$(\sin x)' = \cos x$

新世纪大学数学系列教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

主　编　臧振春　苏白云
副主编　刘泮振　张　瑞　石永生　侯俊林

$$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/臧振春,苏白云主编.—郑州:河南大学出版社,2012.8(2012.9 重印)

ISBN 978-7-5649-0938-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①臧…②苏… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 191436 号

责任编辑 朱建伟

责任校对 牛 伟

封面设计 郭 灿

出 版 河南大学出版社

地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号 邮编:450046

电话:0371-86059701(营销部) 网址:www.hupress.com

排 版 郑州市今日文教印制有限公司

印 刷 郑州海华印务有限公司

版 次 2012 年 8 月第 1 版 **印 次** 2012 年 9 月第 2 次印刷

开 本 787mm×1092mm 1/16 **印 张** 22.5

字 数 519 千字 **印 数** 5001—12000 册

定 价 39.80 元

前 言

高等数学是财经、管理类等学科的专业基础课，也是研究生入学考试的必考内容. 随着高等教育事业的发展和教育改革的不断深入，高等教育对基础课的内容也提出了一系列新的要求. 教材改革作为教育改革的基本内容，愈来愈受到学校和教育人士的关注. 本书编者根据财经、管理类等学科的发展需要，结合多年来的教学实践，广泛参阅国内外有关著作，组织编写了《高等数学》这本教材.

本书内容符合教学大纲的基本要求，具有以下主要特点：

1. 注重基本理论、基本知识的介绍和基本技能的训练，概念引入力求自然、简洁明了. 针对一些较难问题的提出、不易理解的概念和不易掌握的方法均给出了注释.

2. 尽量吸收本学科新的、比较成熟的研究成果，充实了数学在经济管理中的应用.

3. 书中配有较多的典型例题，题型多样，内容广泛，使读者有更多的解题训练机会，以培养分析和解决问题的能力.

4. 本书各章配备习题，针对性强，又兼顾前后内容的复习和巩固，具有典型性和代表性，分 A，B 两组. A 组为传统题型，B 组为标准化题型，难度高于 A 组，以备读者进一步学习之用.

本书由臧振春、苏白云担任主编. 参与编写的作者具体分工如下：刘泮振第一章、习题解答，石永生第二章、第七章，苏白云第三章、第四章，张瑞第五章、第六章，侯俊林第八章、第九章，臧振春第十章、附录.

本书编写过程中，曾得到河南大学出版社、河南财经政法大学教务处及参与授课教师的大力支持和帮助，在此一并感谢.

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，祈望同仁和广大读者不吝指正.

编 者

2012.7

目　　录

第1章 函 数

高等数学研究的是自然现象或生产过程中变化的量和变化的图形，其理论基础和主要研究工具是极限，是在代数法、解析法和几何法密切结合的基础上发展起来的，应用非常广泛，而这些问题的基本研究对象就是函数，因而函数是高等数学中最重要的概念之一，本章主要对函数的概念及其基本性质进行复习和归纳.

§1.1 集 合

一、集合

1. 集合的概念

具有某种共同属性的一些对象或事物的全体称为集合；集合中的每一个对象或事物称为集合的元素.

集合用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，集合中的元素用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示；若 a 是集合 A 中的元素，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；若 a 不是 A 中的元素，记作 $a\overline{\in} A$ 或 $a\notin A$，读作 a 不属于 A.

例 1 某院校 2010 级全体学生构成一个集合，其元素为张三、李四等.

例 2 全体自然数构成一个集合，其元素为 $1,2,3,\cdots$.

例 3 方程 $x^2-4x+3=0$ 的一切根构成一个集合，其元素为 1 和 3.

集合按元素个数的多少分为有限集和无限集. 由有限个元素构成的集合称为有限集，如以上例 1 和例 3；由无限个元素构成的集合称为无限集，如以上例 2.

2. 集合的表示法

(1) 列举法：是指按任意顺序列出集合中所有的元素，并用花括号{}括起来.

例 4 由 a,b,c,d 四个元素构成的集合，可用列举法表示为 $A=\{a,b,c,d\}$.

例 5 由 $x^2-4x+3=0$ 的一切根构成的集合，可表示为 $B=\{1,3\}$.

注 1 用列举法表示集合时元素不得遗漏和重复，且一般用于元素较少的集合.

(2) 描述法：是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来，用 $A=\{x\mid x$ 具有共同属性$\}$表示.

例 6 满足 $x>2$ 的所有实数构成的集合，用描述法可表示为 $A=\{x\mid x>2,x\in\mathbf{R}\}$.

注 2 描述法一般用于元素个数较多、列举困难或无法列举的集合.

由所有研究对象构成的集合称为全集,记作 U;不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$. 如方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解,因而 $\varnothing=\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x^2+1=0\}$ 表示一个空集.

注 3 全集是相对而言的,而$\{0\}$,$\{\varnothing\}$均不是空集.

如果集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素,则称 A 为 B 的子集,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如果对于 A 和 B,$A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$. 例如,$\mathbf{N}$ 显然是 $\mathbf{R}$ 的一个子集,故 $\mathbf{N}\subset\mathbf{R}$. 而集合 $A=\{x \mid 2^x=1\}$ 和集合 $B=\{0\}$则是相等的.

3. 集合的运算

像数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样,集合与集合之间也有其特殊的运算.

(1) 集合的并　由集合 A 与集合 B 中所有元素构成的集合,称为集合的并,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例 7 设 $A=\{x \mid -1<x<2\}$,$B=\{x \mid 1<x<3\}$,则 $A\cup B=\{x \mid -1<x<3\}$.

(2) 集合的交　由集合 A 和集合 B 所有公共元素构成的集合,称为集合的交,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例 8 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$,$B=\{a,c,e,f\}$,则 $A\cap B=\{a,c,e\}$.

(3) 集合的差　由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的差,记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

例 9 设 $A=\{-3,-1,0,2,5\}$,$B=\{-1,0,3,5\}$,则 $A-B=\{-3,2\}$.

(4) 集合的补　全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记作 $\overline{A}$,即

$$\overline{A}=\{x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

例 10 设 U 是全体实数集合,A 为全体有理数集合,则 $\overline{A}$ 为全体无理数构成的集合.

集合间的运算满足以下运算规律:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 摩根律　$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$,
$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、实数与实数的绝对值

1. 实数及其几何表示

实数由有理数与无理数两部分组成.有理数包括零、正负整数和正负分数,可表示为 p/q 的形式,其中 p,q 为整数,且 $q\neq0$.有理数也可表示为有限小数或无限循环小数,而无理数只能表示为无限不循环小数.

实数与数轴上的点是一一对应的,为简便起见,我们常用一个字母或数字不加区别地表示某个实数或数轴上对应的点.比如,数 x_0 与点 x_0,数$\sqrt{2}$与点$\sqrt{2}$,…….

2. 实数的绝对值及其基本性质

实数 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant0;\\ -x & x<0.\end{cases}$$

绝对值的几何意义是:$|x|$表示点 x 到原点的距离.如果 x 和 y 是两个不同的实数,则$|x-y|$表示点 x 与 y 之间的距离.

绝对值有以下基本性质:

(1) $|x|\geqslant0$,当且仅当 $x=0$ 时,$|x|=0$.

(2) $|x|=|-x|$;$|x|^2=x^2$;$\sqrt{x^2}=|x|$;$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

(3) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

(4) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

此外,绝对值还有以下常用性质:

(5) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$,$y\neq0$.

(7) 如果 $a>0$,则有

$$\{x\,|\,|x|\leqslant a\}=\{x\,|\,-a\leqslant x\leqslant a\}.$$

(8) 如果 $a>0$,则有

$$\{x\,|\,|x|\geqslant a\}=\{x\,|\,x\leqslant-a\}\cup\{x\,|\,x\geqslant a\}.$$

三、区间与邻域

区间与邻域均为特殊的集合.

(1) 区间:设 a,b 为实数,且 $a<b$,则

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$

表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数的集合,称为开区间,在数轴上它表示以 a,b 为端点但不包含端点 a 和 b 的线段,如图 1-1.

同理,$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间,如图 1-2.

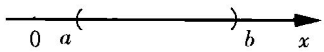

图 1-1

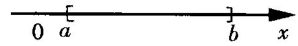

图 1-2

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

称为半开或半闭区间，如图 1-3，图 1-4.

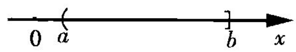

图 1-3

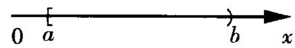

图 1-4

以上区间统称为有限区间，而以下区间称为无限区间：

$(a,+\infty)=\{x|a<x\}$,

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$,

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$,

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$,

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

(2) 邻域：由某点 x_0 附近的所有点构成的集合称为邻域. 具体地，设 x_0 是任意给出的点，δ 是一小正数，则

$$\{x||x-x_0|<\delta\}$$

即
$$\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域，它表示以点 x_0 为中心，半径为 δ 的开区间，如图 1-5.

如果在上述邻域中去掉点 x_0，则集合

$$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$$

称为以点 x_0 为中心，半径为 δ 的空心邻域，如图 1-6.

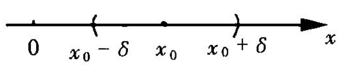

图 1-5

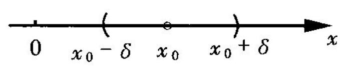

图 1-6

例 11 集合 $\left\{x\,\middle|\,|x-4|<\frac{1}{4}\right\}$ 表示点 $x_0=4$ 的 $\frac{1}{4}$ 邻域，即开区间(3.75，4.25).

§1.2 函 数

一、常量与变量

在实际问题中，我们经常会遇到各种各样的量，如长度、重量、时间、成本、利润等. 这些量一般可以分为两种：一种是在我们考察的某一变化过程中保持不变(取同一数值)的量，这种量叫常量；另一种是在我们考察的变化过程中可以发生变化的量(可以取不同数值)，这种量叫变量.

常量和变量并不是绝对的.一种量在某一变化过程中是常量,而在另一变化过程中则可能就是变量.另外,为了研究简单起见或者为了使某一因素的作用更加突出,常常把变化很小或者对所研究的问题影响不大的量也看成是常量.

常量一般用字母 $a,b,c\cdots$ 表示,变量用 $x,y,z,t,u,v,\cdots$ 表示.

二、函数的概念

在讨论量的变化时,我们发现许多量的变化不是孤立的,而是遵循着一定的规律相互制约又相互依赖,这种变化规律通常由变量在变化过程中的数值对应关系反映出来.例如,企业商品的总收益 R 与销售量 Q、价格 P 之间关系为 $R=PQ$. 我们把这种变量之间确定的对应关系就称为函数关系.

定义 1.1 设 D 是一个非空的实数集合,如果对任一 $x\in D$,按照某种确定的规则 f,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量.x 的取值范围称为函数的定义域,记作 $D(f)$.

对于 D 中某一固定点 x_0,因变量相应的取值 $y_0=f(x_0)$ 称为当 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍整个集合 D,所得到的所有函数值的集合,称为函数的值域,记作 $R(f)$.

关于函数的概念,我们作以下几点说明:

(1) 决定函数的实质有两个基本要素:定义域 D 和对应规则 f,两个函数关系是否相同就在于这两个要素是否一致.

例 1 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 与 $y>x$ 均不是函数关系,前者定义域 $D(f)$ 是空集,而后者对于每一个 x 值对应的 y 值不确定.

例 2 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是两个不同的函数,因为二者的定义域不同.

(2) 函数的定义域,可分为两种情况:一种是对实际应用问题中的函数,其定义域应由问题的实际意义确定.另一种是对自变量的取值范围事先未给出限制,此时函数的定义域指的是能使式子有意义的所有点构成的集合.

例 3 某产品价格 P 与其销售量 Q 之间满足函数关系

$$P=80-0.2Q,$$

试确定其定义域.

解 根据实际问题,要使函数有意义,须使 $Q\geqslant 0$ 且 $80-0.2Q>0$ 同时成立,即要求 $Q\geqslant 0$ 且 $Q<400$ 同时成立,因此函数的定义域为

$$D(f)=\{Q|0\leqslant Q<400\}.$$

例 4 求函数 $y=\arccos\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$ 的定义域.

解 根据反三角函数的性质,欲使函数有意义,须

$$-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant 1,\text{即}\frac{1}{10}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant 10,$$

从而得
$$1\leqslant x\leqslant 100,$$
因此
$$D(f)=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 100\}.$$

例 5 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\lg(x^2-1)-1}$ 的定义域.

解 由题意要求,有
$$\begin{cases}2-x\geqslant 0;\\ x^2-1>0;\\ \lg(x^2-1)-1\neq 0.\end{cases}$$
解之得,$x\leqslant 2$,$|x|>1$ 且 $x\neq\pm\sqrt{11}$,所以函数的定义域为
$$D(f)=(-\infty,-\sqrt{11})\cup(-\sqrt{11},-1)\cup(1,2].$$

(3) 有时候函数关系并不直接表达为 $y=f(x)$ 的形式,而是通过某个方程 $F(x,y)=0$ 体现出来.一般地,凡是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数,如 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$,$\dfrac{y}{x}=\ln y$;而直接表达为 $y=f(x)$ 形式的称为显函数,如 $y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\lg(5-x)+\dfrac{\sin x}{1-x^2}$.

(4) 当函数关系不是用一个统一的数学式子表示,而是由两个或两个以上数学式子分段表示时,该函数称为分段函数.例如,绝对值函数
$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0;\\ -x & x<0.\end{cases}$$

注 分段函数并不是几个函数联立而成的,而是一个函数在定义域的不同区间表达式不同而已.

例 6 确定函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|<1;\\ x^2-1 & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$ 的定义域.

解 由 $|x|<1$ 得 $-1<x<1$,由 $1<|x|\leqslant 2$ 得 $-2\leqslant x<-1$ 或 $1<x\leqslant 2$,因此函数的定义域为
$$D(f)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2].$$

(5) 函数 $f(x)$ 表示将对应规则 f 施加于 x 之上,如果把 $f(x)$ 中的 x 换为具体的数值或某个数学式子,则表示将 f 施加于这些具体数值或数学式子之上.

例 7 设函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f(0)$,$f(x+1)$,$f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解 $f(0)=\dfrac{1}{1-0}=1$,
$$f(x+1)=\frac{1}{1-(x+1)}=-\frac{1}{x},$$
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}.$$

三、函数的表示法

根据表示函数对应关系的方法不同，常用的函数表示法有解析法、列表法和图示法三种.

1. 解析法(公式法)

自变量 x 和函数 y 之间的函数关系直接用公式表示出来，如 $y=\ln\sin x$.

2. 列表法

将一系列自变量的值与对应的函数值列成表格. 如某商店一年里各月毛线的零售量(单位：百公斤)如下：

月份(t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量(S)	41	42	23	23	5	3	3	8	47	81	72	62

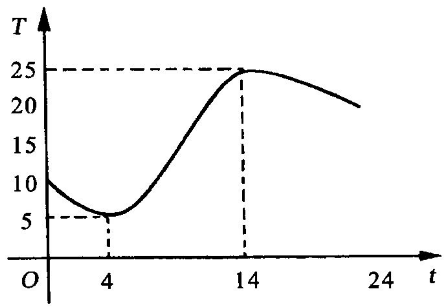

图 1-7

它表示了某商店毛线零售量 S 随月份 t 而变化的函数关系

$$S=f(t).$$

3. 图示法

把自变量 x 和函数 y 分别当作坐标平面内点的横坐标和纵坐标，这些点所描出的平面曲线就表示了 y 和 x 的函数关系. 如某气象站利用自动记录仪测出该地一昼夜气温的变化情况，如图 1-7. 此图象表示气温 T 随时间 t 而变化的函数关系

$$T=f(t).$$

§1.3 函数的几何特性

用图象表示函数，使我们有可能借助于几何图形形象直观地研究事物的运动变化过程，它对于理解高等数学中的概念、方法和结论是十分重要的. 有些函数，将其几何图象绘制在平面直角坐标系中，它们往往会呈现出各种各样的特性.

一、单调性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义.

(1) 如果对任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在 D 上单调增加.

(2) 如果对任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 D 上单调减少.

单调增加或单调减少统称为函数的单调性,在集合 D 上具有单调性的函数,称为 D 上的单调函数.

注 1 所谓函数的单调性,总是相对集合 D 来说的,D 可以是整个定义域,也可以是定义域的某一部分,如函数 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$内单调增加,在$(-\infty,0)$内单调减少,可称$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$为函数 $y=x^2$ 的两个单调区间,但是 $y=x^2$ 在整个定义域$(-\infty,+\infty)$内并不是单调函数.

注 2 在区间(a,b)内单调增加或减少的函数,在几何上体现为在(a,b)范围内 $y=f(x)$的图象是一条沿 x 轴正方向上升或下降的曲线,如图 1-8、图 1-9.

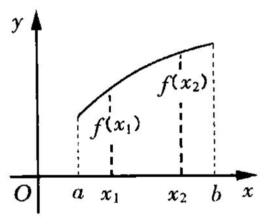

图 1-8

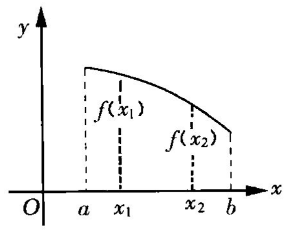

图 1-9

例 1 讨论函数 $y=\lg x$ 在整个定义域$(0,+\infty)$内的单调性.

解 任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,因为

$$\lg x_1-\lg x_2=\lg\frac{x_1}{x_2}<0\left(\frac{x_1}{x_2}<1\right).$$

因此,$y=\lg x$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

例 2 考察函数 $y=2^{x^2}$ 的单调性.

解 任取 x_1,x_2,因为恒有 $y>0$,所以

$$\frac{y_2}{y_1}=2^{x_2^2-x_1^2}=2^{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}.$$

当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$ 时,$\frac{y_2}{y_1}>1$,即 $y_2>y_1$,因而 $y=2^{x^2}$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的;

当 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$,且 $x_1<x_2$ 时,$\frac{y_2}{y_1}<1$,即 $y_2<y_1$,因而 $y=2^{x^2}$ 在$(-\infty,0)$内是单调减少的.

所以函数 $y=2^{x^2}$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

二、有界性

定义 1.3 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在某正数 M,对任意的 $x\in D$ 都有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 D 上有界,否则称 $f(x)$在 D 上无界.

注 1 集合 D 可以是$f(x)$的整个定义域,也可以是定义域的一部分,若 $f(x)$在整个定义域上有界,则称 $f(x)$为有界函数.

注 2 几何上,$f(x)$在 D 上有界表现为 $f(x)$在 D 内的图形夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间,如图1-10.

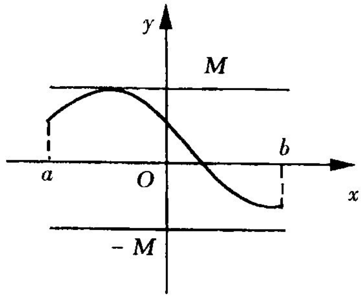

图 1-10

例 3 函数 $y=\ln x$ 在$[1,2]$上有界,而在$(0,1)$内无界,在$[1,+\infty)$内也是无界的.

函数 $y=\sin x$ 是有界函数,因为在整个定义域$(-\infty,+\infty)$内,对任何 x,恒有$|\sin x|\leqslant 1$.

注 3 若函数 $f(x)$在集合 D 上恒有 $f(x)\leqslant M$ 或 $f(x)\geqslant -M$,则称此函数在 D 上有上界或有下界.

例 4 函数 $f(x)=-x^2$ 在其整个定义域$(-\infty,+\infty)$内有上界,且上界 $M=0$,如图1-11;而函数 $f(x)=x^2-1$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内有下界,且下界 $-M=-1$,如图1-12.

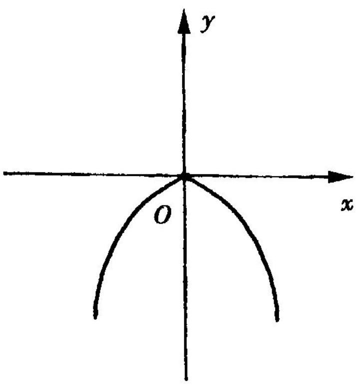

图 1-11

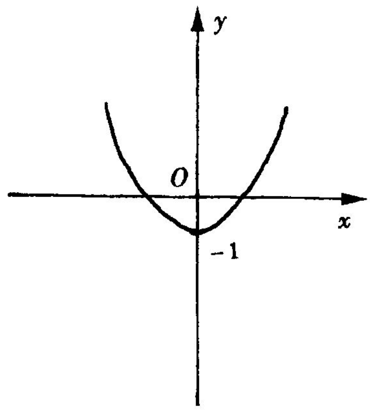

图 1-12

例 5 判断函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$的有界性.

解 由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 知 $x^2+1\geqslant 2x$,所以在函数的整个定义域$(-\infty,+\infty)$内任一点 x,恒有

$$|y|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2x}\right|=\frac{1}{2}.$$

因此函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$为有界函数.

三、奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，都有

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数.

注 几何上，奇函数的图形关于坐标原点对称，如图 1-13 所示；偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-14 所示.

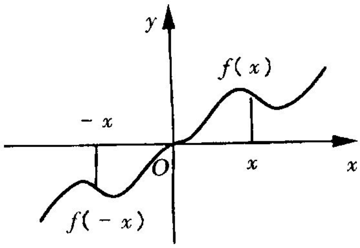

图 1-13

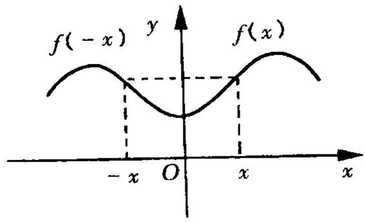

图 1-14

例 6 $y=x+x^3$，$y=\sin x$，$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$均为奇函数.

$y=x^2+1$，$y=\cos x$，$y=\dfrac{\sin x}{x}$，$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$均为偶函数.

而 $y=x^2+x^3$ 既不是奇函数也不是偶函数，称之为非奇非偶函数.

例 7 判断 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性.

解 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\ln(x+\sqrt{x^2+1}).\end{aligned}$$

即有
$$f(-x)=-f(x),x\in(-\infty,+\infty).$$

所以函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数.

四、周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 T，使得对于任意的 $x\in D$，有

$$f(x)=f(x+T)$$

成立，则称 $f(x)$为周期函数，满足上述等式的最小正数 T 称为 $f(x)$的周期.

注 1 从定义可知，如果 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $2T$ 也是 $f(x)$ 的周期，因为 $f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x)$. 用归纳法可推出，$kT$($k$ 为正负整数)均为 $f(x)$ 的周期，即

$$f(x+kT)=f(x).$$

注 2 几何上，周期函数图形的特点是自变量每增加或减少一个周期 T，图形重复出现，如图 1-15.

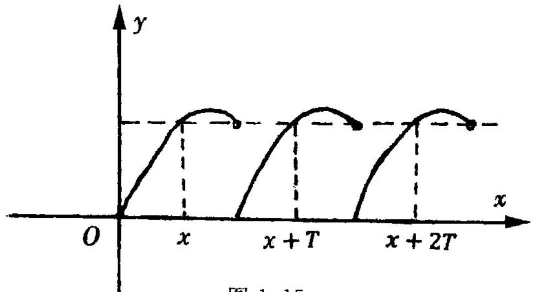

图 1-15

常见的周期函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的周期均是 2π，$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的周期都是 π，而函数 $y=A\sin(Bx+C)+D$ 的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{|B|}$.

例 8 求函数 $y=\sin\dfrac{x}{2}$ 与 $y=\sin^2 x$ 的周期.

解 因为

$$\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\frac{1}{2}(x+4\pi),$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\cos 2(x+\pi)+\frac{1}{2},$$

所以 $y=\sin\dfrac{x}{2}$ 的周期 $T=4\pi$，$y=\sin^2 x$ 的周期 $T=\pi$.

§1.4 反 函 数

在两个变量的函数 $y=f(x)$ 关系中，自变量和因变量的地位是相对的，不仅要研究变量 y 随 x 的变化而变化，有时还要研究变量 x 随 y 变化的情况. 例如，在某商品的销售中，已知商品的价格为 k，如果想从销售量 x 来确定销售收入 y，那么 x 是自变量，y 是因变量，其函数关系为

$$y=kx.$$

相反，如果想从销售收入确定其销售量，就把 y 取作自变量，x 取作因变量，并由上式得出函数关系为

$$x=\frac{y}{k}.$$

我们把 $x=\dfrac{y}{k}$ 称为 $y=kx$ 的反函数.