

上海市  
中学数学基本训练

(供高中三年级用)

上海教育出版社

## 使用说明

为了配合本市高中毕业班数学复习需要，我们根据数学教学大纲精神，按照“加强基础、培养能力、发展智力”的要求，编选了这本《中学数学基本训练》，供本市各中学毕业班复习阶段学生练习之用。

在使用时，各校应从学生实际出发，作必要的选择或增补，并应通过练习及时进行质量分析与指导。

上海市中小学教材编写组

1982年10月

## 目 录

一	数	1
二	式	7
三	代数方程	12
四	不等式	19
五	代数函数	22
六	幂函数、指数函数和对数函数	32
七	数列和极限	39
八	直线形	43
九	圆	46
十	三角函数	52
十一	反三角函数和三角方程	57
十二	直线和平面	62
十三	多面体和旋转体	67
十四	曲线和方程、直线方程	70
十五	圆锥曲线	73
十六	极坐标和参数方程	78
十七	排列和组合	82
十八	二项式定理和数学归纳法	86
十九	导数和微分	88
二十	综合练习	93

# 一 数

1. 下列各数中, 哪些是有理数? 无理数? 实数? 虚数? 复数?

$$\sqrt[3]{-8}, \pi, \lg 0.001, \cos \frac{7\pi}{6}, \sqrt{4356}, 5i, 0.6\dot{i}4,$$

$$0.1010010001\dots, |3-i|, 1-\sqrt{3}i^{2^3}.$$

2. 已知集合  $A$  和  $B$ , 求  $A \cap B, A \cup B$ :

(1)  $A = \{\text{正数}\}, B = \{\text{非负数}\};$

(2)  $A = \{\text{有理数}\}, B = \{\text{无理数}\};$

(3)  $A = \{\text{实数}\}, B = \{\text{虚数}\};$

(4) 全集  $I = \{x: -2 \leq x < 12, x \in \mathbf{J}\}, A = \{\text{质数}\},$   
 $B = \{x: x = 2k, k \in \mathbf{N}\},$  求  $\bar{A}, \bar{B}, A \cap B, A \cup B.$

3. 下列各题, 如有错误或不完整的, 加以改正或补充:

(1)  $a+b$  的倒数是  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}; (a, b \neq 0)$

(2) 两个实数中, 绝对值较大的那个数较大;

(3) 任何实数的绝对值总是正的;

(4) 一个有理数和一个无理数的和、差、积、商一定是无理数;

(5) 如果分数  $\frac{a}{b}$  小于 1,  $a$  一定小于  $b. (a, b \in \mathbf{R})$

4.  $\alpha$  为实数, 试确定:  $|\alpha| + \alpha, |\alpha| - \alpha, \frac{|\alpha|}{\alpha}$  何时为正数,

为负数,为零.

5. 化简:

(1) 当  $\alpha < 0$  时,  $|-a^3|$ ;

(2)  $|\lg 0.0845 + 1|$ ;

(3)  $\alpha$  是锐角,  $|\operatorname{ctg} \alpha - 1| - (\operatorname{ctg} \alpha + 1)$ ;

(4)  $|x + \sqrt{2}| - |2x + 3|$ ; ( $x \in \mathbf{R}$ )

(5)  $\sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2}$ . ( $a \in \mathbf{R}$ )

6. 试比较下列两数的大小:

(1)  $-\frac{2}{3}$  和  $-\frac{3}{4}$ ;      (2)  $-\sqrt{2}$  和  $-1.414$ ;

(3)  $2 - |a - 3|$  和  $2$ ;      (4)  $\sqrt[3]{4}$  和  $\sqrt{3}$ ;

(5)  $0.3^\pi$  和  $0.3^{3.14}$ ;      (6)  $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{8}$  和  $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{9}$ ;

(7)  $2 + \sin \alpha$  和  $3$ ;      (8)  $\sin \frac{9}{8}\pi$  和  $\sin \frac{9}{7}\pi$ .

7. 讨论下列两式值的大小: ( $a, b \in \mathbf{R}$ )

(1)  $a$  和  $a^2$ ;      (2)  $a$  和  $\frac{1}{a}$ ;

(3)  $2 - a$  和  $1 - a$ ;      (4)  $a + b^2$  和  $a$ ;

(5)  $|a| + |b|$  和  $|a| - |b|$ ;      (6)  $\frac{2a}{3b}$  和  $1$ .

8. 计算:

(1)  $\left[ 1^{-10} + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 - (0.2^3 - 0.008)^2 \right] \times 100^{-\frac{1}{2}}$   
 $+ \sqrt[3]{-\frac{1}{27} + \frac{1}{2^2}} \div \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}$ ;

(2)  $\left( \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{2}{1 + \sqrt{2}} + \frac{2}{1 - \sqrt{3}} \right) \sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2}$ ;

$$(3) (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin \frac{5}{12} \pi;$$

$$(4) (0.008)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} - \lg \sqrt{10} \\ + (\sqrt{5} - 1)^0 \cdot \sqrt{\log_3 5};$$

$$(5) \lg 5 \times \lg 8000 + (\lg 2^{\sqrt{3}})^2 + \lg 0.1\dot{6} + \lg 0.06.$$

9. (1) 某数分别被 12, 16, 18 去除, 都不能整除, 如这个数加上 5, 则都能整除, 问这个数至少是多少?  
(2) 今年产量比去年增加 12.5%, 今年产量是去年的几倍? 去年产量是今年的几分之几?  
(3) 浓度为 10% 的盐水  $m$  公斤和浓度为 25% 的盐水  $n$  公斤混合所得的混合液的浓度是多少?
10. (1) 求证: 三个连续整数的平方和被 3 除余 2;  
(2) 求证: 两个相邻奇数的平方差是 8 的倍数;  
(3) 求证: 三个连续自然数的积能被 6 整除.
11. 一个五位数  $123a4$ ,  $a$  是什么数字时, 它是  
(1) 3 的倍数;      (2) 4 的倍数;  
(3) 9 的倍数;      (4) 11 的倍数.
12.  $m$  是什么实数时, 复数  $(2m^2 + 5m - 3) + (2m^2 - 5m + 2)i$  是实数? 虚数? 纯虚数?
13. 下列各题, 如有错误或不完整的, 加以改正或补充:  
(1) 当  $a = b, a, b \in \mathbf{R}$  时,  $(a - b) + (a + b)i$  为纯虚数;  
(2) 任何数的偶次幂不小于零;  
(3)  $3i$  大于  $2i$ ,  $2 - 5i$  小于  $3 - 5i$ ;  
(4)  $i + 1$  的共轭复数为  $i - 1$ ;  
(5)  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  的三角式是  $\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}$ ,

$-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$  的三角式是  $-2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ;

(6) 16 的四次方根是  $\pm 2$ .

14. 计算: ( $i$  为虚数单位,  $k \in \mathbf{J}$ )

(1)  $\frac{1-2i}{3-4i} - (-i)^{28} + (1+i)^8$ ;

(2)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{1980}$ ;      (3)  $\frac{i-2}{1+i+\frac{i}{i-1}}$ ;

(4)  $i^7 \cdot i^{10} \cdot i^{18} \cdots i^{31}$ ;      (5)  $i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} + i^{k+4}$ ;

(6)  $\sqrt{3}(\cos 65^\circ + i\sin 65^\circ)$   
 $\cdot \sqrt{6}(\cos 115^\circ + i\sin 115^\circ)$ ;

(7)  $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \div \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ .

15. 计算:

(1)  $(\sqrt{3} - i)^{12}$ ;      (2)  $(-1 + 2i)^5$ ;

(3)  $(\sqrt{3} + i)^3 \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{(\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ)^3}$ .

16. 计算:

(1)  $7 - 24i$  的平方根;      (2)  $-1$  的立方根;

(3)  $1 + i$  的 5 次方根;      (4)  $i$  的 8 次方根.

17. 化简:  $(1 + \omega)^n$ , 这里  $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ , 并就  $n$  的取值加以讨论. ( $n \in \mathbf{J}$ )

18. (1)  $x, y$  是实数, 且  $(x + yi)i - 2 + 4i = (x - yi)(1 + i)$ ,  
求  $x, y$ ;

(2)  $x, y$  是共轭复数, 且  $(x + y)^2 - 3xyi = 4 - 6i$ , 求  $x, y$ .

19. 在复数集里解下列方程:

(1)  $x + |x| = 9 - 3i$ ;

(2)  $(2 + i)x^2 - 4x + (i - 2) = 0$ ;

(3)  $(x + 1)^8 = (1 + i)^8$ ;

(4)  $x^4 + 1 = 0$ , 并将方程的解在复平面上表示出来, 再顺次连结各点, 证明它是一个正方形.

20. (1) 将对应于  $x = 3 - \sqrt{3}i$  的向量按顺时针方向旋转  $60^\circ$ , 得到新向量对应的复数为  $y$ , 求  $xy$  和  $\frac{x}{y}$ .

(2) 在复平面上画出下列条件所表示的图形:

①  $|z - i| = |z + i|$ ;    ②  $|z - 3i| \leq 2$ ;

③  $|z| < 1, \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ ;

④  $|z - 3| + |z + 3| = 10$ .

---

21.\* 在实数集里解方程:

(1)  $|x + 1| + |\sqrt{2}x + \sqrt{2}| + |\sqrt{3}x + \sqrt{3}| = 0$ ;

(2)  $|x - 3| + \sqrt{2 - x} = 3$ ;

(3)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{2x - 4} + 1 = 0$ .

22. (1) 设  $a$  为整数, 当  $a$  为何值时, 二次方程

$$(a - 1)x^2 - (a^2 + 1)x + (a^2 + a) = 0$$

的两根都是整数, 都是正整数;

(2) 当  $a, b, c, d$  (均为实数) 具有什么关系时, 方程

---

\* 本书中, 横线以下的题目为选做题。



$x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$  有实数解.

23. 证明: 如果复数  $z \neq 1$ , 则  $\frac{z-1}{z+1}$  为纯虚数的充要条件是  $z$  的模等于 1.

24. 求最小的自然数  $n$ , 使  $(1-i)^n$  为正数.

25. 求证:  $\left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right)^n = \frac{1+itgn\alpha}{1-itgn\alpha}$ . ( $n \in \mathbf{N}$ )

26. 已知:  $a^2 + a + 1 = 0$ , 求  $a^{17} + a^{-17}$ .

27. 已知方程  $x^2 - x + 1 = 0$  的两个根分别为  $x_1, x_2$ , 证明: 当  $n \in \mathbf{N}$  时,  $x_1^n + x_2^n$  是整数, 并求出这个整数.

28. (1) 验证:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z} = |\bar{z}|^2.$$

(2) 设圆心  $C$  对应的复数  $z_0$ ,

求证: 半径  $r$  (正实数) 的圆方程为

$$z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + |z_0|^2 - r^2 = 0.$$

29. 一个正三角形的两个顶点分别是复数  $A = 1, B = 2 + i$ , 求表示第三个顶点  $C$  的复数.

30. 在复平面内, 一动点  $z$  到两定点  $\sqrt{15}i$  和  $-\sqrt{15}i$  的距离之差的绝对值等于  $2\sqrt{6}$ ,

(1) 写出动点  $z$  的轨迹方程;

(2) 把由(1)所得到的方程改写成实数形式的方程;

(3) 画出动点  $z$  的轨迹方程所表示的曲线.

## 二 式

1. 在实数范围内,  $x$  为何值时, 下列各式才有意义: ( $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $x$  都是实数)

$$(1) ax^2 + bx + c; \quad (2) \frac{20x}{2x^2 + 11x - 21};$$

$$(3) \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2+x+1}; \quad (4) \frac{1}{|x|-x};$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{-x+1}}; \quad (6) \frac{\lg(x+1)}{x-2};$$

$$(7) \frac{x-3}{\lg(x-4)}; \quad (8) \sqrt{\lg \frac{3}{2-x}}.$$

2. 下列各式在什么条件下才能成立:

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a; \quad (2) \sqrt[2n]{(a-2)^{2n}} = 2-a;$$

$$(3) x^0 + \sqrt[3]{3+2x} = 1 + \sqrt[6]{(3+2x)^2};$$

$$(4) 4\ln(-x) = \ln x^4; \quad (5) \frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x-3} = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-3};$$

$$(6) |\log_x 3 - \log_x 2| = -(\log_x 3 - \log_x 2).$$

3. 在有理数范围内分解下列各式的因式:

$$(1) 36a^{4n+5} - 81a^{2n+8}; (n \in \mathbf{N})$$

$$(2) x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 7y^3;$$

$$(3) a^2 - 4ab + 3b^2 + 2bc - c^2;$$

$$(4) (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3.$$

4. 分别在实数集和复数集内分解下列各式的因式:

$$(1) x^5y - 9xy^5; \quad (2) x^4 + y^4;$$

$$(3) y^4 - 8y^2 + 7; \quad (4) x^6 + x^3 - 2;$$

$$(5) x^3 - 4x^2 + 2x - 8; \quad (6) x^3 + 5x^2 + 12x - 18.$$

5.  $m$  等于什么数时, 下列各式能够分解成两个一次因式的积:

$$(1) x^2 - y^2 + 3x - 7y + m;$$

$$(2) x^2 + 7xy + my^2 - 5x + 43y - 24.$$

6. 计算:

$$(1) \left( \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} - 1 \right) \cdot \left[ \frac{(x+y+z)(x-y-z)}{(x-y+z)(x+y-z)} - 1 \right];$$

$$(2) \frac{6x^{2n} - 24}{x^{2n+3} + 6x^{n+3} + 9x^3} \cdot \frac{x^n + 3}{x^n - 2} + \frac{3x^n + 6}{x^{n+2} + 3x^2};$$

$$(3) \frac{x^2}{x+1 + \frac{1}{x-1}}; \quad (4) \frac{1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n-2}}{1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}}. \quad (n \in \mathbf{N})$$

7. 化简:

$$(1) 2|a-1| + \sqrt{(1-2a)^2}; \quad \left( \text{其中 } \frac{1}{2} < a < 1 \right)$$

$$(2) \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{4+x} - \sqrt{16x};$$

(3) 如果  $4x^2 - 4x - 15 \leq 0$ , 化简:

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{4x^2 - 20x + 25};$$

$$(4) \left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} + x-1} \right) \times \left( \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x} \right). \quad (0 < x < 1)$$

8. 已知  $a > 0$ , 且  $x = \frac{2ab}{b^2+1}$ , 求  $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$  的值.

9. 计算:

$$(1) [(a^{-\frac{3}{2}}b^2)^{-3} \div (ab^3)^{\frac{3}{2}}(b^{\frac{3}{2}})^7]^{\frac{1}{5}};$$

$$(2) [(x^{\frac{1}{m-n}})^{m-\frac{n^2}{m}}]^{\frac{m}{m+n}};$$

$$(3) \left\{ \left[ \frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{(\sqrt[3]{a})^2} \right]^2 \right\}^{-\frac{5}{2}};$$

$$(4) \frac{(x-y)^3(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^{-2} + 3(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} + \frac{2xy\sqrt{xy}-2y^2}{x^3-y^3}.$$

10. 若  $\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = k$ , 求  $k$  的值.

11. 若  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$ , 求  $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$  的值.

12. 根据下列条件, 求  $a$  的值:

(1)  $(x-a)(x-10)+1$  是一个完全平方式;

(2)  $\frac{2(x^2+2)}{x^2+x-2} = \frac{ax}{x+2} + \frac{a}{x-1}$ .

13. (1) 设  $x + \frac{1}{x} = 3$ , 求  $\left| x - \frac{1}{x} \right|$ ,  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ;

(2) 已知:  $x - y = \frac{1}{2}$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ , 求  $x^2 - y^2$  的值.

14. (1) 如果  $a, b, x$  都是实数, 且

$$\left( x^3 + \frac{1}{x^3} - a \right)^2 + \left( x + \frac{1}{x} - b \right)^2 = 0,$$

求证:  $b(b^2 - 3) = a$ ;

(2) 如果  $a, b, c, d$  都是正实数, 且

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd,$$

求证:  $a = b = c = d$ .

15. 如果  $(z-x)^2 - 4(x-y)(y-z) = 0$ ,

求证:  $x, y, z$  成等差数列.

16. 计算:

$$(1) \log_{\frac{1}{3}} 9 - \log_{\sqrt{2}} 8 - \log_8 4; \quad (2) \frac{\log_5 \frac{1}{3} \cdot \log_7 \sqrt[3]{4}}{\log_5 \sqrt{2} \cdot \log_7 9};$$

$$(3) 5^{2\log_5 10} + 25^{\log_5 4 - 1};$$

$$(4) \left( \log_2 5 + \log_4 \frac{1}{5} \right) \left( \log_5 2 + \log_{25} \frac{1}{2} \right).$$

17. 计算:

$$(1) \text{已知: } \lg 2 = 0.3010, \lg 3 = 0.4771,$$

问:  $45^{80}$  是几位数;

$$(2) \text{已知: } \lg 11.09 = 1.045, \lg 3.162 = 0.500, \text{不查表,}$$

求:  $-31.62^{-0.03}$ .

18. 计算:

$$(1) \text{已知: } \log_3 2 = a, \log_5 2 = b, \text{试用 } a, b \text{ 表示 } \log_{30} 90;$$

$$(2) \text{已知: } \log_{\sqrt{5}} 3 = m, \log_{\frac{1}{3}} 2 = n, \text{试用 } m, n \text{ 表示}$$
$$\log_{25\sqrt{5}} 18^{\frac{1}{2}};$$

$$(3) \text{已知: } \log_{14} 7 = a, 14^b = 5, \text{求: } \log_{35} 28.$$

19. 证明:

$$(1) \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_a e;$$

$$(2) \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{b} = \log_a b;$$

$$(3) \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \cdots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n}$$
$$= \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( \frac{1}{\log_x 2} \right)^2;$$

$$(4) (\log_2 3 + \log_4 9 + \log_8 27 + \dots + \log_{2^n} 3^n) \log_{3^n} \sqrt{32} \\ = \frac{5}{2}.$$

20. (1) 如果  $m = a^x$ ,  $n = a^y$ ,  $m^y \cdot n^x = a^{\frac{2}{a}}$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ )  
求证:  $xyz = 1$ ;

(2) 如果  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 且  $a^b = b^a$ , 求证:  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a-b}{b}}$ ;

(3) 设在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $a, b$  为直角边,  $c$  为斜边, 求证:  
 $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$ .

21. 若  $0 < a < 1$ , 化简:  $|1-x| + \sqrt{a^{2x} - 2a^x + 1} - (x - a^x)$ .

22. (1) 证明: 多项式  $xy + px + qy + r$  能分解成两个一次因式的充要条件是  $pq = r$ ;

(2) 若  $(x+b)(x+c) + (x+c)(x+a) + (x+a)(x+b)$  为  $x$  的完全平方式, 且  $a, b, c$  为实数, 则  $a = b = c$ .

23. 设  $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$  的整数部分为  $a$ , 小数部分为  $b$ , 求  $a, b$  和  $a^2 + \frac{1}{2}ab + b^2$  的值.

24. 设  $a > b > 1$ ,  $\log_a b + \log_b a = \frac{10}{3}$ ,

求:  $\log_a b - \log_b a$ .

25. 已知:  $\log_2(x^2 + xy + y^2) - \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1$ , 且  $0 < y < x$ , 求:  $\frac{x+y}{x-y}$ .

26. (1) 已知:  $\log_a \sqrt{3} = 2b$ , 计算:  $\frac{a^{8b} + a^{-8b}}{a^b - a^{-b}}$ ;

(2) 已知:  $f(x) = \log_m x$ , 且  $f(30) = a$ ,  $f(360) = b$ ,

$$f\left(\frac{108}{5}\right) = c, \text{求 } f(2).$$

27. 计算:

$$(1) \left( \lg \frac{1}{2} + \lg 1 + \lg 2 + \lg 4 + \dots + \lg 1024 \right) \log_2 10;$$

$$(2) \lg \sqrt[10]{2 \sqrt[10]{2 \sqrt[10]{2 \sqrt[10]{2 \dots}}}}.$$

28. 如果  $\log_a x$ ,  $\log_b x$ ,  $\log_c x$  组成一个等差数列, 且  $x \neq 1$ ,

求证: (1)  $\frac{1}{\lg a}$ ,  $\frac{1}{\lg b}$ ,  $\frac{1}{\lg c}$  也组成等差数列;

(2) 若  $a, b, c$  又成等比数列, 则  $\log_b a \cdot \log_b c = 1$ .

### 三 代 数 方 程

1. 下列各方程的解法对不对, 如果不对, 那么应该怎样解?

(1)  $x^2 = 5x$ , 两边都除以  $x$ , 得  $x = 5$ ;

(2)  $(2x+1)^2 = (4-x)^2$ , 两边都开平方, 由  $2x+1 = 4-x$ , 得  $x = 1$ ;

(3)  $(x+1)(x^2+1) = 3(x^2+1)$ , 两边都除以  $x^2+1$ , 得  $x = 2$ ;

(4)  $x^2 \cdot \sqrt{x-2} = 9\sqrt{x-2}$ , 两边都除以  $\sqrt{x-2}$ , 得  $x = \pm 3$ .

2. 下列各对方程是否同解? 如果不同解, 试把从第一个方程化为第二个方程时产生的增根或失根找出来, 并说明产生增失根的原因;

$$(1) x^2 + x - 2 = x^2 + 2x + 8, \quad x - 2 = 2x + 8;$$

$$(2) \frac{x+1}{x-1} = \frac{3-x}{x-1}, \quad x+1 = 3-x;$$

$$(3) \frac{2x-1}{x+5} - \frac{2x+7}{x-3} = \frac{8-x}{x+5} - \frac{2x+7}{x-3},$$
$$\frac{2x-1}{x+5} = \frac{8-x}{x+5};$$

$$(4) x^2 + \sqrt{x-3} = 5x + 6 + \sqrt{x-3}, \quad x^2 = 5x + 6;$$

$$(5) (x+1)(x-3) = (2x+3)(x-3), \quad x+1 = 2x+3;$$

$$(6) \sqrt{2x+13} = x-1, \quad 2x+13 = (x-1)^2.$$

3. 不解方程, 试确定下列方程有没有解, 并说明理由:

$$(1) \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = 0;$$

$$(2) \sqrt{x+4} - \sqrt{2x-11} = \sqrt{3-x};$$

$$(3) \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} - 1 = 0;$$

$$(4) \sqrt{5-x} = x-7; \quad (5) |2x^2+7| = -x^2-5;$$

$$(6) \frac{x^2 - (a+b)x + ab}{x^3 - (a+b)x^2 + abx} = 0.$$

4. 根据下列条件, 分别求出  $a$  与  $b$  的值:

(1) 关于  $x$  的方程  $2a(x-1)^2 = 3b + x(ax-8)$  有根 1 和 2;

(2) 关于  $x$  的方程  $a(2x+3) + b(3x-2) = 12x+5$  有无数多解;

(3) 方程组  $\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 8 \end{cases}$  有一组解  $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

5. 解下列关于  $x$  的方程:

$$(1) \frac{2}{4x^2-4x-3} - \frac{1}{4x^2-8x+3} + \frac{2x-5}{4x^2-1} = 0;$$



$$(2) \frac{40x-43}{8x-9} - \frac{32x-30}{8x-7} = \frac{20x-24}{4x-5} - \frac{16x-13}{4x-3},$$

$$(3) \frac{2}{a^2-ac-ax+cx} + \frac{1}{x^2-ax-cx+ac}$$

$$= \frac{1}{c^2-cx-ac+ax}.$$

6. 解下列方程:

$$(1) \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x+6} = x+3;$$

$$(2) (2x-4)^{\frac{1}{2}} - (x+5)^{\frac{1}{2}} = 1;$$

$$(3) \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1} - \sqrt{5x+4} = 0;$$

$$(4) x^2 + 19x - \sqrt{x^2 + 5x - 2} = 9x - x^2 + 10;$$

$$(5) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{4x-1}{2}.$$

7. 解下列方程:

$$(1) 2|x-1| + 3 = 4x; \quad (2) |x-4| + \sqrt{(2x-1)^2} = 10;$$

$$(3) (x-4)|3-2x| + |-2-x| = 2;$$

$$(4) |x^2 - 3x + 2| - 2x = 2.$$

8. 在复数范围内, 解下列关于  $x$  的方程:

$$(1) x^2 - 2x - 9999 = 0; \quad (2) 4(x+2)^2 = 9(x-3)^2;$$

$$(3) x^2 - (4 - \sqrt{2})x + \sqrt{2} - 1 = 0;$$

$$(4) (2+i)x^2 - 4x - (2-i) = 0;$$

$$(5) (a+b+c)x^2 - 2(a+b)x + (a+b-c) = 0.$$

9. 在复数范围内, 解下列方程:

$$(1) x^8 - 7x^8 + 6 = 0;$$

$$(2) (y^2+3)^4 + 12(y^2+3)^2 - 64 = 0;$$

$$(3) 3x^4 + 2x = 0; \quad (4) y^5 - 2 + 2i = 0;$$

$$(5) (2-x)(x+3)(2x+1)^2 = 6;$$