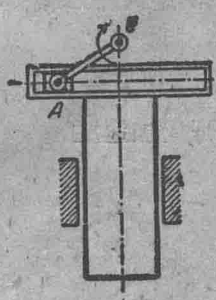
**45.** 電动機按照方程式 $\varphi=\omega t$（$\omega$＝常數）而轉动，電动機的轉子偏心距離爲 $e$。由於安裝不牢固，電动機在台基上按規律 $x=l+a\cos\omega t$ 而作簡諧運动，求當 $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 秒時，$C$ 點的絕對加速度。（$l$ 爲常數）



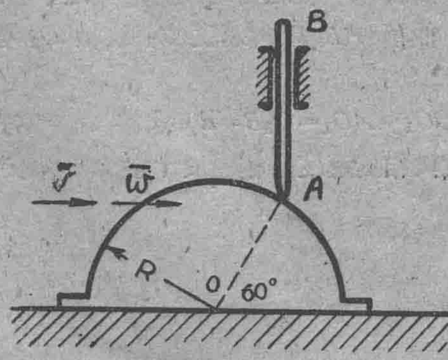

題 45

**46.** 衝擊鎚的曲柄滑道搖桿機構是由作往復移动之直綫滑道搖桿所構成。滑道搖桿被聯結在曲柄一端上的滑塊 $A$ 帶动，曲柄長 $OA=r=40$ 公分，以相當於 $n=120$ 轉/分鐘的角速度作等速轉动。當 $t=0$ 時，滑道搖桿在最低位置上。求此搖桿的加速度。

答： $w=6320\cos 4\pi t$ 公分/秒$^2$。




題 46




題 47

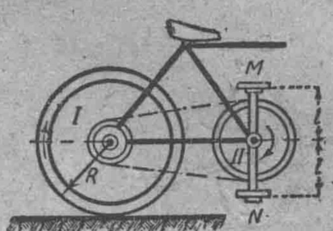
47．半圓形凸輪半徑爲 $R$，若已知凸輪之移动速度爲 $v$，加速度爲 $w$，桿 $AB$ 被凸輪推起，求桿 $AB$ 的移动速度和加速度，設此時凸輪之中心 $O$ 與 $A$ 點的聯綫與水平綫之夾角爲 60°

答： $v_a=\frac{\sqrt{3}}{3}v$； $w_a=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(w-\frac{8}{3}\frac{v^2}{R}\right)$向上爲正。

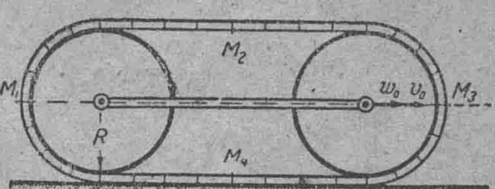
48．自行車在水平直綫道路上按規律 $s=0.1t^2$ 行駛（$s$ 以公尺計，$t$ 以秒計）。已知$R=350$ 公厘，$l=180$ 公厘，$z_1=18$ 齒，$z_2=48$ 齒。

如在 $t=10$ 秒時，曲柄 $MN$ 在鉛垂位置，求此時自行車踏板 $M$ 與 $N$ 之軸的絕對加速度（假定車輪只滾动而不滑动）。

答： $wM=0.860$ 公尺/秒²； $wN=0.841$ 公尺/秒²。




題 48




題 49

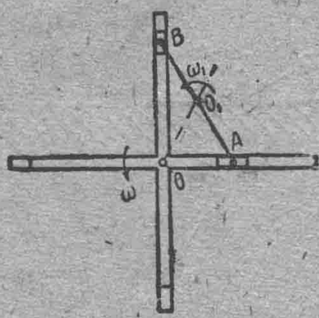
49．拖拉機以速度 $v_0$ 與加速度 $w_0$ 沿直綫道路而行駛（不滑动），求其履帶上 $M_1$、$M_2$、$M_3$、$M_4$ 四點的速度與加速度；車輪半徑爲 $R$；輪緣與履帶間的滑动略去不計。

50．半徑爲 $r$ 的空心圓環牢固地聯結在 $AB$ 軸上，$AB$ 之軸綫在圓環軸綫平面內。圓環內充滿液體，液體按箭頭方向以等相對速度 $u$ 在環內流动。$AB$ 軸作順時針方向轉动（如從 $A$ 點順軸之方向觀看 $B$點），其轉动的角速度 $\omega$ 爲常數。求在 1、2、3、4 等點處液體分子的絕對加速度。

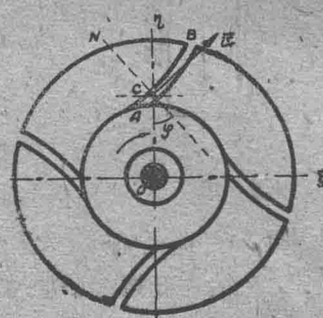

題 50

**51.** 爲傳遞一軸之轉动至另一與之平行之軸所用的聯軸節爲一具有固定曲柄 $OO_1$ 的變相橢圓規。曲柄 $AB$ 以角速度 $\omega_1$ 繞軸 $O_1$ 轉动並帶动十字節頭，使其連同第二軸繞軸 $O$ 轉动。

設 $OO_1=AO_1=O_1B=a$，求當 $\omega_1=$常數時，十字節頭轉动的角速度以及滑塊上一點 $A$ 的牽連速度與相對速度（相對於十字頭）、牽連加速度、相對加速度與哥氏加速度。




題 51

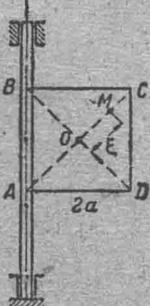



題 52

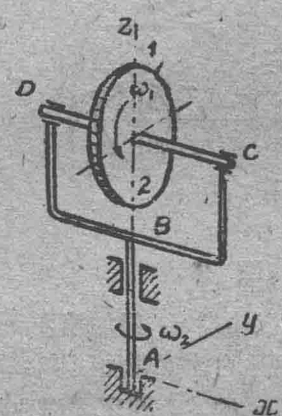
**52.** 空氣壓縮機繞 $O$ 軸以等角速 $\omega$ 轉动，空氣以相對速度 $v_r$ 順彎曲氣道 $AB$ 流出，在 $C$ 點的曲率半徑爲 $\rho$；法綫 $CN$ 與半徑所成之角爲 $\varphi$；半徑 $CO$ 等於 $r$；求在此情形下，氣道 $AB$ 內 $C$ 點處空氣分子的絕對速度與絕對加速度在座標軸上的投影。

**53.** 正方形 $ABCD$ 每邊長爲 $2a$ 公分，以等角速度 $\omega=\pi\sqrt{2}$ 1/秒繞其一邊 $AB$ 轉动。$M$ 點沿其對角綫 $AC$ 按規律 $\xi=a\cos\frac{\pi}{2}t$ 公分作簡諧運动。求在 $t=1$ 秒與 $t=2$ 秒時，$M$ 點絕對加速度的大小。

答：　$w_{a1}=a\pi^2\sqrt{5}$ 公分/秒$^2$；$w_{a2}=0.44\,a\pi^2$ 公分/秒$^2$。




題 53




題 54

**54.** 半徑爲 $R$ 的圓盤以等角速度 $\omega_1$ 繞水平軸 $CD$ 轉动，此軸又以等角速度 $\omega_2$ 繞鉛垂軸轉动。求在圓盤鉛垂直徑上兩端 1 點和 2 點的速度和加速度

**55.** 偏心凸輪偏心距 $OC=a$，輪半徑 $r=\sqrt{3}\ a$，以等角速 $\omega_0$ 繞 $O$ 軸轉动，設某瞬時 $OC$ 與 $CA$ 成直角，試求此瞬時從动桿 $AB$ 的速度與加速度。

答：　$v=\frac{2}{\sqrt{3}}a\ \omega_0$；　　$w=\frac{2}{9}a\ \omega_0^2$