

高等院校“十二五”规划教材

数学建模教程

MATHEMATICAL MODELING TUTORIAL

主编 李炳杰



陕西师范大学出版总社有限公司

院校“十二五”规划教材

数学建模教程

MATHEMATICAL MODELING TUTORIAL

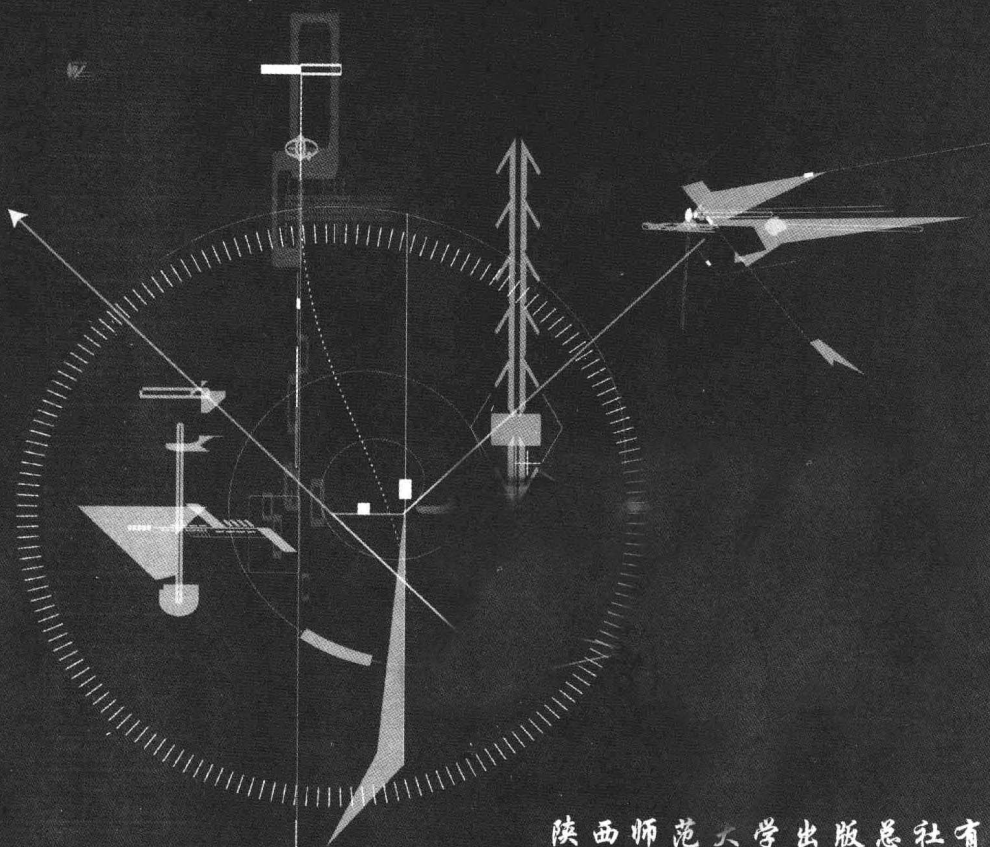
主 编
副 编
参 编

李炳杰
尹忠海
李炳杰
杨亚莉

刘卫江
尹忠海
贺筱军

刘卫江
焦红英

刘乃功



陕西师范大学出版总社有限公司

图书代号 JC12N0407

图书在版编目(CIP)数据

数学建模教程 / 李炳杰主编. ——西安:陕西师范大学出版总社有限公司,2012.8
ISBN 978-7-5613-6220-4

I. ①数… II. ①李… III. ①数学模型-高等学校-教材 IV. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 097962 号

数学建模教程

主 编 / 李炳杰

责任编辑 / 颜 红 王 娟

责任校对 / 王 娟

封面设计 / 前 程

出版发行 / 陕西师范大学出版总社有限公司
(西安市长安南路 199 号 邮编 710062)

网 址 / <http://www.snupg.com>

经 销 / 新华书店

印 刷 / 兴平市报社印刷厂

开 本 / 787mm×1092mm 1/16

印 张 / 13.75

字 数 / 330 千

版 次 / 2012 年 8 月第 1 版

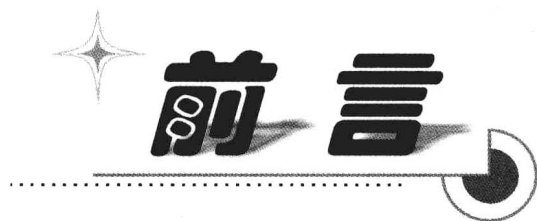
印 次 / 2012 年 8 月第 1 次印刷

书 号 / ISBN 978-7-5613-6220-4

定 价 / 29.00 元

读者购书、书店添货如发现印刷装订问题,请与本社高教出版分社联系调换。

电话:(029)85303622(兼传真),85307826。



前言

随着社会的发展,数学的应用正在以空前的广度和深度向经济、军事、管理、生物、医学、环境等领域渗透,数学已经成为当代高新技术的重要组成部分。社会对数学的需求更多地转向运用数学知识和数学思维解决工程中面临的实际问题,以取得实在的经济效益和社会效益。对复杂的实际问题进行分析,将研究对象的内在规律用数学语言和方法表述出来,称为建立数学模型的过程。而求出其结果,并将结果返回到实际问题中去,这种解决问题的全过程就称为数学建模。数学建模架起了数学理论和实际问题之间的桥梁,是应用数学方法解决实际问题的重要手段和途径,是数学理论与实际问题相结合的一门学科。它将现实问题归结为相应的数学问题,并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析 and 研究,从而从定量或定性的角度来刻画实际问题,并为解决实际问题提供精确的数据或可靠的指导。本书主要介绍数学建模的基本知识和基本方法,通过数学模型和数学建模有关问题的论述和模型实例的介绍,使学员掌握数学建模的基本步骤,了解常用的建模方法,学会进行科学研究的一般过程。培养学员利用数学方法分析问题和利用计算机及各种资料解决问题的能力。

力,增加受益面。本书可作为非数学专业本科生选修课教材,也可供高等院校师生及各类科技工作者参考。

全书共分七章:第一章初等模型由焦红英编写;第二章最优化模型由李炳杰编写;第三章图论模型由尹忠海编写;第四章微分方程模型由刘卫江编写;第五章概率模型由杨亚莉编写;第六章数据处理及数理统计模型由刘乃功编写;第七章计算机仿真由贺筱军编写,全书由李炳杰教授统稿完成。空军工程大学理学院数理系的领导和教员对本书的编写和出版给予了大力支持和帮助,冯有前教授、袁修久教授、寇光兴副教授对原稿进行了认真的审阅,并提出了宝贵的意见和建议,在此,我们对在本书编写过程中给予支持和帮助的同志表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中疏漏不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者

2012年7月于空军工程大学

目 录



第1章 初等模型

1.1 函数方法建模	(3)
1.2 比例方法建模	(7)
1.3 枚举方法建模	(9)
1.4 标值方法建模	(13)
1.5 图形方法建模	(16)
1.6 距离方法建模	(18)
1.7 网络方法建模	(21)

第2章 最优化模型

2.1 线性规划模型及求解	(27)
2.2 非线性规划模型及求解	(39)
2.3 多目标规划模型及求解	(44)
2.4 变分法模型及求解	(50)

第3章 图论模型

3.1 图的基本概念	(63)
3.2 图的路、连通性及图的矩阵表示	(69)
3.3 最短路问题算法及其应用	(75)
3.4 树	(79)
3.5 二分图的匹配问题	(86)
3.6 Euler 图和 Hamilton 图	(89)

第4章 微分方程模型

4.1 几个简单的微分方程模型	(99)
4.2 人口预测模型	(105)
4.3 多种群模型	(109)
4.4 市场价格模型	(112)
4.5 传染病模型	(113)

第5章 概率模型

5.1 彩票中的数学	(120)
5.2 电梯问题	(123)
5.3 报童的策略	(125)
5.4 机器任务分配	(129)

5.5 设备的维修更换	(131)
5.6 排队问题	(133)
5.7 基因遗传	(135)
5.8 随机性存储模型	(138)

第6章 数据处理及数理统计模型

6.1 回归分析	(143)
6.2 数据插值模型	(153)
6.3 数据拟合模型	(156)
6.4 排队论模型	(160)

第7章 计算机仿真

7.1 计算机仿真概述	(169)
7.2 离散事件系统仿真	(176)
7.3 系统仿真实例	(193)

第1章 初等模型

当你读这本书时,我想首先显现在你脑海中的问题是:什么是数学建模?你小时候一定做过“一笔画”的数学游戏.例如,要求笔不离开纸,连续地不重复地(两条线交点除外)用一笔画出图 1.1 中的各个图形.如何画出这些图形呢?这需要建立数学模型分析.

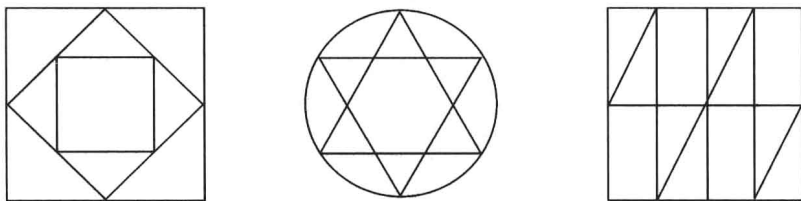


图 1.1 一笔画图示例

“一笔画”起源于数学史上著名的“哥尼斯堡七桥问题”.

哥尼斯堡是欧洲的一座古老城市,18 世纪时属于东普鲁士,后并入德国,苏联将其更名为加里宁格勒,现属于立陶宛共和国.一条河流把这座城市的陆地分成四块,河上架设了七座桥以连接这四块陆地(见图 1.2).

不知从何时开始,流传开一个游戏:无论从哪里出发,要求依次不重复地走完这七座桥.这个问题简单有趣,吸引了很多人去试验探索,但好长时间没有一个人能完成这个游戏.

后来,有人把这个问题提交给当时著名的数学家欧拉,希望他能给出解答.经过深入研究,欧拉于 1936 年彻底解决了这个问题.欧拉是如何解决的呢?

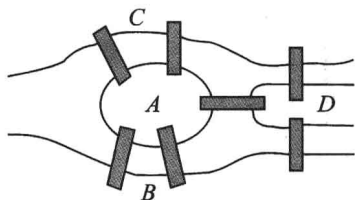


图 1.2 七桥问题图

首先,为了把这个问题抽象成一个纯粹的数学问题,欧拉将四块陆地 A 、 B 、 C 、 D 看做平面上的四个点,连接陆地的七座桥看做连接相应点间的线,得到图 1.3(后人称之为欧拉图).于是,能否依次不重复地一次走完哥尼斯堡七桥的问题变为能否一笔画出图 1.3 所示的图形.

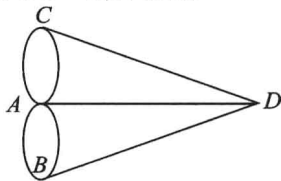


图 1.3 七桥问题欧拉图

为了解决上面这个纯粹的数学问题,不妨先引入几个概念.

若对于一个图中任意两个点都存在一条线把这两个点连接起来,则称这个图是连通的.通过图中某个点的线的数目为偶数(或奇数),则称这个点为偶点(或奇点).

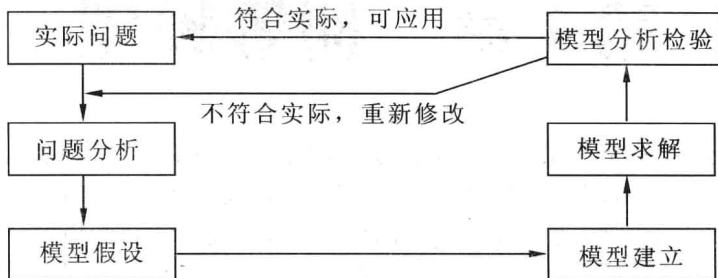
欧拉得到的结论是:一个图能一笔画的充分必要条件是这个图是连通的且奇点的个数为 0 或 2(当奇点个数为 0 时,图中任一点都可以作为一笔画的起点同时也是终点;当奇点个数为 2 时,必须一个奇点为起点,另一奇点为终点).

显然,图 1-3 所示的图形, A 、 B 、 C 、 D 四点都是奇点,故它不能一笔画,从而不可能依次不重复地一次走完哥尼斯堡七桥.

欧拉解决哥尼斯堡七桥问题的上述过程就是一个典型的数学建模的过程.数学建模的



一般程序是:针对某个需要解决的实际问题,通过分析做出适当假设,把它抽象成一个数学问题,然后运用数学理论和方法求出其数学解,再把这个数学解翻译,还原为实际问题的解,最后分析,检验这个解是否符合、满足实际问题.这一过程可用下面的框图大致表示:



在上面的过程中,由实际问题抽象得到的数学问题也称为该实际问题的数学模型.数学模型可以是某个图形,也可以是某个数学公式或方程式、不等式、函数关系式等.简言之,所谓数学建模就是通过建立某个数学模型来解决实际问题的方法.数学建模并不神秘,中学数学中列方程解应用题其实就是最简单的数学建模.

一般的数学建模问题可能远比我们在中学解应用题复杂,但其解题思想是大致相同的.归纳起来,数学建模的一般解题步骤是:

(1) 问题分析. 对所给的实际问题,分析问题中涉及的对象及其内在关系、结构或性态,分析需要解决的问题是什么,从而明确建模目的.

(2) 模型假设. 对问题中涉及的对象及其结构、性态或关系作必要的简化假设,简化假设的目的是用尽可能简单的数学形式建立模型,简化假设必须基本符合实际.

(3) 模型建立. 根据问题分析及模型假设,用一个适当的数学形式来反映实际问题中对象的性态、结构或内在联系.这种数学形式可以是某个图形或某种关系式(等式、不等式、函数式、递推关系式等)或其他数学结构,并把要解决的问题转化为某个数学问题.

(4) 模型求解. 对建立的数学模型用数学方法求解.

(5) 模型讨论. 对建立的数学模型及模型的解进行讨论,讨论模型及模型解的各种不同情况,模型求解的理论根据,求解方法、步骤(或程序),解的精度分析等.

(6) 把模型的数学解翻译成实际解. 根据问题的实际情况或各种实际数据对模型及模型解的合理性、适用性、可靠性进行检验,若与实际不符合,则需修改模型假设,重新建模.

当然,并非所有建模过程都要经过上述步骤,一切都要根据实际问题的需要.下面,我们将从建模方法的角度给出数学建模的若干实例.

本章介绍的模型比较简单,读者只要具备高等数学、线性代数和概率论与数理统计知识即可.我们必须改变传统的看法,认为简单的理论只能解决简单的问题.事实上,客观实际问题解决得好与坏并不以所应用的知识的深浅为尺度,也就是说,如果对于某个实际问题我们用初等的方法和所谓高等的方法建立了两个模型,它们的应用效果相差无几,那么受到人们欢迎并采用的,一定是前者而非后者.本章主要介绍有关函数法、比例法、枚举法、标值法、图形法等建模例子.这些巧妙的分析处理问题的方法,有助于提高读者的数学思维能力和分析问题、解决问题的能力,同时可使其开阔思路.



1.1 函数方法建模

当实际问题归结为要确定某两个量(或若干个量)之间的数量关系时,可通过适当假设,建立这两个量(或多个量)之间的某个函数关系,我们称之为函数方法建模.

【例 1.1】 椅子问题:四条腿长度相等的椅子放在起伏不平的地面上,四条腿能否一定同时着地?

模型假设 (1) 四条腿一样长,椅脚与地面点接触,四脚连线呈正方形.

(2) 地面高度连续变化,可视为数学上的连续曲面.

(3) 地面相对平坦,使椅子在任意位置至少三只脚同时着地.

假设(1)显然是合理的. 假设(2)相当于给出了椅子能放稳的条件,因为如果地面高度不连续,譬如四只脚是无法在有台阶的地方同时着地的. 至于假设(3)是要排除这样的情况:地面上与椅脚间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内,出现深沟或凸峰(即使是连续变化的),致使三只脚无法同时着地.

模型建立 需要解决的问题是怎么描述椅子的位置,怎么说明椅子能够四脚着地.

椅脚的连线成正方形 $ABCD$. 以正方形的中心为坐标原点,以对角线 AC 所在的直线为 x 轴,椅子位置的改变以正方形绕中心旋转表示,用旋转的角度 θ 表示椅子的位置. $\theta=0$ 对应的位置为椅子的初始位置,设旋转 θ 后椅子到达位置 $A'B'C'D'$.

椅子脚 A, C 到地面的距离之和为 $f(\theta)$, 椅子脚 B, D 到地面的距离之和为 $g(\theta)$, $f(\theta), g(\theta) \geq 0$. 由假设(2), f 和 g 都是 θ 的连续函数. 由假设(3),椅子在任何位置至少有三只脚着地,所以对于任意的 θ , $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零. 当 $\theta=0$ 时不妨设 $g(\theta)=0, f(\theta)>0$. 这样,改变椅子的位置使四只脚同时着地,就归结为证明如下的数学命题:

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数,对任意 θ , $f(\theta) \cdot g(\theta) = 0$, 且 $g(0) = 0, f(0) > 0$. 则存在 θ_0 , 使 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0, 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

模型求解 (1) 若 $f(0) = 0$, 则取 $\theta_0 = 0$ 即可证明结论.

(2) 若 $f(0) > 0$, 则将椅子旋转 $\frac{\pi}{2}$, 对角线 AC 和 BD 互换. 故 $g(\frac{\pi}{2}) > 0, f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 构造函数 $h(\theta) = g(\theta) - f(\theta)$, 则易知 $h(0) < 0$ 和 $h(\frac{\pi}{2}) > 0$. 由 f 和 g

都是 θ 的连续函数可知 h 也是 θ 的连续函数. 根据闭区间上连续函数的零点定理, 知必定存在 $\theta_0, 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, 使 $h(\theta_0) = 0$, 即 $f(\theta_0) = g(\theta_0)$. 又由于 $f(\theta_0) \cdot g(\theta_0) = 0$, 故有 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

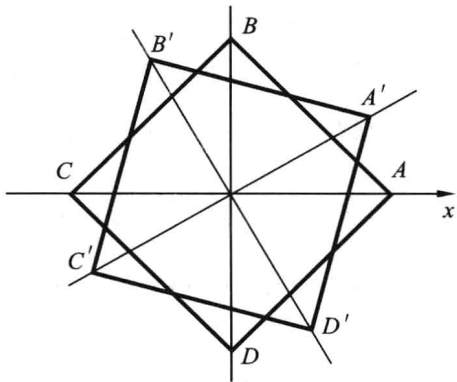


图 1.4 椅子位置旋转图



由于这个实际问题非常直观和简单,模型解释和验证就略去了.

【例 1.2】 图 1.5 为一双向通行的十字路口,每个方向均有一车辆通道,不考虑行人,车辆不允许转弯,给定红绿灯变换周期,试建立数学模型确定水平方向红灯所占时间.

H :水平方向; V :竖直方向.

模型假设 (1)车流是均匀的.

(2)所有车停下后再发动到正常车速所需时间相等(设为 s).

(3)忽略红绿灯的间隔(黄灯).

(4)车队中的车能同时制动和同时启动.

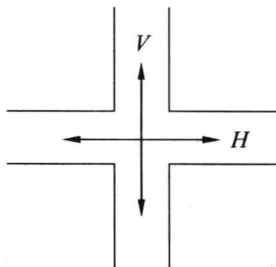


图 1.5 十字路口交通图

合理的红绿灯比例配置应使得一周期内车子被延误的时间总和尽量小.

模型建立 设一周周期时间为 1. 水平方向红灯时间为 r , 则绿灯时间为 $1-r$; 竖直方向红灯时间为 $1-r$, 则绿灯时间为 r .

假设水平方向每周期到达的车辆数为 h , 则红灯引起的停车量为 hr , 平均等待时间为 $\frac{r}{2}$, 总共延误时间为 $hr\left(s + \frac{r}{2}\right)$.

假设竖直方向每周期到达的车辆数为 v , 则红灯引起的停车量为 $v(1-r)$, 平均等待时间为 $\frac{1-r}{2}$, 总共延误时间为 $v(1-r)\left(s + \frac{1-r}{2}\right)$.

两个方向总共延误时间为 $t = hr\left(s + \frac{r}{2}\right) + v(1-r)\left(s + \frac{1-r}{2}\right)$. 由此可得: 当 $r = \frac{v + vs - hs}{h + v}$ 时, $t_{\min} = \frac{4hvs + 2hvs^2 + hv - (hs)^2 - (vs)^2}{2(h + v)}$, 即当水平方向红灯时间为 $r = \frac{v + vs - hs}{h + v}$ 时, 红绿灯比例配置使得在一周期内车子被延误的时间总和 t 最小.

如果假设红灯转成绿灯时, 每辆相继启动的车之间时间的延误相等, 记作 m , 其他条件不变. 则有, 水平方向总共延误的时间为 $hr\left(s + \frac{r}{2}\right) + (1 + 2 + \cdots + hr)m$; 竖直方向总共延误的时间为 $v(1-r)\left(s + \frac{1-r}{2}\right) + (1 + 2 + \cdots + v(1-r))m$. 两个方向总共延误时间为

$$t = hr\left(s + \frac{r}{2}\right) + (1 + 2 + \cdots + hr)m + v(1-r)\left(s + \frac{1-r}{2}\right) + (1 + 2 + \cdots + v(1-r))m$$

当水平方向红灯时间为 $r = \frac{v + vs + v^2s - hs - \frac{hm}{2} + \frac{vm}{2}}{h + v + h^2m + v^2m}$ 时, 红绿灯比例配置使得在一周期内车子被延误的时间总和 t 最小.

【例 1.3】 录像机计数器的用途: 一盘录像带插入录像机中从头到尾共用时 183.5 min, 计数器读数相应从 0000 变到 6152. 其中当运行到 60 min 时, 计数器读数为 2800, 当这盘录像带已转过大半时, 计数器读数为 4580. 问剩下的一段录像带还能否录下 1 小时的节目?

问题分析 显然, 计数器读数的变化是不均匀的. 先分析一下录像机计数器的工作原

理(见图1.6).由图1.6知:录像带运行时,右轮盘半径增大,计数器读数变慢.

建模目的 要求建立计数器读数 n 与时间之间的数量关系.

模型假设 (1)录像带的运行速度为常数 v .

(2)计数器读数 n 与右轮盘转过的圈数 m 成正比,记为 $m = kn$.

(3)录像带的厚度为 w .

(4)空的右轮盘半径为 r .

(5)当 $t = 0$ 时, $n = 0$.

模型建立 根据前面的分析与假设,现在要在 v, k, w, r 为常数的前提下寻求 t 与 n 之间的函数关系.对此,有多种方法求得.例如:

方法一:从面积考虑,在时刻 t 右轮盘转过 m 圈后其增加的面积应等于录像带的厚度乘以其移动的长度.于是有

$$\begin{cases} \pi[(r + wm)^2 - r^2] = wvt \\ m = kn \end{cases} \quad (1.1.1)$$

由(1.1.1)式得:

$$t = \frac{\pi wk^2}{v} n^2 + \frac{2\pi rk}{v} n$$

方法二:从长度考虑,右轮盘转过第 i 圈后的内半径为 $r + w(i-1)$,外半径为 $r + wi$,其平均半径为 $\frac{1}{2}[r + w(i-1) + r + wi] = r + \frac{w}{2}(2i-1)$.从而右轮盘转过 m 圈后的总长度应为录像带在时间 t 内移动的长度 vt ,于是有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m 2\pi[r + \frac{w}{2}(2i-1)] = vt \\ m = kn \end{cases} \quad (1.1.2)$$

化简(1.1.2)式可得

$$t = \frac{\pi wk^2}{v} n^2 + \frac{2\pi rk}{v} n$$

模型求解 为了得到上述模型的具体结果形式,需要确定参数 r, v, k, w ,这需要通过实际调查或测试得到.下面仅根据题目所给条件给出大致结论.

设 $t = an^2 + bn$, a, b 为待定系数.由已知条件,将 $\begin{cases} t = 60 \\ n = 2800 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} t = 183.5 \\ n = 6152 \end{cases}$ 代入待定函数关系式,解方程组可得

$$\begin{cases} a = 2.51 \times 10^{-6} \\ b = 1.44 \times 10^{-2} \end{cases}$$

从而得到函数关系: $t = 2.51 \times 10^{-6} n^2 + 1.44 \times 10^{-2} n$.

将 $n = 4580$ 代入上式得, $t = 118.5$ min. 而 $183.5 - 118.5 = 65$ min $>$ 60 min,故剩下的录像带还能录1h的节目.

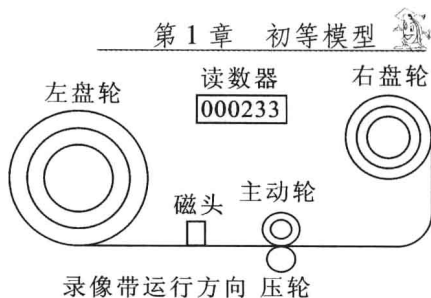


图1.6 录像机计数器



模型检验 可在录像机运行时,测试一批数据 (t, n) 用于检验模型的正确性.

模型讨论 本模型确定了 t 与 n 之间的二次函数关系,对于不同的录像机与录像带应当是普遍适用的,只不过参数 a, b 会有所不同.

本模型求解时,确定参数 a, b 仅仅用了两组数据 (t, n) ,事实上这是不够精确的,应当通过多组数据 (t, n) 来确定 a, b .

【例 1.4】 在某海滨城市附近海面有一股台风. 据监测,当前台风中心位于城市 O (如图 1.7)的东偏南 θ ($\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$)方向 300 km 的海面 P 处,并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动. 台风侵袭的范围为圆形区域,当前半径为 60 km,并以 10 km/h 的速度不断增大. 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?

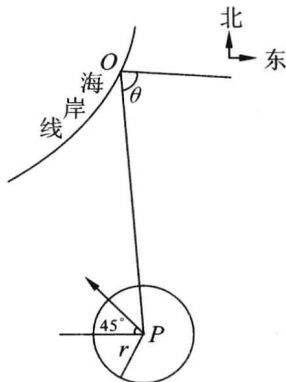


图 1.7 台风中心位置与城市位置

问题分析与假设 (1) 根据问题:几小时后该城市开始受到台风的侵袭,以及侵袭的范围为圆形,可知只要求出以台风中心(动点)为圆心的圆的半径 r ,这个圆的半径划过的区域自然是侵袭范围.

(2) 台风中心是动的,移动方向为向西偏北 45° ,速度为 20 km/h,而当前半径为 60 km,并以 10 km/h 的速度不断增大,即半径的增加速度为 $r(t) = 60 + 10t$, t 为时间. 于是只要 $OP \leq 10t + 60$,便是城市 O 受到侵袭的开始.

模型 I 如图 1.8 建立坐标系,以 O 为原点,正东方向为 x 轴正向. 在时刻 t (h)台风中心 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ 的坐标为

$$\begin{cases} \bar{x} = 300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ \bar{y} = -300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$

此时台风侵袭的区域是

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 \leq [r(t)]^2$$

其中 $r(t) = 10t + 60$.

若在 t 时刻城市 O 受到台风的侵袭,则有

$$(0 - \bar{x})^2 + (0 - \bar{y})^2 \leq (10t + 60)^2$$

即

$$\left(300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left(-300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 \leq (10t + 60)^2$$

整理可得

$$t^2 - 36t + 288 \leq 0$$

由此解得 $12 \leq t \leq 24$,即 12 小时后该城市开始受到台风的侵袭.

模型 II 设在时刻 t (h)台风中心为 $\bar{P}$ (如图 1-8),此时台风侵袭的圆形半径为 $10t + 60$,因此,若在时刻 t 城市 O 受到台风侵袭,应有

$$OP \leq 10t + 60$$

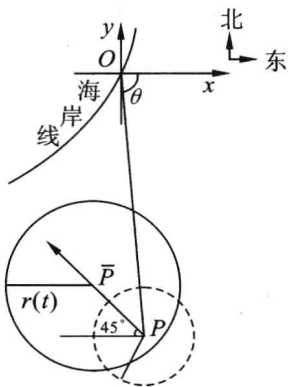


图 1.8 台风侵袭坐标



由余弦定理知

$$OP^2 = PP^2 + OP^2 - 2PP \cdot OP \cdot \cos \angle OPP$$

注意到

$$OP = 300, PP = 20t$$

$$\cos \angle OPP = \cos(\theta - 45^\circ) = \cos \theta \cdot \cos 45^\circ + \sin \theta \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{1 - \frac{2}{10^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{5}$$

故

$$\begin{aligned} OP^2 &= (20t)^2 + 300^2 - 2 \times 20t \times 300 \times \frac{4}{5} \\ &= 20^2 t^2 - 9600t + 300^2 \end{aligned}$$

因此 $20^2 t^2 - 9600t + 300^2 \leq (10t + 60)^2$, 即 $t^2 - 36t + 288 \leq 0$. 由此解得 $12 \leq t \leq 24$, 即 12 小时后该城市开始受到台风的侵袭.

1.2 比例方法建模

很多实际问题,量与量之间存在着比例关系,可以通过简单的比例方法建立模型确定量与量之间的关系,称为比例方法建模.

【例 1.5】商品的包装与价格:市场上许多商品价格存在大包装比小包装便宜的现象.比如佳洁士炫白体验(晨露荷香口感)牙膏 120 g 装的每支 10.80 元,180 g 装的每支 13.90 元,二者单位重量的价格比为 1.165:1.你能构造一个模型解释这个现象吗?

问题分析 问题归结为寻求商品价格 P 与重量 W 的关系.价格与商品成本有关,而成本通常分为不变成本、生产成本、运输成本和包装成本等.其中不变成本对每件商品应为常数,生产成本与运输成本均与商品重量 W 成正比,包装成本则与商品表面积 S 成正比.

模型假设 (1)一件重量为 W 的商品表面积为 S ,体积为 V ,单位重量的价格为 P .

(2)重量为 W 的一件商品不变成本为 A_0 ,生产成本为 A_1 ,运输成本为 A_2 ,包装成本为 A_3 ,则总成本 $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$.

(3) A_0 为常数, A_1, A_2 与 W 成正比, A_3 与 S 成正比,分别记为: $A_1 \propto W, A_2 \propto W, A_3 \propto S$.

(4) P 与 A/W 成正比,记作 $P \propto A/W$.

模型建立 由假设(3)可设: $A_1 = K_1 W, A_2 = K_2 W (K_1, K_2$ 为常数,且 $K_1 > 0, K_2 > 0)$. $A_3 \propto S, S$ 为商品的表面积,它必与商品的某个特征尺寸 C 的平方成正比,即 $S \propto C^2$,而商品的体积必与 C 的立方成正比,即 $V \propto C^3$,故 $S \propto V^{2/3}$.又 V 显然与商品重量 W 成正比,即 $V \propto W$,则有: $A_3 \propto W^{2/3}$,可设 $A_3 = K_3 W^{2/3} (K_3$ 为常数,且 $K_3 > 0)$.

由假设(2)知

$$A = A_0 + K_1 W + K_2 W + K_3 W^{2/3} \quad (1.2.1)$$

由假设(4)可设

$$P = K \cdot \frac{A}{W} (K \text{ 为常数,且 } K > 1) \quad (1.2.2)$$

将(1.2.1)代入(1.2.2)得

$$P = P(W) = K \cdot \frac{A}{W} = \frac{K(A_0 + K_1 W + K_2 W + K_3 W^{2/3})}{W}$$



$$= K \left(\frac{A_0}{W} + K_1 + K_2 + \frac{K_3}{W^{\frac{1}{3}}} \right)$$

模型解释 由上式可以看出,单位重量的商品价格 P 随着重量 W 的增大而减小,这说明大包装商品比小包装商品便宜.

上式中涉及的参数 A_0, K, K_1, K_2, K_3 可就具体商品调查得到. 若取 $A_0 = 10, K = 10, K_1 = 0.8, K_2 = 0.7, K_3 = 0.1$, 则可得到本例中不同包装的牙膏价格. 特别地,若牙膏为 250 g 一支,则可算得每支价格应为 15.6 元.

【例 1.6】赛艇比赛的成绩:赛艇分单人艇、双人艇、四人艇和八人艇四种,各种赛艇虽大小不同,但形状相似. 下表 1.1 中列出了各种赛艇的规格及其在四次 2000 m 比赛中的最好成绩. 试根据表中数据分析赛艇比赛成绩与桨手数量之间有何关系.

表 1.1 各种艇的比赛成绩与规格

艇种	2000 m 成绩 t (min)					艇长 l (m)	艇宽 b (m)	$\frac{l}{b}$	艇重 W_0 (kg) 桨手数 n
	1	2	3	4	平均				
单人	7.16	7.25	7.28	7.17	7.22	7.93	0.293	27.0	16.3
双人	6.87	6.92	6.95	6.77	6.88	9.76	0.356	27.4	13.6
四人	6.33	6.42	6.48	6.13	6.34	11.75	0.574	20.5	18.1
八人	5.87	5.92	5.82	5.73	5.84	18.28	0.610	30.0	14.7

问题分析:赛艇前进时受到的阻力主要是艇身浸没在水中的部分与水之间的摩擦力. 艇靠桨手的力量克服阻力前进. 桨手越多艇前进的动力越大,但艇与桨手总重量的增加会使艇身浸没在水中部分的面积加大,于是阻力加大. 建模目的是寻求桨手数量与比赛成绩(艇划行一定距离所需时间)之间的数量规律. 如果假设艇速在整个赛程中保持不变(由于在实际比赛中桨手会在极短时间内使艇达到最大速度并保持这个速度直到终点,故这种假设是合理的),则问题简化为建立桨手数量与艇速的关系.

由表 1.1 可看出,艇的尺寸 l, b 及艇重 W 都随着桨手数量 n 的增加而增加,但比值 $\frac{l}{b}$ 和 $\frac{W_0}{n}$ 变化不大. 若假定 $\frac{l}{b}$ 为常数,即各种艇的几何形状一样,则可得到艇身浸没面积与排水体积之间的关系. 若假定 $\frac{W_0}{n}$ 为常数,则可得到艇和桨手总重量与桨手数量之间的关系. 此外还需对桨手体重、划桨功率、阻力与艇速的关系等作出简化合理的假设,才能运用适当的物理定律建立所需的模型.

模型假设 (1)各种艇的几何形状相同,即 $\frac{l}{b}$ 为常数;艇重 W_0 与桨手数量 n 成正比. 这是艇的静态性质.

(2)艇速 v 是常数,前进时受的阻力 f 与 Sv^2 成正比(S 是艇身浸没在水中部分的面积). 这是艇的动态性质.

(3)所有桨手的体重都相同,记为 W ;在比赛中每个桨手划桨的功率 P 保持不变,且 P 与 W 成正比(因为 P 与肌肉体积、肺的体积成正比. 对于身材匀称的运动员,肌肉、肺的体积与体重 W 成正比).



模型建立 有 n 名桨手的艇的总功率 nP 与阻力 f 和速度 v 的乘积成正比, 即: $nP \propto fv$.

由假设(2)、(3)得: $f \propto Sv^2$, $P \propto W$, 代入上式得:

$$nW \propto Sv^3 \text{ 或 } v \propto \left(\frac{nW^{\frac{1}{3}}}{S} \right) \quad (1.2.3)$$

由假设(1), 各种艇的几何形状相同, 若艇浸没面积 S 与艇的某特征尺寸 C 的平方成正比 ($S \propto C^2$), 则艇排水体积 A 必与 C 的立方成正比 ($A \propto C^3$), 于是有

$$S \propto A^{\frac{2}{3}} \quad (1.2.4)$$

又根据艇重 W_0 与桨手数 n 成正比, 可知艇和桨手的总重量 $W' = W_0 + nW$ 也与 n 成正比, 即

$$W' \propto n \quad (1.2.5)$$

而由阿基米德定律, 艇排水体积 A 与总重量 W' 成正比, 即

$$A \propto W' \quad (1.2.6)$$

由(1.2.4), (1.2.5), (1.2.6)式得

$$S \propto n^{\frac{2}{3}} \quad (1.2.7)$$

将(1.2.7)代入(1.2.3), 并注意到 W 为常数, 于是有 $v \propto n^{-\frac{1}{9}}$. 因为比赛成绩 t (时间) 与 v 成反比, 所以得

$$t \propto n^{-\frac{1}{9}} \quad (1.2.8)$$

模型解释与检验 最后得到的(1.2.8)式表明: 赛艇比赛的成绩(时间)与桨手数量 n 的幂 $n^{-\frac{1}{9}}$ 成正比, 即 $t = kn^{-\frac{1}{9}}$ ($k > 0$). 虽然这里还不知道 k 等于多少, 但我们仅用比例方法就得到如此具体的结论已属不易了.

为了检验上述结论的正确性, 可设 t 与 n 的关系为 $t = \alpha n^{\beta}$, 其中 α, β 为待定常数, 取对数: $\lg t = \lg \alpha + \beta \lg n$. 利用最小二乘法根据表 1.1 所给数据拟合上式, 得到: $\alpha = 7.21, \beta = -0.111$. 即 $t = 7.21n^{-0.111}$, 可见(1.2.8)式所得的结果与实际是相当吻合的.

1.3 枚举方法建模

许多实际问题常常涉及多种可能性, 要求最优解. 我们可以把这些可能性一一罗列出来, 按照某些标准选择较优者, 称之为枚举方法建模, 也称穷举方法建模或比较方法建模.

【例 1.7】 打包问题: 某商品为长方体形状, 其长、宽、高分别为 a, b, c , 且 $a \geq b \geq c$. 为了运输、贮存和销售的方便, 需要将 n ($n > 1$) 件商品包在一起, 问如何打包, 才能使所用包装材料最省?

问题分析 商品打包十分常见, 如香烟、火柴通常 10 盒打成一包; 香皂通常 6 块、8 块或 10 块打成一包; 牙膏通常 8 条、9 条、12 条打成一包; 等等. 问题是如何对这些商品进行排列再进行打包, 才能使包装材料最省. 这就需要对商品的各种不同排列方式进行比较.

模型假设 (1) 打包采用“规则打包”法. 所谓“规则打包”是指打包时相邻两个商品只能以全等的侧面相对接且使打包后所成形状仍为长方体.

(2) 打包后, 外包装材料两端相粘贴部分面积忽略不计.



模型建立与求解 对 n 的不同情况分别用枚举方法给出商品的不同排列方式并讨论如下: (1) n 为质数, 即 n 有唯一分解式, $n = 1 \times n$, 此时 n 件商品的不同排列只有下面三种 (如图 1.9).

这三种排列对应的外包装的表面积分别为:

$$S_1 = 2ab + 2nac + 2nbc$$

$$S_2 = 2ac + 2nab + 2nbc$$

$$S_3 = 2bc + 2nab + 2nac$$

由于 $a \geq b \geq c > 0$, 故有

$$S_3 - S_2 = 2(n-1)(a-b)c \geq 0$$

$$S_2 - S_1 = 2(n-1)(b-c)a \geq 0$$

即 $S_3 \geq S_2 \geq S_1$, 因而采取形如①的打包外包装材料最省.

(2) n 为合数且仅含有两个质因数, 即 $n = 1 \times n = n_1 \times n_2$, n_1, n_2 为质数. 此时 n 件商品的不同排列除图 1.9 所示的三种外, 还有图 1.10 所示的六种, 对应六种商品外包装的表面积依次为

$$S_4 = 2n_1n_2bc + 2n_1ac + 2n_2ab$$

$$S_5 = 2n_1n_2ab + 2n_1ac + 2n_2bc$$

$$S_6 = 2n_1n_2bc + 2n_1ab + 2n_2ac$$

$$S_7 = 2n_1n_2ab + 2n_1bc + 2n_2ac$$

$$S_8 = 2n_1n_2ac + 2n_1bc + 2n_2ab$$

$$S_9 = 2n_1n_2ac + 2n_1ab + 2n_2bc$$

由 $a \geq b \geq c > 0$, 并设 $n_1 > n_2 > 1$, 容易算得

$$S_6 - S_4 = 2(n_1 - n_2)a(b - c) \geq 0$$

$$S_5 - S_7 = 2(n_1 - n_2)(a - b)c \geq 0$$

$$S_9 - S_8 = 2(n_1 - n_2)b(a - c) \geq 0$$

$$S_7 - S_6 = 2n_1(n_2 - 1)b(a - c) \geq 0$$

$$S_8 - S_4 = 2n_1(n_2 - 1)(a - b)c \geq 0$$

即图 1.10 的六种排列, S_4 最小. 再比较 S_1 与 S_4 ,

由于

$$S_1 - S_4 = 2(n_2 - 1)a(n_1c - b)$$

故当 $n_1c \geq b$ 时, $S_1 \geq S_4$; 当 $n_1c \leq b$ 时, $S_1 \leq S_4$.

综合起来, 当 $n_1c \geq b$ 时, 图 1-10 中④排列对应的商品外包装面积 S_4 最小; 当 $n_1c \leq b$ 时, 图 1.9 中①排列对应的商品外包装面积 S_1 最小.

(3) n 含三个或三个以上质因数. 即 $n = 1 \times 1 \times n = n_1 \times n_2 \times n_3$, n_1, n_2, n_3 为正整数且 $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$, 此时 n 件商品的不同排列方式除图 1.9 所示的三种外, 还有下图所示的各种排列 (见图 1.11, 为简便起见, 以坐标方式简化表示):

当 $n_1 > n_2 > n_3$ 时, 有六种排列:

当 $n_1 > n_2 = n_3$ 时, 图 1.11 中的六种排列归为④⑤⑥三种排列;

当 $n_1 = n_2 > n_3$ 时, 图 1-11 中的六种排列归为④⑤⑧三种排列;

当 $n_1 = n_2 = n_3$ 时, 图 1-11 中的六种排列归为④一种排列.

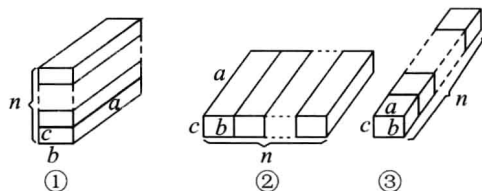


图 1.9 打包方法示例一

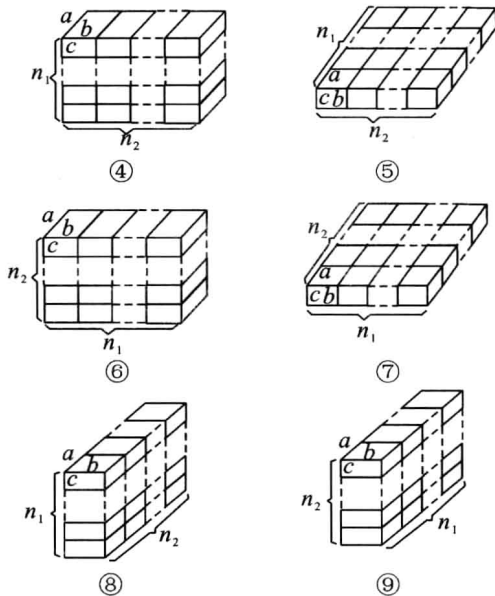


图 1.10 打包方法示例二