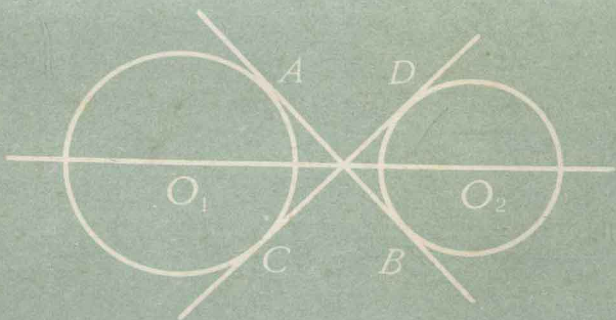
初中数学基础知识复习

杨大淳 刘森 等编



测绘出版社

初中数学基础知识复习

大　淳　刘　东　等编

测　绘　出　版　社

内 容 提 要

本书是参照《全日制十年制学校中学数学教学大纲》(试行草案)及现行初中数学课本的内容编写的。目的是帮助初中学生和具有初中数学程度的职工和知识青年系统复习和掌握初中数学基础知识。

内容按知识系统分为代数、平面几何、平面三角的解三角形，以及平面解析几何的直线和圆的方程四部分。这本书简明扼要地整理和归纳了有关基础知识，并选配了典型的例题、习题，可以帮助读者掌握初中数学的基础知识，提高解题的能力。

本书也可作为初中学生毕业复习之用。

初中数学基础知识复习

杨大淳　刘东等编

*

测绘出版社出版·发行

中国人民解放军第三二〇九工厂印刷

*

开本 787×1092 1/32·印张 7 ·字数157千字

1981年4月第一版·1981年4月第一次印刷

印数1—250,000册·定价0.57元

统一书号：13039·新203

说　　明

为了帮助初中学生和具有初中数学程度的职工和知识青年在较短的时间内，系统复习初中阶段的数学知识，我们参照《全日制十年制学校中学数学教学大纲》(试行草案)及现行课本，编写了这本书。

本书将初中数学按知识系统，分为代数、平面几何、三角、解析几何四部分。每个部分又分为若干专题，对基础知识进行了归纳，选配了典型的例题和一定数量的练习题，各部分最后配有习题，使读者既能抓住重点，进行比较全面地、系统地复习；又能通过例题、习题深入地理解概念，熟悉定理、法则、公式的运用，提高分析问题和解决问题的能力。

使用本书时，应注意弄清概念的涵义和定理、法则、公式的来龙去脉，从而掌握数学知识的内在联系。对一些主要定理、法则要独立练习推证，因为这些定理、法则的推证方法，具有普遍意义。同时通过对主要定理、法则的推证，可以更清楚地理解和掌握这些基础知识。

典型例题的解法，着重体现了有关基础知识的运用、解题方法的某些规律以及解题的要求。学习例题时，首先应自己独立进行演算和论证，然后与本书所列解法对照，这样，可以提高自己运用基础知识解题的能力。

练习和习题应在熟悉有关基础知识的基础上进行演算，以便对基础知识加深理解和进一步提高技能技巧。

参加本书编写工作的有杨大淳、刘东、王占元、刘嘉琨、刘培娜、门树慧、陈通鑫、何怡生、张克东、王长沛等同

志。

由于编写的时间仓促，这本书一定会有很多缺点，希望读者批评指正。

编者　一九八〇年十二月
于北京教育学院

目　　录

代 数 部 分

一、实　数

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数(自然数)
      - 零
      - 负整数
    - 分数(正、负)
      - 有限小数
      - 无限循环小数
  - 无理数(正、负)——无限不循环小数

(一) 自然数

(1) 质数与合数。

(2) 偶数　$2n$(n是整数)，奇数　$2n+1$(n是整数)。

(3) 分解质因数。

(4) 最大公约数、最小公倍数。

(5) 如果两个数的最大公约数是1，则称这两个数互质。

(二) 有理数

p、q是整数，且$q \neq 0$，形如$\frac{p}{q}$的数叫做有理数。

(三) 无理数

无限不循环小数叫做无理数，例如π、$\sqrt{2}$、$\lg 2$都是无理数。

（四）实数

有理数和无理数总起来叫做实数。

（五）数轴

规定了方向、原点和长度单位的直线叫 做 数 轴。对 于任何一个实数，数轴上都有唯一的一个 点 和 它 对应，反过来，对于数轴上的任何一个点，都有唯一的一个实数和它对应。

（六）相反数

数a和$-a$互为相反数；零的相反数是零。

（七）绝对值

正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零．即

$$|a|=\begin{cases}a, & (a\geqslant 0)\\ -a. & (a<0)\end{cases}$$

从数轴上看，实数的绝对值就是表示这个实数所对应的点，与原点的距离。

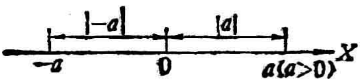


图　1-1

（八）倒数

两个数的乘积等于１，这两个数互为倒数。

（九）实数大小的比较

在数轴上表示的两个实数，右边的数总比左边的数大。

（十）算术根

在实数范围内，一个正数的正的n次方根，叫做算术根，记做$\sqrt[n]{a}$（$a>0$）．零的算术根是零。当$n=2$时，$\sqrt{a}$（这里$a>0$）表示a的算术平方根。

根据算术平方根的定义，可得$\sqrt{a^2}=|a|$．

（十一）有效数字

通过四舍五入方法得到的近似数中，从左边第一个不是零的数字起，到经过四舍五入后得到的最末一位数字止，所有的数字都叫做这个数的有效数字。

（十二）实数的运算法则和运算律（略）

例1　计算$|x-2|$．

解：当$x\geqslant 2$时，$|x-2|=x-2$；

当$x<2$时，$|x-2|=2-x$．

例2　化简$\sqrt{x^2+6x+9}$．

解：因为　$\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^2}$，

所以当$x\geqslant -3$时，$\sqrt{x^2+6x+9}=x+3$；

当$x<-3$时，$\sqrt{x^2+6x+9}=-(x+3)$．

例3　化简$\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}+\dfrac{|x-1|}{x-1}$．（$1<x<2$）

解：因为　$1<x<2$，

所以　$x-2<0$，且　$x-1>0$．

于是　$$原式=\frac{2-x}{x-2}+\frac{x-1}{x-1}=-1+1=0.$$

例4　解方程$|x-4|=5$．

解：当$x>4$时，原方程可化为

$$x-4=5,$$

所以　$$x=9.$$

当$x<4$时，原方程可化为

$$-x+4=5,$$

所以 $$x=-1.$$

当$x=4$时，产生矛盾情形，这时无解。

所以原方程的解为

$$x=9,\ x=-1.$$

例 5 计算

$$-2^2+(-2)^2-(-1)^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{1}{6}-|-1|.$$

解： 原式$=-4+4-1-1=-2.$

例 6 计算$\dfrac{1}{(-0.2)^2}\div\left[2\dfrac{1}{2}-\left(-1+2\dfrac{1}{4}\right)\right]\times 0.4.$

解： 原式$=\dfrac{1}{0.04}\div\left[2\dfrac{1}{2}-1\dfrac{1}{4}\right]\times 0.4$

$$=\frac{100}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{10}=8.$$

例 7 已知一个四位数的各位数字的和能被 3 整除，求证这个四位数能被 3 整除。

证明： 设这个四位数为$1000a+100b+10c+d$(其中 a、b、c、d取 0 、1 、2 、…… 9 ，且$a\neq 0$)，那么

$$\begin{aligned}&1000a+100b+10c+d\\=&(a+b+c+d)+999a+99b+9c\\=&(a+b+c+d)+9(111a+11b+c).\end{aligned}$$

因为$a+b+c+d$能被 3 整除， 9 也能被 3 整除，所以这个四位数必能被 3 整除。

例 8 证明$\sqrt{3}$不是有理数。

证明： 用反证法。

假定$\sqrt{3}$是有理数，那么$\sqrt{3}$可以表示成$\frac{p}{q}$的形式，$\frac{p}{q}$是既约分数（p、q是自然数，且互质）。即

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}.$$

即
$$3=\frac{p^2}{q^2}.$$

所以
$$3q^2=p^2.$$

显然，p是 3 的倍数。设$p=3k$，（k是自然数）

所以
$$3q^2=(3k)^2.$$

即
$$3q^2=9k^2.$$

所以
$$q^2=3k^2.$$

显然，q也是 3 的倍数。因此，$\frac{p}{q}$不是既约分数，这与假设相矛盾。

因此，$\sqrt{3}$不是有理数。

练　习

1. 能被2、3、5、9、11整除的数各有什么特征？以下各数能被上述哪些数整除？

57312，459140，4537665.

2. 把120，693，3894分解质因数。

3. 在五位数3427△中的△的位置上，应填上什么数字，就能成为（1）2的倍数；（2）3的倍数；（3）5的倍数；（4）9的倍数；（5）11的倍数。

4．用不等式表示x的范围：x是正数；x是负数；x是非负数。

5．绝对值是5的数有哪几个？如果$|x|=5$，求x．

6．如果$|x|<3$，且x是整数，求x的值；并将结果表示在数轴上。

7．在数轴上表示出$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$所对应的点。

8．解方程$|x-2|=4$．

9．计算：

（1）$\frac{|x|}{x}$；（2）$|2x-3|$；（3）$\sqrt{a^2+2ab+b^2}$；

（4）$|1-a|+|2a-1|$；（5）$|1-a|-|2a-1|+|a|$．

10．化简：$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{1+4x+4x^2}$．

11．已知$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，

化简$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-6x+9}$．

12．已知$1<x<3$，化简$|1-x|+\sqrt{x^2-4x+4}$．

13．具备什么条件时，下面的结论是正确的：

（1）两个数中，绝对值较大的数大；

（2）$-a$是负数；

（3）$a>-a$；

（4）$a>\frac{1}{a}$；

（5）$a^2>a$；

（6）$-|a|$是负数。

14．已知a、b都是实数，且$a\neq0$，

（1）试讨论a和$a+b$的大小；

（2）试讨论a和ab的大小。

15．下列各数都是由四舍五入的方法得到的近似数，分别指出它们的有效数字的个数。

（1）19.31；（2）36；（3）0.708；

（4）0.0250；（5）0.001022；（6）16.1400.

16．用四舍五入的方法，按下列各题的要求，求出各数的近似数。

（1）0.876(保留一位数字)；

（2）12.0952(保留四位数字)；

（3）0.62049(保留三位数字)；

（4）7202.9(精确到个位)；

（5）1.6478(精确到十分位)；

（6）0.0299(精确到千分位)。

17．计算：

（1）$-1-\{-2-[-3-(-4-5)]-6\}-7-(-8-9)$；

（2）$(-5.2)+(-3.8)-\{(-1.2)-[(-0.5)-(-0.7)]\}$；

（3）$\left(+33\frac{1}{3}\right)\times\left[(-2.5)\times(-7)\times(+4)\times(-3)\right]$；

（4）$(-100)\times\left(0.7+0.03-\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\right)$；

（5）$0.1\times\left[(-10)\times(-3)\times(-7)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{14}\right)\right]$；

（6）$\left[\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\times(-16)$；

（7）$(-7.5)\times\left(-11\frac{1}{9}\right)+(+7.5)\times\left(-1\frac{1}{9}\right)-$

$-(-7.5)\times 6$；

（8）$1\frac{1}{2}\times\left[3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1\right]-\frac{1}{3}\left[(-2)^2-\right.$

$\left.-(-4.5+3)\right]$；

（9）$\frac{2}{5}+2\frac{4}{9}\div\left[\left(7\frac{5}{12}-5\frac{3}{4}\right)\div 22\frac{1}{3}+10\times\right.$

$\left.\times\frac{5}{18}\right]-\frac{4}{5}$；

（10）$|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|-$

$-\sqrt{(-3)^2}$；

（11）$\left[\left(-0.25\div\frac{1}{4}\right)+(-7)\times 212\times 0-\frac{1}{2}\times\right.$

$\left.\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-5\frac{1}{7}\right)\right]\times(-3)^2$；

（12）$\dfrac{\left(9\frac{1}{4}-7\frac{2}{5}\right)\times 2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}}{\left(3\frac{1}{8}+4\frac{3}{20}-1\frac{5}{48}-5\frac{2}{5}\right)\div 3\frac{1}{12}}$.

二、代　数　式

（一）代数式

1． **定义**　用运算（指加、减、乘、除、乘方、开方）符号把表示数的数字和表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式。

用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值。

注意　代数式里的字母可取不同的数值，但是所取的数值不应当使代数式所表示的实际数量失去意义。如，代数式 $\frac{1}{x-1}$ 中，x 不能等于 1；又如在圆的面积公式 πr^2 中，r 不能取负数和零。

2． **代数式的分类**

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式——单项式、多项式}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

例 1　从含盐20%的盐水50公斤中把水分蒸发掉 a 公斤，试用代数式表示这时盐水的浓度，并指出字母 a 的取值范围。

解： 含盐20%的盐水50公斤中有纯盐 $20\% \times 50$（公斤），蒸发 a 公斤水分后，盐水为 $(50-a)$ 公斤。所以蒸发后盐水的浓度为 $\frac{50 \times 20\%}{50-a}$.

根据代数式的实际意义，a 的取值范围是 $0 \leqslant a < 50$.

例 2　用代数式表示一个数与它的倒数的平方和，并求当这个数是11时，这个代数式的值。

解：如果给定的数为a，那么它的倒数为$\frac{1}{a}$．所以这个数与它的倒数的平方和为$a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$．

当 $a=11$ 时，

$$a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=11^2+\frac{1}{11^2}=121\frac{1}{121}.$$

（二）整式

1． **有理式** 只含有加、减、乘(包括乘方)、除运算的代数式，叫做有理式。

2． **整式** 不含有除法或虽含有除法但除式中不含有字母的有理式，叫做整式。

3． **整式的四则运算**(略)

例3 化简：

$5-(1-m)-\{[1-(m-m^2)]+[1-(m-m^2+m^3)]\}$．

解：

$$
\begin{aligned}
&5-(1-m)-\{[1-(m-m^2)]+[1-(m-m^2+m^3)]\}\\
=&5-1+m-\{[1-m+m^2]+[1-m+m^2-m^3]\}\\
=&4+m-\{1-m+m^2+1-m+m^2-m^3\}\\
=&4+m-\{2-2m+2m^2-m^3\}\\
=&4+m-2+2m-2m^2+m^3\\
=&2+3m-2m^2+m^3.
\end{aligned}
$$

例4 计算：$(x^3-x^2y+xy^2-y^3)(x-y)$．

解：$(x^3-x^2y+xy^2-y^3)(x-y)$

$$
\begin{aligned}
&=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4\\
&=x^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3+y^4.
\end{aligned}
$$

例5 计算：$(8x^4-8x^2+7x-5)\div(2x^2-x+1)$．

解：

$$
\begin{array}{r l}
 & 4x^2+2x-5 \\ \cline{2-2}
2x^2-x+1 \Big) & 8x^4+0-8x^2+7x-5 \\
 & 8x^4-4x^3+4x^2 \\ \cline{2-2}
 & 4x^3-12x^2+7x \\
 & 4x^3-2x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & -10x^2+5x-5 \\
 & -10x^2+5x-5 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

所以商式 $=4x^2+2x-5$，余式 $=0$。

注意　按照 x 降幂排列，如果被除式有缺项要留空位。

如果一个多项式除以另一个多项式，余式为零时，就说这个多项式能被另一个多项式整除。

4．**乘法公式**

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

例 6　应用乘法公式计算下列各式：

（1）$(p-q+r)(p+q-r)$；

（2）$(m+n-2p)^2$；

（3）$\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$.

解：

（1）$(p-q+r)(p+q-r)$

$=[p-(q-r)][p+(q-r)]$

$=p^2-(q-r)^2$

$=p^2-q^2+2qr-r^2$.