

理论声学 (修订版)

Theoretical Acoustics

张海澜 编著

理论声学 (修订版)

Lilun Shengxue

张海澜 编著

35746-00

内容简介

本书系统地介绍了声学的基本理论和研究方法,着重介绍了近几十年来的新发展。全书大致分为两部分。第一部分是与声学有关的振动理论;第二部分是声学理论,包括声传播、辐射、散射、声波导和房间声学等基本内容,还包括低频和高频近似、固体中的声波、换能器、非线性声学 and 数值计算等方面的内容。

本书可作为研究生的理论声学课的教材,也可供相关专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论声学/张海澜编著. --2版(修订本). --北京:高等教育出版社,2012.7

ISBN 978-7-04-035746-2

I. ①理… II. ①张… III. ①声学-研究生-教材
IV. ①O42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 145557 号

策划编辑	王超	责任编辑	王超	封面设计	张志	版式设计	于婕
责任校对	王雨	责任印制	刘思涵				

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京人卫印刷厂		http://www.landaco.com.cn
开 本	787mm × 1092mm 1/16	版 次	2007 年 3 月第 1 版
印 张	34.75		2012 年 7 月第 2 版
字 数	660 千字	印 次	2012 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	69.00 元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 35746-00

修订版前言

作者从 2002 年开始在中国科学院研究生院讲授理论声学,至今已逾十年。这门课程介绍声的物理性质和声学的基本理论,在介绍传统内容的同时,特别注重声学理论的新发展。2006 年在课程讲义的基础上整理成本书第一版出版,几年后即告售罄。这次再版,除了订正原书的一些错漏之处,有些内容重新组织编写,还增加了一些新内容,如一维声子晶体、声辐射压力等。

声学的内容非常丰富,牵涉很多方面,材料的取舍、前后贯通一致都颇费斟酌。由于作者知识面有限和时间仓促,错误和不足之处在所难免,希望能继续得到读者们的指正和帮助。

作者在教学和编书的过程中,得到中国科学院声学研究所和研究生院以及高等教育出版社的许多老师和同学的鼓励和帮助,特别是戴根华老师和张秀梅同学通读书稿,纠正了许多错误,作者对此深表感谢。

作者 2012 年 4 月于北京

目 录

绪论	1
第 1 章 简单振子的振动	8
§ 1.1 自由振动	8
§ 1.2 阻尼振动	15
§ 1.3 稳态的受迫振动	20
§ 1.4 受冲击脉冲力作用的受迫振动	31
§ 1.5 受一般外力作用的受迫振动	35
§ 1.6 简单振子的电路类比	47
习题	52
第 2 章 质点系的振动	54
§ 2.1 双质点三弹簧耦合振动系统	54
§ 2.2 例子	64
§ 2.3 有限个自由度系统的振动	69
§ 2.4 简正坐标中的振动	73
§ 2.5 质点系的等效电路	82
习题	84
第 3 章 弦和棒的振动	86
§ 3.1 无限长的弦和棒中的波	86
§ 3.2 无限长的弦的模式	100
§ 3.3 有限长的弦和棒的波动	109
§ 3.4 有限长弦的模式	119

II 目录

§ 3.5 非均匀弦的模式	132
§ 3.6 振动系统的模式理论	138
§ 3.7 弦和棒的电路类比	143
习题	146
第 4 章 膜的振动	147
§ 4.1 无限大膜的振动	147
§ 4.2 矩形膜	157
§ 4.3 极坐标中的解和圆形波	163
§ 4.4 圆形膜	168
习题	171
第 5 章 声波的基本性质	173
§ 5.1 声的基本概念	173
§ 5.2 声波方程	176
§ 5.3 平面声波	186
§ 5.4 平面波在平面界面上的反射和透射	198
§ 5.5 瞬态波和有限宽波束的反射和透射	211
§ 5.6 声波的吸收	219
§ 5.7 一维周期结构和声子晶体	223
习题	229
第 6 章 声波的辐射	231
§ 6.1 球坐标系的声波方程和点声源	231
§ 6.2 球形和圆柱形声源	245
§ 6.3 组合声源	261
§ 6.4 平面声源	273
§ 6.5 基尔霍夫-亥姆霍兹积分公式	291
习题	294

第 7 章 声波的接收和散射 296

§ 7.1 声波的接收	296
§ 7.2 圆球和圆柱对声波的散射	300
§ 7.3 多普勒效应	308
§ 7.4 非均匀介质的散射	312
§ 7.5 球面波在平界面上的反射和透射	317
§ 7.6 平面波在平界面边缘上的衍射	325
习题	328

第 8 章 声波导 330

§ 8.1 声波导中的一维波	330
§ 8.2 层状声波导	339
§ 8.3 管状声波导的模式	349
习题	360

第 9 章 房间声学 362

§ 9.1 房间声场的模式	362
§ 9.2 统计声学 and 扩散声场	373
习题	379

第 10 章 低频声学系统的集总参数模型 380

§ 10.1 集总参数模型的基本概念	380
§ 10.2 亥姆霍兹共鸣器及其应用	386
§ 10.3 低频管道系统	391
习题	393

第 11 章 射线声学 395

§ 11.1 射线的基本概念	395
§ 11.2 均匀介质中的射线	401
§ 11.3 不均匀介质中的射线	406

IV 目录

§ 11.4 焦线附近的声场	410
§ 11.5 运动介质中的射线	421
习题	425
第 12 章 固体中的声波	426
§ 12.1 固体介质的弹性性质	426
§ 12.2 固体中的声波方程	438
§ 12.3 平面波在平界面上的反射和透射	454
§ 12.4 声波导	462
§ 12.5 声表面波	471
§ 12.6 细梁和薄板的低频近似理论	476
习题	489
第 13 章 换能器基础	490
§ 13.1 力学声学混合类比电路	491
§ 13.2 电声换能器	495
§ 13.3 电声换能器的一般理论	503
习题	507
第 14 章 非线性声学基础	508
§ 14.1 一维的非线性行波	508
§ 14.2 微扰法在非线性声学中的应用	514
习题	522
第 15 章 声学中的数值计算	523
§ 15.1 有限差分法	524
§ 15.2 有限元方法	536
§ 15.3 其他几种计算方法	542

绪论

1. 声的基本概念

声即声音,通常指人耳能够感觉到的空气振动。广义地说,声音是各种弹性介质中的机械波,包括人耳不能感知的振动。声音不能在真空中传播,只能通过具有弹性的介质传播。介质可以是各种气体、液体和固体。例如,潜在水里的人也能听到声音,附耳于铁轨上可以听到远处的火车声。

我们生活在充满声音的世界里。声和日常生活的关系非常密切。语音是人类交换和获取信息的重要手段。优美的音乐可以陶冶性情,噪声能破坏情绪,甚至影响健康。大自然中充满了各种各样的声音,如风雨雷电、各种动物的叫声、江河湖海的水声等,每时每刻地包围着我们。随着科学技术的发展,音响的录放处理、噪声控制、超声治疗和诊断、工业超声检测和加工、水下声呐、语音处理和通讯等声学技术在人类生活中的作用越来越大。

声音是由物体的振动产生的。产生声音的物体称为声源。声源的振动,先在其附近的局部介质中产生扰动,使一部分介质发生弹性变形,并开始离开平衡位置运动。这个扰动必然推动周围的介质,一方面使周围介质也发生运动,同时周围介质的反作用力又使先产生扰动的部分回到平衡位置。由于介质具有惯性,回到平衡位置后介质会“过冲”,产生相反方向的扰动。每一部分介质的扰动都会推动周围介质运动,同时周围介质产生反作用力,使运动的介质又趋向平衡位置。于是在介质弹性和惯性的联合作用下,声源附近的介质先在平衡位置附近振动,被它推动的周围介质随之振动,同时不断推动更远的介质产生振动。距离越远的介质的振动越为滞后。这样各部分的介质都在平衡位置附近振动,不断地压缩和膨胀,伴随着介质的密度和压强不断变化。图 0.1 是这个过程的示意图,这种由近及远向周围传播的机械振动就是声波。声波存在的空间是声场。声波传播的时候,介质的质点本身没有宏观的运动,只在平衡位置附近振动。当声波到达人耳时,引起鼓膜振动,产生听觉。声波牵涉到的是质点位移、速度、密度和压强等力学量,因此声波是机械波。

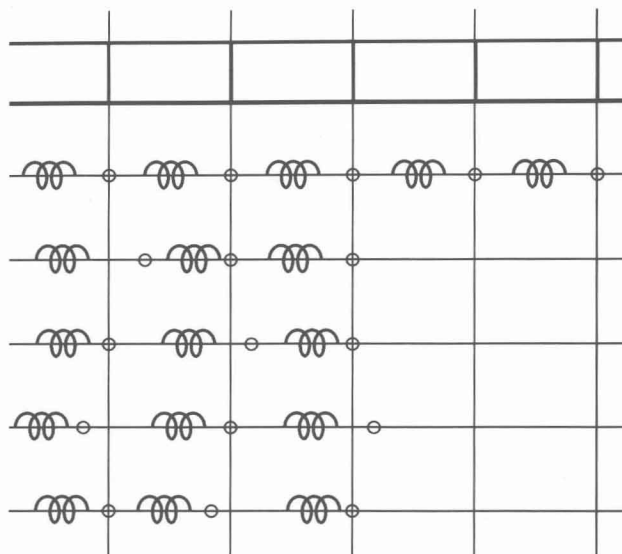


图 0.1 声波示意图

声音传播的时候,介质振动的频率即介质质点每秒钟振动的次数,是声音的频率 f ,它是声波的基本参数,单位是赫兹,简称赫,记作 Hz。频率的倒数是周期 $T = \frac{1}{f}$,它是完成一次振动所需要的时间。声波传播的速度 c 由介质的性质决定,常见的介质的声速从几百米每秒到几千米每秒不等,最高的声速可以达到上万米每秒。声波的波长 λ 是声波振动一个周期时传播的距离,频率、声速和波长之间的关系是

$$c = f\lambda$$

图 0.2 是声波和电磁波的频率与波长之间的大致关系。图中横轴是频率,纵轴是波长。上面一条斜线是电磁波的频率与波长的关系,下面一条斜线是声波的频率与波长的关系。由于声波比电磁波的速度低 5 个数量级,因此声波的波长比同样频率的电磁波小得多。

现代声学研究的频段约为 $10^{-4} \sim 10^{14}$ Hz。频率低于 20 Hz 的声称为次声,大气中重力对于频率低于 0.003 Hz 的声波有重要的作用,这种声波称为重力波。至今人类测量到的次声的最低频率达到 0.000 1 Hz,周期是 3 h,波长是 3 400 km(地球直径大约是 13 000 km)。人耳能听到的声音的频率范围一般为 20 Hz ~ 20 kHz,称为可听声。频率高于 20 kHz 的声称为超声。狗、海豚、蝙蝠等动物可以听到一些超声。实验室里可以产生频率高达 10^{13} Hz 的声波,对应的波长为零点几纳米($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$),相当于原子间的距离。人虽然不能听到次声和超声,但是次声

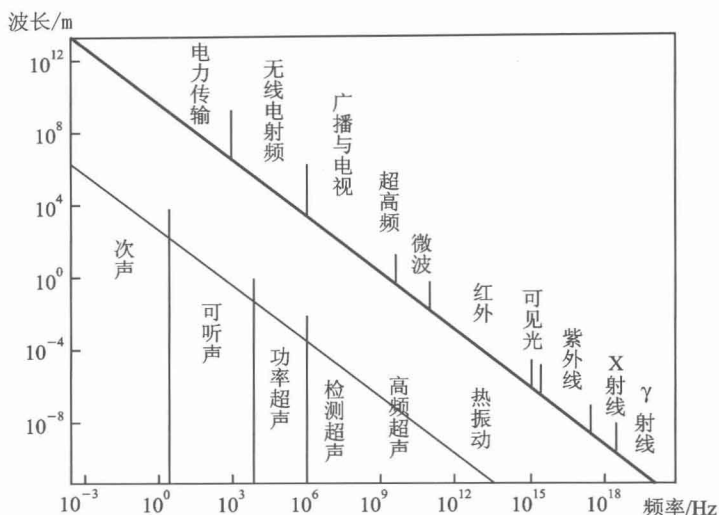


图 0.2 声波和电磁波的频谱

和超声在人类的活动中起着重要的作用。次声、可听声和超声都是声学研究的重要领域,它们有许多共同的规律,本书介绍的是各种声现象的基本规律。

在许多实用的场合,声波的波长和周围的物体的尺度相当,这种波动现象的研究最为复杂和困难,给声学带来许多挑战,产生了许多有趣的结果。

2. 声学 and 它的历史

声学是研究声音的性质及其发生、传播和接收的规律的学科,它是物理学的一个分支。声音是人类最早研究的物理现象之一,声学是物理学中历史最悠久而当前仍然十分活跃的一个学科。

人类很早就注意到声现象,在我国和世界上几个远古文明中都产生了对声音的描述,都认为声音是由物体振动产生的,在空气中以某种方式传到入耳,引起人的听觉。几乎 2000 年前中国和西方都有人把声与水面波纹相类比,注意到声音和波动的联系。这种类比是对声的本质的朴素而正确的认识。人类历史上对于光、热、磁、天体运动等基本物理现象的认识都有漫长而曲折的过程,但是对声音的认识基本上没有出现什么重大的错误见解。

世界上最早的声学集中在音乐方面。我国的《吕氏春秋》就有乐律的记载,河南信阳出土的编钟是公元前 525 年铸造的,其音阶完全符合自然律。明朝朱载堉(音同“育”)于 1584 年提出的平均律,与当代西方乐器制造中使用的乐律完全相同,但比西方早 300 年。

对声学的系统研究是从 17 世纪初伽利略研究单摆周期和物体振动开始的。从那时起许多著名的物理学家和数学家都对研究物体的振动和声的原理做出了重要的贡献。1635 年有人利用远处的枪声测量声速。以后测量的方法不断改进,1738 年巴黎科学院用炮声测量空气中的声速,得到 0°C 时的声速为 332 m/s , 与现代测量的准确数值 331.45 m/s 非常接近,误差只有千分之一。当时测量的“声学仪器”只有跑表和人耳,的确是一个了不起的成就。牛顿在 1687 年出版的《自然哲学的数学原理》中认为,振动物体推动邻近介质运动,后者又推动它的邻近的介质,这个过程不断重复,形成声波。经过复杂的推导,他得到声速等于大气压与密度之比的平方根。欧拉在 1759 年根据这个概念提出更清楚的分析,得到了牛顿的结果。但是由此算出的声速只有 288 m/s ,与实验值相差很大。达朗贝尔于 1747 年首次导出弦的波动方程,并预言可用于声波。1816 年,拉普拉斯指出只有在声波传播中空气温度不变时牛顿的推导才是正确的,而实际上声波传播中空气的密度变化很快,不可能是等温过程,而应该是绝热过程,因此牛顿的结果必须修改,声速的平方应再乘上比热比(定压比热与定容比热之比)。由此算出的声速与实验结果完全一致。

19 世纪末以前,人类只能用耳朵直接接收声波。人耳能听到的最低声强大约是 10^{-12} W/m^2 ,在 $1\,000\text{ Hz}$ 时相应的空气质点振动位移大约是 10^{-11} m ,只有空气分子直径的十分之一。19 世纪中就出现了不少关于人耳解剖和功能的研究,但时至今日人类还没有完全掌握听觉的整个过程。虽然人们对声波通过听觉器官刺激神经系统到达大脑皮层的过程有所了解,但是对于大脑皮层如何进行分析、处理、判断等问题的认识还很不够。人们掌握了音调和频率的关系后,对人耳听觉的频率范围和灵敏度有了不少的研究。欧姆于 1843 年提出人耳把复杂的声音分解为谐波分量,并按谐波的强弱判断音品的理论。这一时期声学的另一个重大发展是为了改善房间、教室、礼堂、剧院等封闭空间的音响效果,出现了研究室内音质的建筑声学。1900 年赛宾得到混响公式,使建筑声学成为一门近代的科学。

1877 年瑞利出版了《声学原理》,系统总结了 19 世纪以及前两三百年间的大量声学研究成果,为现代声学的发展奠定了基础。

3. 现代声学

“许多人看了瑞利的《声学原理》以后觉得声学的所有问题都已经研究过了,以后也许只有工程技术问题了,但实际上完全不是这样。20 世纪,特别是 20 世纪下半叶,声学有了突飞猛进的发展,面貌一新。”^①

对自然和人为的声现象的观察、测量和控制的实验,是声学研究的出发点。

^① 关定华. 神秘的声音世界. 济南: 山东教育出版社, 2001: 39.

早期观察声现象的工具完全依赖人耳。到 20 世纪,电子学和计算机科学不断发展,出现了各种电声换能器和电子仪器设备。近年来,数字化、计算机化在声信号的获取、存储和处理能力上产生了质的飞跃,这些为声学研究的发展提供了前所未有的条件,大大扩充了我们观察和认识声音的能力。现在人们用仪器测量可听声的精度和灵敏度大大超过了人耳的能力,而且还能够测量和记录人耳不能感知的次声和超声。声音的记录和重放技术,使我们能够对声音进行反复深入的研究,包括采用大量数值处理、统计分析和模式识别的方法,把研究工作提高到一个新的水平。观察和实验虽然不是本书的主要内容,但是所有的研究课题根本上都是来源于实际,而所有的理论研究结果也要接受实际的检验,并在实际中实现自身的价值,因此实验确实是声学研究的最重要的部分。

20 世纪下半叶声学发展的一个重要特点是实际需求的强烈推动。在很长的一个历史时期内,声学主要是为人耳服务的。人耳是非常灵敏的感觉器官,但却不是一个精确的接收器,对于声音的频率或强度的微小变化不是很敏感,因此传统声学对精度要求一直比较低,声学也一度被称为分贝的科学。但是技术的发展提高了检测声波的水平,需要更精确的信息,不再满足于分贝的误差。例如在声学检测领域,为了获得更精确的检测结果,必须研究声波波形在传播中的变化规律,在许多领域人们要求声学理论能够提供给定条件下声信号的具体波形,要求理论结果和实验波形在细节上能够一致。这种需求大大促进了声学的实验技术和理论的发展。

当前,人们可以产生、接收和利用不同频率、波形和强度的声波,声学研究的范围远非昔日可比。现代声学中最初发展的分支就是建筑声学 and 电声学以及相应的电声测量。以后,随着频率范围的扩展,又发展了超声学和次声学。由于手段的改善,对于听觉的研究不断深入,发展了生理声学和心理声学。对语言和通信广播的研究,发展了语言声学。在第二次世界大战中,开始把超声用到海下,使水声学得到很大的发展。20 世纪以来,特别是 20 世纪 50 年代以来,全世界由于工业和交通的巨大发展出现了严重的噪声环境污染问题,从而促进了噪声、噪声控制、机械振动和冲击研究的发展。随着高速大功率机械应用日益广泛,非线性声学受到普遍重视,这方面还面临着许多复杂和困难的问题,理论体系还没有建立起来,是当前声学基础研究的一个重要前沿。此外还有音乐声学、生物声学等,逐渐形成了丰富多彩的现代声学体系。当前声学的的一个特点是它和其他科学技术互相交叉,渗透到人类生活的每一个领域。

由于各种实际需求的推动,随着实验手段的不断革新,在 20 世纪,声学的理论研究也有了很大的进步。理论研究的基本思路是在实验的基础上建立各种物理和数学的模型,通过推导,得到各种形式的解。对理论研究得到的严格的和近似的解析解的分析能够总结出声学规律,应用于实际问题。但是,在许多问题中

声波的波长和物体的尺度相当,能够应用几何光学一类的近似理论的情况不多,因此声学理论问题比较困难。这个挑战性的方向在 18、19 世纪吸引了许多杰出的数学和物理学家,创建了许多令人赞叹的理论。然而,这些理论往往比较复杂,需要很多冗长的数学推导,而且往往是针对比较理想的物理模型建立的,因此虽然这些理论能够揭示一些规律,激发人们的灵感,但是应用范围有限,往往不能直接用于大量比较复杂的实际问题。总的来说,许多复杂的理论带有比较强烈的学院色彩。为了解决复杂的实际问题,人们从实验和理论工作中归纳出来一些近似而简单的经验公式,这些公式在很长的一段历史时期内发挥了很大的作用。

但是技术的发展要求更深入的研究,要求理论分析能够提供更精确的结果,特别是在复杂的实际条件下的声学现象。这些复杂的条件包括介质的复杂的性质和不规则的复杂的几何形状,对于这些问题数值计算发挥了不可替代的作用。早期的研究在得到解析公式后也会对一些具体情况做数值计算,以期得到形象的结果。但是当时的计算能力很弱,直到三四十年以前算盘和对数计算尺等机械式的计算器还是主要的计算工具,数值计算研究水平非常低,基本上是理论研究结果的少量的计算例子,往往作为理论研究的附属,不能成为一个重要的方面。近年来计算机的发展非常迅速,许多以前难以想象的计算今天在个人电脑上几分钟就可以完成,计算声学已经成为一门新兴的重要的声学分支。一方面可以对理论结果做大量的计算,得到直观形象的定量结果,总结规律。另一方面可以计算没有解析结果的复杂问题,为实际问题提供依据。同时,计算方法方面也提出了许多新的问题,新的方法不断出现,有关的计算理论不断发展。

20 世纪是物理学大发展的时代,随着近代物理学的发展,出现了泛函分析等一些新的数学分支。到 50 年代以后,泛函分析渐趋成熟,80 年代开始进入本科和研究生教学的范围。泛函分析是量子力学的基石,也是许多数值计算和分析的基础,而振动理论一直是泛函分析最重要的应用领域之一。新的数学工具帮助我们发现各种不同的振动系统本质上的共同点,使我们从更高的角度更深刻地认识声学问题,提高了理论声学的研究水平。

瞬态问题的研究也是近代声学的特点。传统声学的研究重点是周期振动的声波和声场,即稳态问题。一方面稳态问题比瞬态问题简单,另一方面音乐语言等声学现象主要是稳态的声学问题。但是在近年的工程应用中出现了大量的瞬态问题,如各种声学检测中主要用的是脉冲波。同时,计算机、数值计算以及信号处理等新兴学科的发展为瞬态声学的研究提供了有力的手段。对于瞬态声波和声场的研究不但对实际工作非常重要,而且对于深入认识声学现象的一些概念和理论问题有着重要的学术意义。

主要参考书和网站

马大猷. 现代声学理论基础. 北京: 科学出版社, 2004.

杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础. 第2版. 南京: 南京大学出版社, 2001.

Pierce Allan D. Acoustics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1981.

莫尔斯 P M, 英格特 K U. 理论声学上、下册. 北京: 科学出版社, 1984, 1986.

Dan Russell. <http://www.kettering.edu/~drussell/Demos.html>.

第 1 章

简单振子的振动

声波是介质振动的传播,产生声音的声源发声时都在作机械振动,因此声学
和机械振动有着密切的关系。著名的声学家莫尔斯认为整个声学可以说就是振
动学。本书从研究简单的机械振动开始。

力学中把尺度很小的物体看做质点。在声学中说的尺度的大小是和波长相
比较而言的。当物体的尺度比波长小很多,物体的各部分的运动是一致的,可以
看做质点,运用所谓集总参数系统的模型来研究。如果振动的幅度很小,采用线
性近似,由此建立起线性振动的理论。一个质点受线性弹簧的作用而振动,构成
简单振子,是最简单的振动系统,本章研究这种最简单的情况。

虽然日常碰到的各种振动系统大多比简单振子复杂得多,但是,简单振子的
许多运动规律和研究方法是研究复杂系统的基础。因此这一部分介绍的研究方
法和基本规律是学习整个声学的重要基础。

§ 1.1 自由振动

1. 简单振子的自由振动

图 1.1 是由弹簧和质点组成的简单振子系统。质点的质量为 m ,在 x 方向运
动。质点受弹簧的作用,弹簧的另一端固定。质点的平衡位置是坐标的原点 $x = 0$ 。
除了弹簧的作用力外质点不受其他外力的作用。理想的线性弹簧在伸长或压缩发生
形变时,它产生的拉力或推力与形变成正比,
即满足胡克定律。当质点的位置是 x 的时
候,弹簧对质点的作用力是 $f = -Kx$,负号表

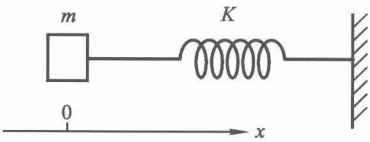


图 1.1 简单振子系统

示力和质点位移方向相反。 K 是劲度系数, 它的倒数 $C_m = \frac{1}{K}$ 称为顺性系数或力顺。系统在不受外力时的振动称为自由振动, 例如外界作用力在引起系统振动后停止作用, 系统继续振动, 就是自由振动。不考虑弹簧的质量, 质点自由振动的运动方程是

$$m\ddot{x} = -Kx \quad (1.1)$$

这里用字母上的一点表示对时间求导数, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, 两点表示对时间求二阶导数。

(1.1) 可以写成

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.2)$$

式中

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \quad (1.3)$$

式(1.2)确定了质点的运动规律, 但是要确定质点的具体的运动, 式(1.2)是不够的, 还需要补充条件, 例如可以规定某一时刻(假定是 $t=0$)的质点位置

$$x(0) = x_0 \quad (1.4)$$

和运动速度

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (1.5)$$

式(1.4)和(1.5)是初始条件, 它们和(1.2)一起确定质点的运动。

式(1.2)是一个二阶线性常系数的常微分方程。线性问题的基本性质是叠加性。如果 $x_1(t)$ 是初始位移 x_{01} 和初始速度 v_{01} 的解, $x_2(t)$ 是初始位移 x_{02} 和初始速度 v_{02} 的解, 则 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ 是初始位移和初始速度分别为 $\alpha x_{01} + \beta x_{02}$ 和 $\alpha v_{01} + \beta v_{02}$ 的解。

对于线性的常微分方程可以用泰勒级数求解。如果把位移 $x(t)$ 在 $t=0$ 展开

$$x(t) = x(0) + t\dot{x}(0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{x}(0) + \frac{1}{6}t^3\dddot{x}(0) + \cdots \quad (1.6)$$

为了求出 $x(t)$, 需要它在 $t=0$ 时的各阶导数。把式(1.2)对 t 求导 $n-2$ 次得到

$$\frac{d^n x}{dt^n} = -\omega_0^2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}}$$

对于确定的 $t, x(t)$ 的偶数阶导数和奇数阶导数分别组成公比为 $-\omega_0^2$ 的等比级数。利用(1.4)和(1.5)得到 $t=0$ 的偶数阶导数是 $\frac{d^{2n} x}{dt^{2n}} = (-\omega_0^2)^n x_0$, 奇数阶导

数是 $\frac{d^{2n-1} x}{dt^{2n-1}} = (-\omega_0^2)^{n-1} v_0$ 。代入(1.6), 得到