2014命题人书系

考研数学 2

命题人

线性代数考试参考书

主编◎李擂　张宇　何英凯

请问这本书有什么特色

书中精选核心知识点和经典好题，采取“点—面—点”的总结归纳模式，把常考知识点贯通起来，帮助考生构建起知识网络和思维通路，明晰考点本原，快速提高解题能力！

那这本书适合哪个阶段使用呢？

适合强化阶段使用，搭配《考研数学命题人大纲配套精典1100题》，效果会更明显哦！

请问哪里可以买到呢？……

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学 2

命题人

线性代数考试参考书

主　编◎李　擂　张　宇　何英凯

副主编◎胡金德　张天德　张　新

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学命题人线性代数考试参考书／李擂，张宇，何英凯主编．—北京：北京理工大学出版社，2013.4

ISBN 978-7-5640-7537-8

Ⅰ．①考… Ⅱ．①李… ②张… ③何… Ⅲ．①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 058096 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（办公室） 68944990（批销中心） 68911084（读者服务部）
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市文阁印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米 1/16
印　　张／12.25
字　　数／220 千字
版　　次／2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷
定　　价／22.80 元

责任编辑／张慧峰
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

Preface 前言

从 1987 年到现在，考研已经走过了 27 个年头。对每年逾百万的考生来说，面对这一年一度改变命运、主动选择自己未来人生道路的机会，面对日益激烈、趋于白热化的竞争势态，我们需要破釜沉舟、豪赌一年青春的勇气，也需要咬紧牙关、坚持到底的决心，更需要科学的指导、合理的规划以及高效的复习方法。作为在教学第一线奋战多年的老师，我们时常被考生的努力与坚持所感动，也时常为不少考生复习方法和方向的偏差而惋惜。这种感动和惋惜催生了一种责任、一种期望，一种将我们多年积淀的教学成果传递开去的责任，一种让更多考生从容面对考研的期望。

线性代数是考研数学的必考科目，每年共考查五道试题：2 道选择题、1 道填空题、2 道解答题，满分 33～34 分。这个学科的特点是概念多、运算多、知识点之间相互渗透、相互关联、牵一发而动全身。考生在复习线性代数的时候往往会遇到三个主要障碍：一是对基本概念的理解不准确、不到位；二是不熟悉基本运算，计算错误率高；三是无法把握知识点之间的前后关系，知识体系混乱。

针对学科的特点以及考研数学实际的要求，我们策划了这本《考研数学命题人线性代数考试参考书》。**全书严格依据最新考试大纲的考试范围和历年真题对考生的能力要求进行编写，在编排和设计上力图为考生真实地呈现考试的具体要求，勾画一个清晰而准确的知识体系，以帮助考生提高复习效率，在最短的时间内实现整个学科的攻关，为冲击考研数学的高分打下基础。**

具体来说，本书有如下特点：

第一，重视整体知识框架的构建和知识体系内在逻辑关系的再现。考研数学对考生的综合能力要求较高，大多数考题综合性较强，要求做到对整个学科的整体把握、融会贯通。这一点在线性代数这个学科中体现得尤为明显。有鉴于此，我们在编写本书时非常重视考生知识体系的梳理和知识框架的搭建。

首先，本书在编排时，打乱了部分知识点原有的次序，而按照其逻辑关系和考试的具体要求进行了重新的组合与优化，更便于同学们系统地把握。如对秩相关的概念、公式和定理，在大多数线性代数辅导教材中是分散在整个学科各个章节中的，考生只能从这些零星的片段中片面地去认识，而无法形成一个全面的、整体性的认识。因此，我们在编写本书时，专门拿出了一讲，来对秩的相关考点做全面的介绍和系统的总结，帮助考生全面把握这一贯穿线性代数始终的核心考点。

其次，对线性代数大部分重要的概念（矩阵的可逆性、线性方程组、矩阵的相似对角

化等)，都力图从整个学科的所有章节的角度来予以阐释，帮助考生系统梳理本章知识体系，形成对学科知识的整体认识。

第二，重视考生对基本概念的理解和对基本运算的掌握。相对于其他学科，线性代数中的概念更为抽象，运算更为繁琐，每一年都有很多考生丢分在最基本的问题上。有鉴于此，我们在编写本书时更加注重对知识点精确的阐述和清晰的解释，对重要的概念、性质和定理均以"【注】"的方式，从不同侧面帮助考生理解和掌握。它们是我们多年教学经验的结晶，深信其必能对广大考生的复习带来巨大的帮助。

第三，重视思想方法的归纳和总结。在每一节中都有对本部分考点的解析和方法技巧的总结，所有的例题都按照考试的要求进行了归类，对主要的思想方法都有精妙的归纳总结，力求帮助考生精确认识考试的具体要求，最高效地掌握主要的解题思路和方法技巧。

第四，在每一讲的最后，有针对本讲主要内容和考点精选的练习题，帮助考生保持足够的训练量，达到考试对考生解题熟练度和准确度的要求。事实上，要想在考研数学中取得高分，足量的练习是必不可少的，我们建议考生在使用本书时，不但要独立完成每章最后的练习题，对所有的例题也要自己先做一遍再与书中所给的解题过程对照。

对于广大怀揣着梦想，有志于在考研数学中一试身手的同学，希望本书能成为你们复习线性代数过程中的良师益友。另外，由于时间仓促和编者本身水平有限，如果书中有不足乃至纰漏之处，希望广大考生与专家不吝批评指正。

本书答疑地址：新浪微博李擂 http://weibo.com/u/1919209457

编　者

Contents 目录

第 1 讲　行列式(基本内容)

行列式是线性代数中最基本的运算之一,其计算方法灵活多变,贯穿整个学科,出题方式非常多变,是考生在接触线性代数后面临的第一道关卡.本讲主要从行列式本身的内容来展开,先弄清楚行列式的基本定义、常用性质与核心定理,再在下一讲讨论行列式与其他章节的结合.

考试内容概要

一、行列式的概念与性质

(一)行列式的概念

1. 排列与逆序

排列:要定义行列式,首先要有排列的概念,而所谓的 n **级排列**,就是指将 $1,2,3,\cdots,n$ 这 n 个自然数打乱顺序之后按照任意次序排列起来的一个数组.例如:某期体育彩票的中奖号码 2531746 就是一个$\boxed{\text{7 级排列}}$.易知,n 级排列一共有 $n!$ 个.

逆序:在一个 n 级排列中,如果一个较大数排在一个较小数前面,我们就称这两个数构成一个**逆序**.对于逆序,我们感兴趣的是一个 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数,称为 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的**逆序数**,记作 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$.

如果 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数是偶数,则 $i_1 i_2\cdots i_n$ 称为**偶排列**;如果 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数是奇数,则 $i_1 i_2\cdots i_n$ 称为**奇排列**.

2. 行列式

n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是一种运算法则,它是行列式中所有取自**不同行不同列** n 项元素乘积的**代数和**.它由 $n!$ 项组成,其中每一项都是行列式中 n 个不同行不同列元素的乘积,将这 n 项的行数按照自然顺序排列,假设此时其列数为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$,当 $i_1 i_2\cdots i_n$ 为偶排列时,符号为正;当 $i_1 i_2\cdots i_n$ 为奇排列时,符号为负,也即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

【注】对于初学者来说，最困难的是正确理解行列式的定义，我们从如下五个方面予以说明：

(1)由于 n 级排列共有 $n!$ 个，可知 n 阶行列式的完全展开式中共有 $n!$ 项.

(2)要注意区分行列式和矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. 首先，从概念上讲，行列式是一个运算法则，其运算结果是一个数(或函数)，是展开式中 $n!$ 项的代数和，而矩阵是一个数表，二者从本质上是有区别的. 其次，从形式上看，行列式的行数和列数必须一样(即行列式都是"正方形"的)，而矩阵中两者可以不一样.

(3)行列式的定义中，最核心的是"不同行""不同列"以及"代数和"这三个限制语. 具体来说：行列式的完全展开式的 $n!$ 项中，每一项都是取自不同行不同列 n 项元素的乘积，而"代数"两字表示是有符号的(每一项的符号都是由其列指标排列的逆序数决定的).

(4)行列式的定义也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

$$= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{j_1i_1}a_{j_2i_2}\cdots a_{j_ni_n}.$$

(5)从定义出发可以直接推出二阶行列式、三阶行列式、上三角行列式和下三角行列式的计算公式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

它们是我们计算更复杂的行列式的基础. 考生可以尝试通过行列式的定义推导上述计算公式.

(二)行列式的性质

一般来说,直接按照定义计算行列式是很复杂的(展开式中有 $n!$ 项).但有小部分行列式的计算是比较容易的,如上三角(或下三角)行列式,我们在对行列式进行计算时,一个基本的思想就是将行列式变形成为这些简单的行列式.为此,我们需要知道在对行列式的矩阵进行各种初等变换时,行列式的值如何变化,这些内容就是行列式的性质,如下:

性质 1　将行列式的行和列互换后,行列式的值不变,也即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2　将行列式的任意两行(或两列)互换位置后,行列式改变符号.

推论 1　如果行列式有两行(或两列)相同,则行列式的值为 0.

性质 3　将行列式的某一行(或某一列)乘以一个常数 k 后,行列式的值变为原来的 k 倍.

推论 2　如果一个行列式的某一行(或某一列)全为 0,则行列式的值等于 0.

推论 3　如果一个行列式的某两行(或某两列)元素对应成比例,则行列式的值等于 0.

性质 4　如果行列式某一行(或某一列)的所有元素都可以写成两个元素的和,则该行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式的这一行(或列)分别为对应两个加数,其余行(或列)与原行列式相等.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 4　将行列式的一行(或列)的 k 倍加到另一行(或另一列)上,行列式的值不变.

【注】需要我们记住的一共是 4 条性质和 4 条性质的推论.利用这些结论,我们可以对行列式进行各种变换,将其化为我们需要的形式再进行计算.

二、行列式按行(列)的展开定理

由行列式的定义可知,行列式计算的难度是随着阶数的升高而迅速增大的.例如:二阶及三阶行列式都有比较简洁的计算公式,但四阶及以上的行列式就比较难写出一般的公式了.可见,如果有将高阶行列式化为低阶行列式的方法,对行列式的计算将是具有决定意义的.这一内容就是行列式按行(列)的展开定理.

(一)余子式

余子式实质上也是一个行列式,将某一元素 a_{ij} 所在的行和列划掉之后得到的 $n-1$ 阶行列式称之为 a_{ij} **的余子式**,记作 M_{ij},

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

给余子式加上符号 $(-1)^{i+j}$ 则成为**代数余子式**,记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

(二)展开定理

行列式的值等于其任何一行(或列)所有元素乘以其代数余子式后再求和,即

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

【注】该定理提供了通过低阶行列式计算高阶行列式的方法,可以说从根本上解决了行列式的计算问题.请看**2012年考研数学一第(20)题.**

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求 $|\boldsymbol{A}|$.

解 按照第一列展开得 $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=1-a^4.$

是不是相当easy!

这个例子虽然简单,但却说清楚了使用展开定理的一般原则:注意到第一列的元素只有两个是非零的,因此计算的时候,中间的两个零的代数余子式就没有必要计算了.一般来说,我们在计算行列式的时候,都希望行列式有这样的性质:某行或者某列只有个别元素非零,这样,使用展开定理就可以极大地减少计算量.而假设行列式没有这样的性质,我们则需要通过行列式的性质对行列式进行变形,人工地在行列式的某行或某列中"制造"出较多的零之后再进行展开.

行列式某一行(或列)的元素乘以自己的代数余子式再求和得到的是行列式的值,那么如果用某一行(或列)的元素乘以另一行(或列)对应元素的余子式再求和呢?

推论5 行列式的一行(或列)所有元素乘以另一行(或列)对应元素的代数余子式再求和所得结果为零,即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \qquad (i \neq k),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = 0 \qquad (i \neq k).$$

证明 以三阶的情况为例:

对于行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,如果用第一行的元素乘以第二行的代数余子式再求和则得到 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$.

注意到第二行元素的代数余子式在计算时会划掉第二行的元素,也就是说第二行元素的代数余子式是和第二行元素的取值无关的.因此,改变第二行元素的取值是不影响该式的.

我们把第二行元素改成 a_{11}, a_{12}, a_{13},得到新的行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,根据行列式按行展开定理,这个新的行列式按照第二行展开之后就得到 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$.

而由行列式的性质可知,$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$,故 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$.

【注】该证明过程体现了我们在处理代数余子式相关的求和问题中的一个基本的思想:即利用代数余子式的取值与其所在行与列的元素是没有关系的,反向运用展开定理,将若干个同行(或同列)代数余子式之和"升阶"成为一个 n 阶行列式,再利用行列式的性质进行计算.

(三)两个常用的公式

1. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

2. 拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|, \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶,n 阶方阵.

【注】上述两个公式中,范德蒙德行列式是行列式展开定理的推论;而拉普拉斯展开式则是对行列式展开定理的推广,它和展开定理的作用都是将行列式"降阶".考试对这两个公式的要求是记住公式的内容,并会运用它们计算对应的特定类型的行列式即可,证明过程不需要掌握.

典型例题

一、对行列式定义的考查

例 1 假设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3x & -1 \\ 2 & 5 & 3 & x \end{vmatrix}$，试计算 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 由行列式的定义可知，$f(x)$ 是一个 4 次多项式.

在 $f(x)$ 的展开式中，要取出 x^4，则只有对角线上四项相乘，也即 $2x\cdot x\cdot 3x\cdot x=6x^4$. 由于此时列指标的排列顺序为 1,2,3,4，逆序数为 0，可知 x^4 的系数为 6.

类似要取出 x^3，则只有 $a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{44}=x\cdot 1\cdot 3x\cdot x=3x^3$，由于此时列指标的排列顺序为 2,1,3,4，逆序数为 1，可知 x^3 的系数为 -3.

【注】这类问题，考试中直接考查并不多见，但它对我们理解行列式的定义是很有帮助的. 求解的思路是先通过"不同行、不同列"的限制确定取出的项，再通过逆序数确定符号.

例 2 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 由于该行列式中每一行有且仅有一个非零元，故行列式的完全展开式中也有且仅有一项非零，也即 $a_1a_2\cdots a_n$，它的列指标排列顺序为 $2,3,\cdots,n,1$，其逆序数为 $\tau(23\cdots n1)=n-1$. 故 $D_n=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n$.

二、低阶行列式的计算

1. 使用展开定理

例 3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

解 4 阶行列式没有直接的计算公式，故考虑先将其通过展开定理降阶再进行计算.

使用展开定理需要行列式的某行(或列)中只有一个或两个非零元，而行列式中并没有具备这种性质的行或列，故可以考虑先通过行列式的性质，人工地在行列式中"制造"出零，再进行展开.

为了避免出现分数的计算，先从行列式的元素中找一个"1"，再将该"1"所在的行或

列其余元素全化为0.例如,我们选定第一行第二个"1",将第一行其余元素化为0,再按照第一行展开得

$$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\2&0&2&2\\3&3&0&3\\4&4&4&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\2&0&2&2\\3&3&-3&0\\4&4&0&-4\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&2&2\\3&-3&0\\4&0&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&2&2\\3&-3&0\\4&0&-4\end{vmatrix}.$$

剩下的3阶行列式可以直接代公式计算,也可以再次展开,例如

$$原式=-\begin{vmatrix}2&2&2\\3&-3&0\\4&0&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&2&2\\3&-3&0\\0&0&-4\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4&2\\3&-3\end{vmatrix}=-72.$$

【注】这道题本身很简单,但却告诉了我们计算低阶行列式的一般思路:2阶或3阶行列式,一般可以直接计算;面对高于3阶的行列式或是直接计算有困难时,可以先使用展开定理降阶之后再计算.展开之前,一般还需要通过行列式的性质对行列式进行变形,将某一行(或列)化到只有一个非零元的形式.该过程一般可以总结为:找"1",化零,展开.

例4 解方程 $\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&2\\2&\lambda-3&-1\\2&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=0.$

解 细心的同学应该能注意到这实质上是后续讲义的内容:求矩阵的特征值.这一问题的计算方法在考试中极其关键,很多时候往往关系到一道大题的得分,请务必重视!!

理论上讲,本题是可以直接使用三阶行列式的计算公式的.

但这个方法一是效率太低,错误率太高;二是不利于求解方程,因为该方程是一个三次方程,求解时需要先将其分解为一个一次因子和二次因子的乘积.

有鉴于此,我们一般不建议大家在求解这类问题时蛮干,考试时这类问题的数据往往都是通过特殊处理的,故可以考虑利用行列式的性质先化简,再计算.

将第一行的-1倍加到第三行:$\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&2\\2&\lambda-3&-1\\2&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&2\\2&\lambda-3&-1\\5-\lambda&0&\lambda-5\end{vmatrix}.$

再将第三列加到第一列得$\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&2\\2&\lambda-3&-1\\5-\lambda&0&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\1&\lambda-3&-1\\0&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)^2,$

故解$\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&2\\2&\lambda-3&-1\\2&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=0$得$\lambda_1=5,\lambda_2=2$(2重).

【注】对上述思路的简单小结:我们一般的想法是先将行列式的某行化到只剩一个非零元再展开,要实现这一步,需要先在行列式中化出一个零来,此时,如果该零所在的行或列的另外两个元素具有一次的公因子,就可以利用它们的倍数关系再化出一个零,

进而进行展开(如:本题也可以考虑先将第二行的−1倍加到第三行).

再次强调一遍:这一方法极其重要,是特征值、特征向量以及二次型部分最重要的基本功之一.为了强化该方法,我们再看下面的例5(请同学们务必先自己动手完成再与解答过程对照).

例5 方程 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=0$ 有一个二重根,求 a.

解 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若 $\lambda=2$ 是方程的二重根,则有 $2^2-16+18+3a=0$,解得 $a=-2$;

若 $\lambda=2$ 不是方程的二重根,则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方式,从而 $18+3a=16$,解得$a=-\frac{2}{3}$.

2. 展开定理的推广:拉普拉斯展开式

例6 4阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于( ).

(A)$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$ (B)$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C)$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$ (D)$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

解 行列式中0很多,可以考虑利用展开定理计算(请自行完成),也可以先通过行列式的性质将这些0集中起来,再使用相关的公式计算.

先将第四行分别和第三行和第二行交换得 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix}$,

再将第四列分别和第三列和第二列交换得 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$.

注意到最后的行列式已经可以使用拉普拉斯展开式了.故有

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

故选(D).

【注】拉普拉斯展开式是分块矩阵行列式的一种计算公式,它们可以看做是展开定理的推广.事实上,它们在计算行列式中的作用与展开定理也类似,都是将高阶行列式降阶,利用分块矩阵的方法对行列式进行降阶往往比展开定理效率更高.一般来说,如果行列式中有较多的0,就可以考虑先通过矩阵的初等行变换将这些0集中起来,如果此时的行列式可以写成分块矩阵的形式,就可以利用公式进行计算.

例7 记 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(包括虚根)________.

分析 多项式根的个数等于其次数,根据行列式的定义,$f(x)$最高为4次多项式,但由于高次项有可能相互抵消,故仍需先利用行列式的性质进行化简.

解 求方程 $f(x)=0$ 的根的个数,即求 $f(x)$ 为 x 的几次多项式.

注意到行列式的每列元素中 x 的系数是大致相同的,故将第一列的 -1 倍分别加到第二三四列,得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1).$$

所以方程 $f(x)=0$ 的根的个数为2.

【注】对这类数据较为复杂的行列式,要先观察其元素排列的规律,然后以该规律作为突破口将行列式化简,再进行计算.

3. 形式先于内容:范德蒙德行列式

例8 计算 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}$.

解 由行列式的形式很容易联想到范德蒙德行列式.

注意到行列式的第一行与第四行对应元素之和均为 $a+b+c+d$,故可以将第一行加到第四行:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

再对后面的行列式经过三次交换，把第四行换到第一行即得

$$\text{原式}=-(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

【注】范德蒙德行列式是一个具有"排他性"的知识点：只能适用于与它具有类似结构或形式的行列式.因此，要使用范德蒙德行列式，应该做好形式与内容两方面的准备：首先从形式上获得认证，确定是否应该使用范德蒙德行列式；然后再关注行列式元素排列的规律，通过行或列之间的简单变形将行列式化为范德蒙德行列式的标准形式，再套公式进行计算.类似地，见下面的例 9：

例 9 计算 $\begin{vmatrix}a_1^3&a_1^2b_1&a_1b_1^2&b_1^3\\a_2^3&a_2^2b_2&a_2b_2^2&b_2^3\\a_3^3&a_3^2b_3&a_3b_3^2&b_3^3\\a_4^3&a_4^2b_4&a_4b_4^2&b_4^3\end{vmatrix}$ $(a_1,\cdots,a_4\neq0)$.

解 首先获得形式上的认同：这是一个应该用范德蒙德行列式计算的行列式.

再观察数据排列的规律，注意到每行的元素是成等比的规律递变的，为了将它变为范德蒙德行列式，可以在每一行提出公因式，将第一个元素变为 1.

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}a_1^3&a_1^2b_1&a_1b_1^2&b_1^3\\a_2^3&a_2^2b_2&a_2b_2^2&b_2^3\\a_3^3&a_3^2b_3&a_3b_3^2&b_3^3\\a_4^3&a_4^2b_4&a_4b_4^2&b_4^3\end{vmatrix}=a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3\begin{vmatrix}1&b_1/a_1&(b_1/a_1)^2&(b_1/a_1)^3\\1&b_2/a_2&(b_2/a_2)^2&(b_2/a_2)^3\\1&b_3/a_3&(b_3/a_3)^2&(b_3/a_3)^3\\1&b_4/a_4&(b_4/a_4)^2&(b_4/a_4)^3\end{vmatrix}$$

$$=a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3\prod_{1\leqslant i<j\leqslant4}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right).$$

4. 逆向思维：有关余子式的运算

例 10 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\2&3&4&1\\-1&2&3&2\\1&1&2&0\end{vmatrix}$，则

(1) $2A_{11}+3A_{12}+4A_{13}+A_{14}=$________；

(2) $A_{41}+A_{42}-2A_{44}=$________.

解 (1)本题是用第二行的元素乘以第一行对应元素的代数余子式再相加，由行列式按行展开定理的推论可知，$2A_{11}+3A_{12}+4A_{13}+A_{14}=0$.

(2)注意到需要计算的都是第四行元素的代数余子式，它们在计算时都会划掉第四行的元素.也就是说，改变第四行的元素不影响 $A_{41}+A_{42}-2A_{44}$ 的取值.

现将 $A_{41}+A_{42}-2A_{44}$ 看做 $A_{41}+A_{42}+0A_{43}-2A_{44}$，现将行列式的第四行改为对应的系数，则有