初等数学

解析几何
附　　录

江苏省工科院校《初等数学》编写组

一九七三年七月

恩格斯语录

和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。

列宁语录

一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。

毛主席语录

理论的基础是实践，又转过来为实践服务。

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。学制要缩短，教育要革命，资产阶级知识分子统治我们学校的现象，再也不能继续下去了。

目　　录

第五部分　平面解析几何

第一章　平面直角坐标系、曲线与方程

第二章　直　　线

第三章　二 次 曲 线

第四章 坐标变换

第五章 参数方程、极坐标

第六部分 附录

附录一 立体几何简介

附录二 矢量代数

附录三　复　　数

附录四　充分条件与必要条件

附录五　余数定理和综合除法

第五部分　平面解析几何

数学研究的对象是现实世界中的空间形式和数量关系。例如，初等几何主要地是研究空间形式，初等代数主要地是研究数量关系，它们是分别从“形”和“数”这两个不同的侧面来研究客观事物的规律。但是，**“马克思主义的哲学认为，对立统一规律是宇宙的根本规律。”**作为“形”和“数”这一对矛盾，它们之间并不是互相孤立的，而是在一定的条件下，互相转化和同处在一个统一体中。

变量和坐标法的引入，使“形”和“数”的结合系统化了。由于这样，我们可以用数量关系来研究图形的性质；另一方面，我们也可以从几何形象直观地了解某些数量之间的联系。从而使我们能够比较全面地研究某些客观事物的变化规律。

解析几何是数学的一个重要分支。它是以坐标法为基础，利用“数”来研究“形”，即利用代数的方法来研究图形的几何性质。

在以后学习高等数学和其它科学技术时，解析几何的知识是不可少的。在生产斗争和科学实验中，解析几何也有一定的应用。这里只是研究平面图形，叫做“平面解析几何”。

第一章 平面直角坐标系、曲线与方程

§1. 平面直角坐标系

一、有向线段

在解析几何与物理学中，不仅要知道直线和线段的位置，还必须考虑到它们的方向。例如，将一条线段看作是质点运动所经过的路线时，如果交换了线段的起点和终点，那么质点运动方向就与原方向相反。因此，我们有必要考虑直线和线段的方向。

一条直线有两个相反的方向。如图 1—1 的直线 l，如果把箭头所指的方向定为正向，那么另一个相反的方向便是负向。象这样规定了正向的直线，就叫做有向直线，或叫做轴。

图 1—1

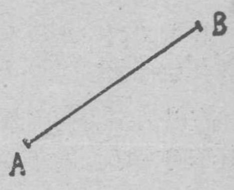


图 1—2

一条线段也有两个相反的方向。如图 1—2 的线段，如果以线段的一端 A 为起点，另一端 B 为终点，那么从 A 到 B 是线段的一个方向；反过来，如果以 B 为起点，A 为终点，

那么从 B 到 A 的方向恰好和从 A 到 B 的方向相反。象这样规定了起点和终点的线段，就叫做有向线段；从起点到终点的方向就定为这条有向线段的方向。在表示有向线段时，我们把表示起点的字母写在前面，把表示终点的字母写在后面，然后在两个字母上面画一横线。如图1—2，如果有向线段的起点是 A，终点是 B，那么就把它记作 $\overline{AB}$；反过来，起点是 B、终点是 A 的有向线段就记作 $\overline{BA}$；显然 $\overline{BA}$ 的方向恰好和 $\overline{AB}$ 的方向相反。

如果有向线段的起点和终点都在一轴上，那么它就是轴上的有向线段。对于在轴上的有向线段，把它的方向与轴的正向进行比较，就可以决定这条有向线段的方向是正向还是负向。如果有向线段的方向与轴的正向一致，那么它就是正向的线段；如果相反，那么它就是负向的线段。例如，图1—3中，有向线段 $\overline{AB}$ 的方向是正向，而有向线段 $\overline{BA}$ 的方向却是负向。

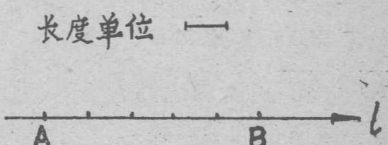


图 1—3

选定一条线段作为长度单位，就可以量得有向线段的长度（注意：线段的长度是一个非负的实数）。如果有向线段的方向是正向，就在它的长度前面加上“+”号；反过来，如果有向线段的方向是负向，就在它的长度前面加上“－”号。一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，就叫做这条有向线段的数值。我们把有向线段 $\overline{AB}$ 的数值记作 AB. 如

图1—3，用长度单位量得有向线段$\overline{AB}$的长度是5，由于$\overline{AB}$方向是正向，所以有向线段$\overline{AB}$的数值是+5，即$AB=5$.反过来，虽然有向线段$\overline{BA}$的长度也是5，但是它的数值却是-5，即$BA=-5$. 显然，对于任何有向线段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$，它们的数值有下面的关系：

$$AB=-BA,$$

或

$$AB+BA=0.$$

我们把有向线段$\overline{AB}$的长度记作$|AB|$. 其实，有向线段$\overline{AB}$的长度就是它的数值的绝对值。如图1—3中，$|AB|=|5|=5$，$|BA|=|-5|=5$. 一般地，对于任何的有向线段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$，它们的长度是相等的，即

$$|AB|=|BA|.$$

图1—4中，设A、B、C是轴上任意三点，那么有向线段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$和$\overline{AC}$的数值之间，必然有下面的关系式：

$$AB+BC=AC. \quad (1)$$

这个关系式的成立并不受A、B、C三点在轴上排列的次序所限制。要证明关系式(1)成立，必须证明它对一切可能排列的次序都成立。我

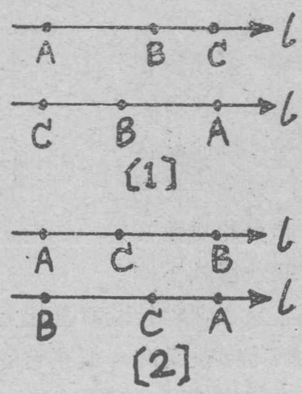


图 1—4

们把 A、B、C 三点在轴上的排列分成两类：①$\overline{AB}$ 和$\overline{BC}$的方向一致；② $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相反。只要能证明关系式（1）在这两种场合下都成立，则表明 A、B、C 三点对所有的排列，(1)式都成立。现在分别证明如下：

① 设 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 同向，如图 1—4[1] 所示，则

$$|AC| = |AB| + |BC|;$$

又因 $AB=|AB|$、$BC=|BC|$、$AC=|AC|$，

或 $AB=-|AB|$、$BC=-|BC|$、$AC=-|AC|$，

故

$$AB+BC=AC.$$

② 设 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 反向，并设 $|AB|>|BC|$，如图1—4[2] 所示，则 $\overline{AC}$ 与 $\overline{CB}$ 同向，因而

$$AC+CB=AB,$$

即

$$AB-CB=AC;$$

但

$$-CB=BC,$$

故

$$AB+BC=AC.$$

至于 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 反向，又 $|AB|<|BC|$ 的情况，可自行证明。

在代数中，我们曾经引进数轴的概念：一条有向直线，在它上面规定了原点与长度单位，就构成了数轴。在数轴的原点右边正向的那一半叫做正半轴，原点左边负向的那一半叫做负半轴。数轴上的点与全体实数之间具有一一对应的关系。这就是说，任意一个实数可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上任意一个点，也就表示一个实数。和数轴上某一点相对应的实数，就叫这点的坐标。如果数轴上某一点的坐标是 x，那么以原点为起点，这点为终点的有向线

段的数值也是x．如图1—5，A点坐标是-3，就有$OA=-3$；B点坐标是2，就有$OB=2$。

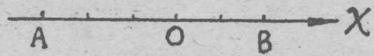


图 1—5

现在我们再来证明一个很有用的公式。设A，B是数轴上任意两点，它们的坐标分别为x_1，x_2，则有向线段$\overline{AB}$的数值可以用x_2-x_1来表示，即

$$\boxed{AB=x_2-x_1\,.} \qquad (1\text{—}1)$$

证明：根据上面关系式（1），有

$$OA+AB=OB,$$

因此 $$AB=OB-OA;$$

但 $$OB=x_2,\ OA=x_1,$$

所以 $$AB=x_2-x_1\,.$$

例1 已知A、B、C三点在数轴上的坐标分别是4、-2、-6（图1—6），求$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的数值及长度。

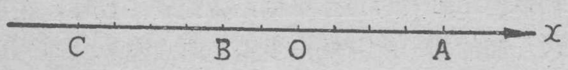


图 1—6

解：$AB=-2-4=-6,\qquad |AB|=|-6|=6;$

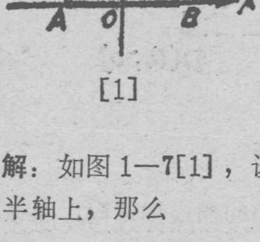
$BC=-6-(-2)=-4,\qquad |BC|=|-4|=4;$

$CA=4-(-6)=10,\qquad |CA|=|10|=10.$

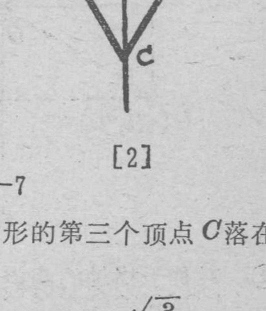
二、平面直角坐标系

坐标的概念在代数中已经学习过。利用直角坐标系，可以用一对有序实数来表示平面内一点的位置。也就是说，对于坐标平面内任意一点P，总有唯一的一对有序实数(x, y)和它对应；反过来，对于任何一对有序实数(x, y)，以它为坐标，在平面内就能确定一个唯一的点。这样，平面内所有的点和所有的一对有序实数(x, y)之间，就建立了一一对应的关系。这种用一对有序的数来表示平面内一点的位置的方法，通常称为坐标法。运用坐标法，就可以把几何问题和代数问题联系起来进行研究，给用代数方法研究几何问题奠定了基础。

例2 有一个边长为a的等边三角形，它的一边与x轴重合，这条边的中点重合于坐标原点，求此三角形三个顶点的坐标。



[1]



[2]

图 1—7

解：如图 1—7[1]，设三角形的第三个顶点C落在y轴的正半轴上，那么

$$OC = |OC| = |AC|\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}a\ ,$$

则C点的坐标为$\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，而$A$、$B$两点的坐标分别为$\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right)$、$\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$.

如果顶点C落在y轴的负半轴上（图 1—7[2]），则C点的坐标为$\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，而$A$、$B$两点的坐标仍和前面的一样。

关于对称点的概念，我们在前两册中已经遇到过，现在我们利用点的坐标来讨论这个问题。先作出以A、B、C、D为顶点、O为中心、四边平行于坐标轴的一个矩形$ABCD$（图1—8）. 由平面几何知识知道：A和D、B和C是关于x轴的对称点；A和B、D和C是关于y轴的对称点；A和C、B和D是关于原点的对称点。从图 1—8 容易看出：

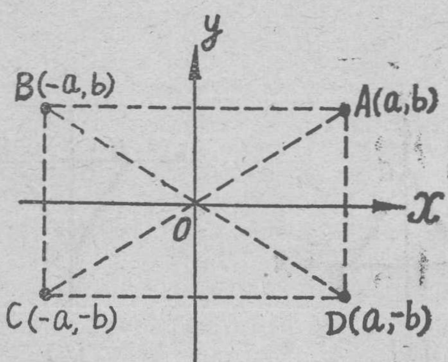


图 1—8

① 对称于横轴的两点，它们的横坐标相同，而纵坐标的绝对值相等，符号相反；

② 对称于纵轴的两点，它们的纵坐标相同，而横坐标的绝对值相等，符号相反；

③ 对称于原点的两点，它们的横坐标的绝对值相等，但符号相反，纵坐标也是这样。

上面的叙述，反过来也是成立的。

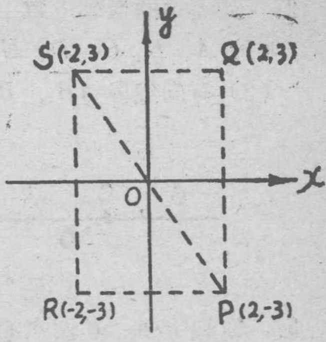


图 1—9

例3 写出 $P(2,-3)$ 点关于 x 轴、y 轴和原点的对称点。

解：$P(2,-3)$ 点关于 x 轴、y 轴和原点的对称点分别为 $Q(2,3)$、$R(-2,-3)$ 和 $S(-2,3)$（图1—9）.

习 题 一

1. 在轴上有 A、B、C 三点（排列如图所示），A、B 两点间的距离为 5；B、C 两点间的距离为 1.

(1) 求有向线段 $\overline{AB}$、$\overline{CB}$ 和 $\overline{CA}$ 的数值；

(2) 验证 $AB+BC=AC$；

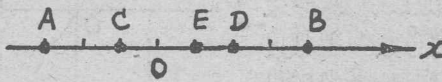
(3) 如以 C 为原点，求 A、B 的坐标。

（第1题）

2. 如图中的数轴上每一格等于一个长度单位，写出：

(1) A、B、C、D、E 各点的坐标；

(2) 有向线段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 和 $\overline{EA}$ 的数值和长度。



（第 2 题）

3. 数轴上 A、B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2，设

(1) $x_1=8$，$x_2=6$；

(2) $x_1=5$，$x_2=-3$；

(3) $x_1=-4$，$x_2=0$；

(4) $x_1=-9$，$x_2=-11$.

求有向线段 $\overline{AB}$、$\overline{BA}$ 的数值和长度。

4. 已知数轴上有 $A(-3)$、$B(4)$、$C(7)$ 三点，

(1) 求 $AB+BC+CA$；

(2) 验证 $AB+BC=AC$.

5. 在数轴上，求M点的坐标，已知：

(1) $N(2)$，且$MN=-5$；

(2) $N(-7)$，且 $MN=2$；

(3) $N(-3)$，且 $NM=-2$；

(4) $N(1)$，且$NM=6$；

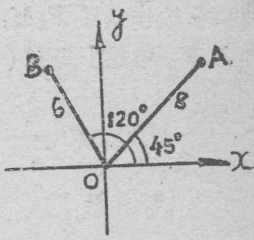
(5) $N(0)$，且 $|NM|=4$（有两解）；

(6) $N(-1)$，且 $|MN|=3$（有两解）.

6. 南北向的直道上有一车站，一人原在车站以南 5 里之处，他向北走了 9 里，后又回转身来向南走了 3 里，问此人最后到达的地点离车站多远？在车站的哪一面？试用数轴

表示出此人最后到达的地点。

7. 求图中 A 点和 B 点的坐标。



（第 7 题）

8. 一个菱形每边的长是 5，一条对角线的长是 6，取两条对角线所在的直线作坐标轴，求四个顶点的坐标（有两种情况）。

9. 一个边长是 a 的正方形 $ABCD$，求四个顶点的坐标：

(1) 分别取一边 AB 和另一边 AD 所在的直线作 x 轴和 y 轴，并且以 C 点所在的象限作第一象限；

(2) 取它的中心作原点，并且取平行于它的边的两条直线作坐标轴；

(3) 取它的两条对角线所在的直线作坐标轴。

10. 试写出在 x 轴上与原点距离为 2 的点的坐标；以及在 y 轴上与原点距离为 3 的点的坐标。

11. 分别写出下列各点关于 x 轴、y 轴和原点为对称的点的坐标：

$A(1,2)$，$B(-3,\sqrt{2})$，$C(-\sqrt{3},1-\sqrt{2})$，

$D(-a,-b)$，$E(a+b,a-b)$.

§2. 距离公式、定比分点

一、两点间的距离

平面上任何两点，只要知道它们的坐标，就可以把它们