大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计学习指导（第三版）

（经济类与管理类）

周誓达 编著

GAILULUN YU SHULI TONGJI XUEXI ZHIDAO

中国人民大学出版社

大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计学习指导

（第三版）

（经济类与管理类）

周誓达　编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/周誓达编著. —3 版. —北京：中国人民大学出版社，2012.11

大学本科经济应用数学基础特色教材系列

ISBN 978-7-300-16590-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①周… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 252148 号

大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计学习指导（第三版）

（经济类与管理类）

周誓达　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市媛明印刷厂	**版　　次**	2005 年 7 月第 1 版
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本		2012 年 11 月第 3 版
印　　张	8	**印　　次**	2012 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	144 000	**定　　价**	16.00 元

第三版前言

大学本科经济应用数学基础特色教材系列是为大学本科经济类与管理类各专业编著的教材与辅导书，包括《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率论与数理统计》及《微积分学习指导》、《线性代数与线性规划学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》.这是一套特色鲜明的教材系列，其特色是：密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂.

《概率论与数理统计学习指导》是经济应用数学基础(三)《概率论与数理统计》的辅导书，包括两部分内容：各章学习要点与全部习题详细解答.本书引导读者在全面学习的基础上抓住重点，明确主要内容，深入理解主要概念与主要理论，熟练掌握主要运算方法，把好钢用在刀刃上，达到事半功倍的效果，快乐地学习概率论与数理统计.

本着对读者高度负责的精神，本书整个书稿都经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现零差错.欢迎广大读者提出宝贵意见，本书将不断改进与完善，坚持不懈地提高质量，突出自己的特色，更好地为教学第一线服务.

周誓达

2012年10月8日于北京

目　录

第一章

随机事件及其概率

一　学习要点

1. 事件之间的关系

包含关系　若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，即构成事件 B 的基本事件都是构成事件 A 的基本事件，则称事件 A 包含 B，记作 $A \supset B$ 或 $B \subset A$.

相等关系　若事件 A 与 B 是同一个事件，即构成事件 A 的基本事件与构成事件 B 的基本事件完全相同，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

互斥关系　若事件 A 与 B 不可能同时发生，即构成事件 A 的基本事件与构成事件 B 的基本事件无一相同，则称事件 A 与 B 互斥，或称事件 A 与 B 互不相容.

2. 事件之间的运算

和事件　事件 A 与 B 中至少有一个事件发生，即事件 A 发生或事件 B 发生，这个事件称为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A + B$.

积事件　事件 A 与 B 同时发生，即事件 A 发生且事件 B 发生，这个事件称为事件 A 与 B 的积事件，记作 AB.

对立事件　事件 A 不发生,这个事件称为事件 A 的对立事件,记作 $\overline{A}$.

事件 A,B 互斥,有 $AB=\varnothing$;事件 $A,\overline{A}$ 对立,有 $A\overline{A}=\varnothing$ 且 $A+\overline{A}=\Omega$.

3. 古典概型

古典概型具有两个特征:

特征 1　基本事件的总数为有限个;

特征 2　每个基本事件发生的可能性是等同的.

设古典概型的一个试验共有 n 个基本事件,而事件 A 包含 m 个基本事件,则事件 A 发生的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

在古典概型的一个试验中,如何计算所有基本事件的个数?如何计算事件 A 包含基本事件的个数?若试验属于元素不重复的排列问题,则归结为计算排列数;若试验属于元素可重复的排列问题,则归结为计算元素可重复排列的个数;若试验属于组合问题,则归结为计算组合数;对于一般情况,则根据基本原理计算相应方法的种数.

4. 条件概率

在事件 A 已经发生的条件下,事件 B 发生的概率称为事件 B 对 A 的条件概率,记作 $P(B|A)$. 相应地,也称概率 $P(B)$ 为无条件概率. 注意:在事件 A 已经发生的条件下,事件 A 就是必然事件.

5. 加法公式

加法公式　对于任意两个事件 A,B,都有概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

加法公式的特殊情况

(1) 如果事件 A,B 互斥,则有概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

(2) 对于任意事件 A,都有概率

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

加法公式特殊情况的推广　如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则有概率

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

判断两个事件是否互斥的方法是:考察在任何一次试验中,这两个事件有无可能同时发生. 若有可能同时发生,则这两个事件非互斥即相容;若无可能同时发生,则这两个事件互斥.

6. 事件相互独立

若事件A与B中一个事件对另外一个事件的条件概率不受另外一个事件发生与否的影响，即条件概率

$$P(B|A)=P(B)$$

或条件概率

$$P(A|B)=P(A)$$

则称事件A与B相互独立.

在四组事件$A,B;A,\overline{B};\overline{A},B;\overline{A},\overline{B}$中，如果有一组事件相互独立，则其余三组事件也相互独立.

事件A与B相互独立，等价于概率

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

当概率$P(A)>0,P(B)>0$时，事件A,B相互独立与事件A,B互斥不能同时成立.

考虑n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，若其中任何一个事件发生的可能性都不受其他一个或几个事件发生与否的影响，则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立. 如果n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，则把其中任意一个或几个事件换成其对立事件后，所得到的n个事件仍然相互独立.

7. 乘法公式

乘法公式　对于任意两个事件A,B，都有概率

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$
$$=P(B)P(A|B)$$

乘法公式的特殊情况　如果事件A,B相互独立，则有概率

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

乘法公式特殊情况的推广　如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，则有概率

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

8. 全概公式

完备事件组　已知事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，若它们同时满足：

(1) 两两互斥

(2) 和事件$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$

则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$构成一个完备事件组.

事件$A,\overline{A}$构成最简单的完备事件组.

全概公式 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组,则对于任意事件 B 都有概率

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1B + A_2B + \cdots + A_nB) \\ &= P(A_1B) + P(A_2B) + \cdots + P(A_nB) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \end{aligned}$$

全概公式的特殊情况 对于任意两个事件 A, B,都有概率

$$P(B) = P(AB+\bar{A}B) = P(AB)+P(\bar{A}B) = P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

二 习题一详细解答

1.01 口袋里装有若干个黑球与若干个白球,每次任取 1 个球,共抽取两次,设事件 A 表示第一次取到黑球,事件 B 表示第二次取到黑球,问:

(1) 和事件 $A+B$ 表示什么?

(2) 积事件 AB 表示什么?

(3) 积事件 $A\bar{B}$ 表示什么?

(4) 对立事件 $\bar{A}$ 表示什么?

(5) 第一次取到白球且第二次取到黑球应如何表示?

(6) 两次都取到白球应如何表示?

(7) 两次取到球的颜色不一致应如何表示?

(8) 两次取到球的颜色一致应如何表示?

解:(1) 和事件 $A+B$ 意味着事件 A 与 B 中至少有一个事件发生,即第一次取到黑球与第二次取到黑球两个试验结果中至少有一个试验结果发生,因此它表示两次抽取中至少有一次取到黑球.

(2) 积事件 AB 意味着事件 A 发生且事件 B 发生,即第一次取到黑球且第二次取到黑球,因此它表示两次都取到黑球.

(3) 积事件 $A\bar{B}$ 意味着事件 A 发生且事件 B 不发生,即第一次取到黑球且第二次不取到黑球,因此它表示第一次取到黑球且第二次取到白球.

(4) 对立事件 $\bar{A}$ 意味着事件 A 不发生,即第一次不取到黑球,因此它表示第一次取到白球.

(5) 第一次取到白球且第二次取到黑球,意味着第一次不取到黑球且第二次取到黑球,即事件 A 不发生且事件 B 发生,可用积事件 $\bar{A}B$ 表示.

(6) 两次都取到白球,意味着第一次取到白球且第二次也取到白球,即事件 A 与 B 同时不发生,可用积事件 $\bar{A}\,\bar{B}$ 表示.

(7) 两次取到球的颜色不一致，意味着第一次取到黑球且第二次取到白球，或者第一次取到白球且第二次取到黑球，即积事件 $A\overline{B}$ 发生或积事件 $\overline{A}B$ 发生，可用和事件 $A\overline{B}+\overline{A}B$ 表示.

(8) 两次取到球的颜色一致，意味着两次都取到黑球，或者两次都取到白球，即积事件 AB 发生或积事件 $\overline{A}\overline{B}$ 发生，可用和事件 $AB+\overline{A}\overline{B}$ 表示.

1.02　用 9 个数字 1,2,…,9 随意组成数字不重复的四位数，求：

(1) 它小于 4 000 的概率；

(2) 它是奇数的概率.

解：注意到试验是用 9 个数字 1,2,…,9 随意组成数字不重复的四位数，相当于从 9 个不同元素中每次取出 4 个不同元素的元素不重复选排列，有 P_9^4 种方法，意味着完成试验共有 P_9^4 种方法，即试验共有 P_9^4 个基本事件. 又由于是随意组成，从而每个基本事件发生的可能性是等同的，说明这个问题属于古典概型.

(1) 设事件 A 表示数字不重复的四位数小于 4 000，考虑到完成事件 A 必须依次经过两个步骤：第 1 个步骤是确定千位数，这时数字 1,2,3 都可以放在千位上，有 3 种方法；第 2 个步骤是确定百位数、十位数及个位数，这时是从所给 9 个数字去掉放在千位上的数字后剩余 8 个数字中取出 3 个不同数字分别放在百位、十位及个位上，相当于从 8 个不同元素中每次取出 3 个不同元素的元素不重复选排列，有 P_8^3 种方法. 根据乘法原理，完成事件 A 有 $3\mathrm{P}_8^3$ 种方法，即事件 A 包含 $3\mathrm{P}_8^3$ 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式，得到概率

$$P(A)=\frac{3\mathrm{P}_8^3}{\mathrm{P}_9^4}=\frac{3\times 336}{3024}=\frac{1}{3}$$

所以数字不重复的四位数小于 4 000 的概率为$\frac{1}{3}$.

(2) 设事件 B 表示数字不重复的四位数是奇数，考虑到完成事件 B 必须依次经过两个步骤：第 1 个步骤是确定个位数，这时数字 1,3,5,7,9 都可以放在个位上，有 5 种方法；第 2 个步骤是确定十位数、百位数及千位数，这时是从所给 9 个数字去掉放在个位上的数字后剩余 8 个数字中取出 3 个不同数字分别放在十位、百位及千位上，相当于从 8 个不同元素中每次取出 3 个不同元素的元素不重复选排列，有 P_8^3 种方法，根据乘法原理，完成事件 B 有 $5\mathrm{P}_8^3$ 种方法，即事件 B 包含 $5\mathrm{P}_8^3$ 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式，得到概率

$$P(B)=\frac{5\mathrm{P}_8^3}{\mathrm{P}_9^4}=\frac{5\times 336}{3024}=\frac{5}{9}$$

所以数字不重复的四位数是奇数的概率为$\frac{5}{9}$.

1.03 随机安排甲、乙、丙三人在星期一到星期三各学习一天,求:

(1) 恰好有一人在星期一学习的概率;

(2) 三人学习日期不相重的概率.

解:注意到试验是随机安排甲、乙、丙三人在星期一到星期三各学习一天,必须依次经过三个步骤:第 1 个步骤是安排甲学习,从星期一到星期三挑出一天作为甲的学习日期,有 3 种方法;第 2 个步骤是安排乙学习,从星期一到星期三挑出一天作为乙的学习日期,也有 3 种方法;第 3 个步骤是安排丙学习,从星期一到星期三挑出一天作为丙的学习日期,也有 3 种方法.若以星期一、星期二、星期三作为元素,则试验相当于从 3 个不同元素中每次取出 3 个元素的元素可重复排列,排在前面的是甲的学习日期,排在中间的是乙的学习日期,排在后面的是丙的学习日期.根据乘法原理,完成试验共有 $3\times3\times3=3^3=27$ 种方法,即试验共有 27 个基本事件.又由于是随机安排,从而每个基本事件发生的可能性是等同的,说明这个问题属于古典概型.

(1) 设事件 A 表示恰好有一人在星期一学习,完成事件 A 必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是从三人中挑出一人,安排他在星期一学习,有 3 种方法;第 2 个步骤是安排剩下的两人分别在其余两天学习,有 $2\times2=4$ 种方法.根据乘法原理,完成事件 A 有 $3\times4=12$ 种方法,即事件 A 包含 12 个基本事件.根据古典概型计算概率的公式,得到概率

$$P(A)=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

所以恰好有一人在星期一学习的概率为$\frac{4}{9}$.

(2) 设事件 B 表示三人学习日期不相重,完成事件 B 意味着从星期一到星期三这 3 天排队,不妨规定排在前面的是甲的学习日期,排在中间的是乙的学习日期,排在后面的是丙的学习日期,相当于从 3 个不同元素中每次取出 3 个不同元素的元素不重复全排列,有 P_3^3 种方法,即事件 B 包含 P_3^3 个基本事件.根据古典概型计算概率的公式,得到概率

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_3^3}{27}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

所以三人学习日期不相重的概率为$\frac{2}{9}$.

1.04 箱子里装有 4 个一级品与 6 个二级品,任取 5 个产品,求:

(1) 其中恰好有 2 个一级品的概率;

(2) 其中至多有 1 个一级品的概率.

解:注意到试验是从 10 个产品中任取 5 个产品,在取产品时并不计较这些产品的先后顺序,即不需要将它们排队,试验相当于从 10 个不同元素中每次取出 5 个不同元素的组合,完成试验共有 C_{10}^5 种取法,即试验共有 C_{10}^5 个基本事件. 又由于是任意抽取,从而每个基本事件发生的可能性是等同的,说明这个问题属于古典概型.

(1) 设事件 A 表示任取 5 个产品中恰好有 2 个一级品,即所取 5 个产品中有 2 个一级品与 3 个二级品,完成事件 A 必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是从 4 个一级品中取出 2 个一级品,有 C_4^2 种取法;第 2 个步骤是从 6 个二级品中取出 3 个二级品,有 C_6^3 种取法. 根据乘法原理,完成事件 A 有 $C_4^2C_6^3$ 种取法,即事件 A 包含 $C_4^2C_6^3$ 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式,得到概率

$$P(A)=\frac{C_4^2C_6^3}{C_{10}^5}=\frac{6\times 20}{252}=\frac{10}{21}$$

所以任取 5 个产品中恰好有 2 个一级品的概率为 $\frac{10}{21}$.

(2) 设事件 B 表示任取 5 个产品中至多有 1 个一级品,包括恰好有 1 个一级品与没有一级品两类情况,完成事件 B 有两类方式:第 1 类方式是任取 5 个产品中恰好有 1 个一级品,即所取 5 个产品中有 1 个一级品与 4 个二级品,有 $C_4^1C_6^4$ 种取法;第 2 类方式是任取 5 个产品中没有一级品,即所取 5 个产品中有 0 个一级品与 5 个二级品,有 $C_4^0C_6^5$ 种取法. 根据加法原理,完成事件 B 有 $C_4^1C_6^4+C_4^0C_6^5$ 种取法,即事件 B 包含 $C_4^1C_6^4+C_4^0C_6^5$ 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式,得到概率

$$P(B)=\frac{C_4^1C_6^4+C_4^0C_6^5}{C_{10}^5}=\frac{4\times 15+1\times 6}{252}=\frac{11}{42}$$

所以任取 5 个产品中至多有 1 个一级品的概率为 $\frac{11}{42}$.

1.05　某地区一年内刮风的概率为 $\frac{4}{15}$,下雨的概率为 $\frac{2}{15}$,既刮风又下雨的概率为 $\frac{1}{10}$,求:

(1) 刮风或下雨的概率;

(2) 既不刮风又不下雨的概率.

解:设事件 A 表示刮风,事件 B 表示下雨,既刮风又下雨意味着事件 A 与 B 同时发生,可用积事件 AB 表示. 由题意得到概率

$$P(A)=\frac{4}{15}$$

$$P(B)=\frac{2}{15}$$

$$P(AB)=\frac{1}{10}$$

(1) 刮风或下雨,意味着事件A发生或事件B发生,可用和事件$A+B$表示. 根据加法公式,得到概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{4}{15}+\frac{2}{15}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

所以刮风或下雨的概率为$\frac{3}{10}$.

(2) 既不刮风又不下雨,意味着事件A,B都不发生,可用积事件$\overline{A}\,\overline{B}$表示,而有关系式$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A+B}$. 考虑到既不刮风又不下雨是刮风或下雨的对立事件,根据加法公式的特殊情况,得到概率

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A+B)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

所以既不刮风又不下雨的概率为$\frac{7}{10}$.

1.06 盒子里装有 5 张壹角邮票、3 张贰角邮票及 2 张叁角邮票,任取 3 张邮票,求:

(1) 其中恰好有 1 张壹角邮票、2 张贰角邮票的概率;

(2) 其中恰好有 2 张壹角邮票、1 张叁角邮票的概率;

(3) 邮票面值总和为伍角的概率;

(4) 其中至少有 2 张邮票面值相同的概率.

解: 注意到试验是从 10 张邮票中任取 3 张邮票,共有 C_{10}^3 种取法,即共有 C_{10}^3 个基本事件.

(1) 设事件 A_1 表示任取 3 张邮票中恰好有 1 张壹角邮票、2 张贰角邮票,即所取 3 张邮票中有 1 张壹角邮票、2 张贰角邮票及 0 张叁角邮票,有 $C_5^1C_3^2C_2^0$ 种取法,即事件 A_1 包含 $C_5^1C_3^2C_2^0$ 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式,得到概率

$$P(A_1)=\frac{C_5^1C_3^2C_2^0}{C_{10}^3}=\frac{5\times3\times1}{120}=\frac{1}{8}$$

所以任取 3 张邮票中恰好有 1 张壹角邮票、2 张贰角邮票的概率为$\frac{1}{8}$.

(2) 设事件 A_2 表示任取 3 张邮票中恰好有 2 张壹角邮票、1 张叁角邮票,即所取 3 张邮票中有 2 张壹角邮票、0 张贰角邮票及 1 张叁角邮票,有 $C_5^2C_3^0C_2^1$ 种取法,即事件 A_2 包含 $C_5^2C_3^0C_2^1$ 个基本事件. 根据古典概型计算概率的公式,得到概率

$$P(A_2)=\frac{C_5^2C_3^0C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{10\times1\times2}{120}=\frac{1}{6}$$

所以任取 3 张邮票中恰好有 2 张壹角邮票、1 张叁角邮票的概率为$\frac{1}{6}$.

(3) 设事件 A 表示任取 3 张邮票面值总和为伍角，包括恰好有 1 张壹角邮票、2 张贰角邮票与恰好有 2 张壹角邮票、1张叁角邮票两类情况. 由于事件 A 发生意味着事件A_1发生或事件 A_2发生，从而事件 A 为事件 A_1 与 A_2 的和事件，即事件 $A = A_1 + A_2$. 由于在任意一次抽取中所取到的 3 张邮票，不可能既是恰好有 1 张壹角邮票、2张贰角邮票，又同时是恰好有 2 张壹角邮票、1 张叁角邮票，说明事件 A_1 与 A_2不可能同时发生，即事件 A_1 与 A_2 互斥. 根据加法公式的特殊情况，得到概率

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$$

所以任取 3 张邮票面值总和为伍角的概率为$\frac{7}{24}$.

(4) 设事件 B 表示任取 3 张邮票中至少有 2 张邮票面值相同，包括恰好有 2 张邮票面值相同与恰好有 3 张邮票面值相同两类情况，由于直接计算其概率 $P(B)$ 比较麻烦，因此考虑事件 B 的对立事件$\overline{B}$. 事件 $\overline{B}$ 表示任取 3 张邮票面值各不相同，即所取 3 张邮票中有 1 张壹角邮票、1 张贰角邮票及 1 张叁角邮票，有 $C_5^1C_3^1C_2^1$ 种取法，即事件 $\overline{B}$ 包含 $C_5^1C_3^1C_2^1$ 个基本事件. 根据加法公式的特殊情况与古典概型计算概率的公式，得到概率

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3} = 1 - \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{3}{4}$$

所以任取 3 张邮票中至少有 2 张邮票面值相同的概率为$\frac{3}{4}$.

1.07　市场上供应的某种商品只由甲厂与乙厂生产，甲厂占 60%，乙厂占 40%，甲厂产品的次品率为 7%，乙厂产品的次品率为 8%. 从市场上任买 1 件这种商品，求：

(1) 它是甲厂次品的概率；

(2) 它是乙厂次品的概率.

解：设事件 A 表示甲厂产品，从而事件 $\overline{A}$ 表示乙厂产品，再设事件 B 表示次品. 由题意得到概率

$$P(A) = 60\%$$
$$P(\overline{A}) = 40\%$$
$$P(B|A) = 7\%$$
$$P(B|\overline{A}) = 8\%$$

(1) 甲厂次品意味着既是甲厂产品又是次品,即事件 A 与 B 同时发生,可用积事件 AB 表示.根据乘法公式,得到概率

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 60\% \times 7\% = 4.2\%$$

所以从市场上任买 1 件这种商品是甲厂次品的概率为 4.2%.

(2) 乙厂次品意味着既是乙厂产品又是次品,即事件 $\overline{A}$ 与 B 同时发生,可用积事件 $\overline{A}B$ 表示.根据乘法公式,得到概率

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 40\% \times 8\% = 3.2\%$$

所以从市场上任买 1 件这种商品是乙厂次品的概率为 3.2%.

1.08 某单位同时装有两种报警系统 A 与 B,当报警系统 A 单独使用时,其有效的概率为 0.70,当报警系统 B 单独使用时,其有效的概率为 0.80,在报警系统 A 有效的条件下,报警系统 B 有效的概率为 0.84.若发生意外时,求:

(1) 两种报警系统都有效的概率;

(2) 在报警系统 B 有效的条件下,报警系统 A 有效的概率;

(3) 两种报警系统中至少有一种报警系统有效的概率;

(4) 两种报警系统都失灵的概率.

解:设事件 A 表示报警系统 A 有效,事件 B 表示报警系统 B 有效,由题意得到概率

$$P(A) = 0.70$$

$$P(B) = 0.80$$

$$P(B|A) = 0.84$$

(1) 两种报警系统都有效,意味着报警系统 A 有效且报警系统 B 有效,即事件 A 发生且事件 B 发生,可用积事件 AB 表示.根据乘法公式,得到概率

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.70 \times 0.84 = 0.588$$

所以两种报警系统都有效的概率为 0.588.

(2) 所求在报警系统 B 有效的条件下,报警系统 A 有效的概率为条件概率 $P(A|B)$,根据乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

得到条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.588}{0.80} = 0.735$$

所以在报警系统 B 有效的条件下,报警系统 A 有效的概率为 0.735.

(3) 两种报警系统中至少有一种报警系统有效,意味着报警系统 A 有效或报警系统 B 有效,即事件 A 发生或事件 B 发生,可用和事件 $A+B$ 表示.根据加法公

式，得到概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.70+0.80-0.588=0.912$$

所以两种报警系统中至少有一种报警系统有效的概率为 0.912.

(4) 两种报警系统都失灵，意味着报警系统 A 失灵且报警系统 B 失灵，即事件 A 不发生且事件 B 不发生，可用积事件 $\overline{A}\,\overline{B}$ 表示. 它的对立事件是两种报警系统中至少有一种报警系统有效即和事件 $A+B$. 根据加法公式的特殊情况，得到概率

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A+B)=1-0.912=0.088$$

所以两种报警系统都失灵的概率为 0.088.

1.09　口袋里装有 6 个黑球与 3 个白球，每次任取 1 个球，不放回取两次，求：

(1) 第一次取到黑球且第二次取到白球的概率；

(2) 两次取到球的颜色一致的概率.

解：设事件 A 表示第一次取到黑球，事件 B 表示第二次取到黑球.

(1) 第一次取到黑球且第二次取到白球，意味着第一次取到黑球且第二次不取到黑球，即事件 A 发生且事件 B 不发生，可用积事件 $A\overline{B}$ 表示. 根据乘法公式，得到概率

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}|A)=\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

所以第一次取到黑球且第二次取到白球的概率为$\frac{1}{4}$.

(2) 两次取到球的颜色一致，意味着两次都取到黑球，或者两次都取到白球，即积事件 AB 发生或积事件 $\overline{A}\,\overline{B}$ 发生，可用和事件 $AB+\overline{A}\,\overline{B}$ 表示. 由于在任意两次抽取中，不可能既是两次都取到黑球，又同时是两次都取到白球，说明积事件 AB 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 不可能同时发生，即积事件 AB 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 互斥. 根据加法公式的特殊情况与乘法公式，得到概率

$$P(AB+\overline{A}\,\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})$$

$$=\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{2}$$

所以两次取到球的颜色一致的概率为$\frac{1}{2}$.

1.10　在一批产品中有 80% 是合格品，验收这批产品时规定，先从中任取 1 个产品，若它为合格品就放回去，然后再任取 1 个产品，若仍为合格品，则接收这批产品，否则拒收. 求：

(1) 检验第一个产品为合格品且检验第二个产品为次品的概率；

(2) 这批产品被拒收的概率.