

初等几何

专题研究

邓鹤年 编

四平师范学院数学系

一九八〇年九月

初等几何专题研究

邓鹤年 编

四平师范学院数学系

一九八〇年、四平

初等几何专题研究

邓鹤年编

四平师范学院印刷厂印刷

前 言

初等几何是中学数学教学的主要内容之一，它是用综合方法研究几何图形性质的一门课程，由于内容及方法的特殊性，不可能由其他课程的教学来解决，因此，在高等师范院校讲授《初等几何专题研究》还是很必要的。提高师资质量是多方面的工作，从中学几何课程来说，由于在高等师范院校已开设《解析几何》、《微分几何》、《高等几何》，有许多问题可以通过这些课程的教学来解决，因此，《初等几何专题研究》课程可着重于综合方法的研究，这样就可突出特点、避免重复。

初等几何与形式逻辑密切相关，结合初等几何教学介绍一些形式逻辑的基础知识是有必要的，但《初等几何专题研究》并非形式逻辑课程，而应以分析几何内容为主来讲解。

几何证明方法——综合方法，因题而异，变化无穷，但关键在于运用所学定理，围绕如何引用适当定理来讨论，这样把一些有效方法联系起来，有助于掌握思考的方法，是否恰当，仅供参考。证题方法的分类是为了说明思考各类具体问题的特殊性，只是一种形式，不能把它们割裂开来，而应注意它们之间的相互联系、相互作用。

轨迹与作图是初等几何重要内容之一，由于中学教材在这方面作了大量的精简，因此只介绍基础知识和解题的主要方法。

变换的概念是近代几何重要概念之一，也是改革中学几何教学内容的一个方向，初等几何变换的理论，对中学几何教学有指导意义，因此，有必要系统研究。

在编印此教材的过程中，得到系领导的关怀和校印刷厂全体同志的大力支持，以及中学数学教研室和几何教研室全体同志的帮助，特此致谢。

由于水平有限，难免有许多错误，衷心希望批评指正。

编者于一九八〇年八月

第一篇 初等几何的逻辑方法

第一章 概念

- § 1、概念的形成…………… (1)
- § 2、概念的内涵和外延…………… (4)
- § 3、各概念间的关系…………… (5)
- § 4、概念的定义…………… (8)
- § 5、原始概念…………… (13)
- § 6、概念的分类(划分)…………… (15)

第二章 几何命题

- § 7、命题的概述…………… (19)
- § 8、几何命题的四种变化形式…………… (20)
- § 9、充分、必要与充要条件…………… (23)
- § 10、定理…………… (25)
- § 11、逆命题的制作法、逆定理…………… (28)
- § 12、同一性命题与分断式命题…………… (33)
- § 13、公理…………… (35)

第三章 推理

- § 14、推理的概述…………… (39)
- § 15、归纳法…………… (41)
- § 16、演绎法…………… (47)

第四章 证明

- § 17、证明的含义与作用…………… (52)
- § 18、证明中应注意的事项…………… (55)

| | |
|----------|--------|
| § 19、反证法 | (61) |
| § 20、同一法 | (68) |
| § 21、综合法 | (73) |
| § 22、分析法 | (77) |

第二篇 几何证题方法举例

第五章 相等

| | |
|----------------|--------|
| § 23、关于相等的证题方法 | (85) |
|----------------|--------|

第六章 和差倍分、定值

| | |
|------------------|---------|
| § 24、关于和差倍分的证题方法 | (111) |
| § 25、关于定值问题的证题方法 | (120) |

第七章 不等、极值

| | |
|------------------|---------|
| § 26、关于不等的证题方法 | (127) |
| § 27、关于极值问题的证题方法 | (138) |

第八章 比例、乘积与面积

| | |
|-------------------|---------|
| § 28、关于比例与乘积的证题方法 | (143) |
| § 29、关于面积问题的证题方法 | (156) |

第九章 垂直与平行

| | |
|-------------------|---------|
| § 30、关于垂直与平行的证题方法 | (167) |
|-------------------|---------|

第十章 共线点与共点线

| | |
|-----------------|---------|
| § 31、关于共线点的证题方法 | (180) |
| § 32、关于共点线的证题方法 | (190) |

第十一章 共圆点与共点圆、相切

| | |
|---------------------|---------|
| § 33、关于共圆点、共点圆的证题方法 | (198) |
| § 34、关于相切的证题方法 | (204) |

第三篇 轨迹与作图

第十二章 轨迹

- § 36、轨迹的概念…………… (210)
- § 37、轨迹命题的证明…………… (215)
- § 38、轨迹证法举例…………… (218)
- § 39、轨迹的探求…………… (223)

第十三章 几何作图的基础知识

- § 40、解几何作图题的概述…………… (234)
- § 41、几何作图各步骤的分析…………… (241)

第十四章 常用的作图方法

- § 42、轨迹交点法…………… (254)
- § 43、三角形奠基法…………… (262)
- § 44、代数分析法…………… (269)

第十五章 尺规作图可能性的准则

- § 45、尺规作图能与不能的条件…………… (283)
- § 46、著名尺规作图不能问题…………… (286)
- § 46、尺规作图不能问题的其他解法…………… (291)
- § 47、近似作图法…………… (293)

第四篇 初等几何变换

第十六章 变换群

- § 48、一一变换的概念…………… (299)

| | |
|----------|---------|
| § 49、变换群 | (301) |
|----------|---------|

第十七章

| | |
|------------|---------|
| § 50、移动的概念 | (305) |
|------------|---------|

| | |
|---------|---------|
| § 51、反射 | (308) |
|---------|---------|

| | |
|---------|---------|
| § 52、平移 | (312) |
|---------|---------|

| | |
|---------|---------|
| § 53、旋转 | (315) |
|---------|---------|

| | |
|------------|---------|
| § 54、自对称图形 | (322) |
|------------|---------|

| | |
|----------------|---------|
| § 55、移动在解题中的应用 | (325) |
|----------------|---------|

第十八章 相似变换

| | |
|--------------|---------|
| § 56、相似变换的概念 | (334) |
|--------------|---------|

| | |
|-----------|---------|
| § 57、位似变换 | (338) |
|-----------|---------|

| | |
|--------------------|---------|
| § 58、位似变换在几何作图上的应用 | (344) |
|--------------------|---------|

第一篇 初等几何的逻辑方法

第一章 概念

§ 1、 概念的形成

我们认识周围的事物（对象），就是将各种事物（对象）进行相互比较，以辩明其异同。对象间彼此相似或彼此有别的东西，都叫做对象的属性。属于某类对象，并且根据它能把这类对象和其他各类对象区别开来的那些属性，叫做这类对象的本质属性。做为本质属性的每一个属性，是该类对象所必需的；而且，只要有了这些属性，就能把该类对象跟其他各类对象区别开来。本质属性是这一（类）事物区别于他（类）事物的特殊本质，是各事物间所以有千差万别的内在原因。本质属性是从该类对象所具有的许多属性中选择出来的，它包含在对象的一般属性之中，同时它又决定着对象的其他属性，根据它（们）就可以推出对象的其他属性。本质属性的选择是和认识该类对象的任务相联系的，根据不同任务的需要，可以从不同方面来选择，因而本质属性具有相对性。

例如，就矩形来说，它具有许多属性：（1）是四边形；（2）两双对边平行；（3）两双对边相等；（4）各角都是直角；（5）两对角线相等；（6）两对角线互相平分；（7）有外接圆；（8）它的面积等于两邻边长的乘积；等等。每个矩形都必然具有这些属性，但是，当我们拿

出单独的某一个属性来考察某对象，还是不能确定该对象是否为矩形；只有当我们从其中适当地选择出一组属性，做为属性的整体来考察某（类）对象，我们才能确定该（类）对象是否为矩形。中学教科书选择了（1）是四边形，（2）两双对边分别平行，（3）有一角是直角这组属性，做为矩形的本质属性的整体。有了这组属性就能把矩形与其他图形区别开来；同时，有了这组属性，在一定的基础上，就可以推出矩形的其他属性来。因此，我们可以说，概念是客观事物的本质属性在人们头脑里的反映。由于数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学，相应地，数学中的一切概念，也就是现实世界空间形式和数量关系这类本质属性在人们头脑里的反映。就如上面所说的矩形，当我们提到这个概念时，在我们头脑里反映出来的是：（1）是四边形；（2）两组对边分别平行；（3）有一角是直角这组本质属性。

那么抽象的数学概念最初究竟是怎样形成的呢？这个问题涉及的内容比较广泛，而且甚为复杂，不是《初等几何研究》中所能解决的，我们仅就初等几何学中一些最简单的图形来说明几何概念的形成。例如“圆”的概念，我们知道，人们在生产实践和日常生活中，看到浮现在夜空中的满月，早晨升起的太阳，平静水面被石子激起的波纹，车床上飞速旋转的卡盘，来往行驶的各种车辆的车轮等等，都给予我们“圆形”的印象，当我们将这些极为丰富的感性材料，加以“去粗取精，去伪存真，由此及彼，由表及里”的加工制作，进行科学的分析研究，就能抽象、概括出它们共同的、特殊的属性——本质属性：它们上的点都在一个平面上，这些点到某个定点（中心）的距离都是相等的。当我们将具有“圆

形”的这类对象有了上述的认识上的飞跃后，于是在我们脑子里就形成了“圆”的概念。即得出：“圆”(周)是到一定点距离都相等的所有点组成的平面图形”。这就是毛主席指出的“社会实践的继续，使人们在实践中引起的感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的头脑里生起了一个认识过程的突变(即飞跃)，产生了概念”。

我们在前面说的概念是反映对象的本质属性，是属于形式逻辑的内容；在辩证逻辑中，概念是指该(类)对象属性的总结、总和，是关于该(类)对象认识的结晶、结果，它所包含的内容比形式逻辑更为广泛。

概念既是对某(类)对象认识的结果，因此，它必须具有明确性和确定性。然而，人们在实践过程中对客观事物的认识是不断深入、不断发展的，因此，对某一概念的理解也应是逐渐深入和不断发展的。相对确定和不断发展，二者是辩证的统一。例如，在初等几何学中关于“角”的概念，首先从客观现实中概括得出“从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角”，对它本身来说，是明确的，也是确定的。后来，进一步从变化的观点来说明角的形成：“把一条射线 OA 绕着它的端点 O ，从原来的位置 OA 旋转到另一个位置 OB ，这时 OA 和 OB 就形成了一个角。”给出了角的新概念，这是由静到动的新发展。规定了射线旋转的方向，就形成了正角和负角的概念，这是角的概念由正到负的发展。立体几何中给出异面直线的角，这是由平面到空间的发展。并且还提出直线和平面间的角、二面角、多面角等，这是由射线到半平面到多平面的发展。我们把这些概念联系起来，就能得到不断深入的认识。

§ 2、概念的内含和外延

作为一门学科来说，它所包含的诸概念都是彼此联系的，它们组成完整的体系。要掌握各概念间的关系，概念的内涵（内容）和外延（范围）具有重要的意义。

概念的内涵是指该概念所具有的本质属性的总和。例如，“平行线”这个概念，它的内涵是两条直线、在同一平面内、不相交的总和。“菱形”这个概念的内涵是四边形（有四条边的多边形）、两组对边分别平行、两邻边相等的总和。

概念的外延是指该概念所包含的对象的总和。例如，“三角形”这个概念，它的外延是所有三角形的集合，它包括一切直角三角形、锐角三角形和钝角三角形。“四边形”这个概念的外延是所有四边形的集合，它包括平行四边形、梯形、筝形以及其他各种形状的四边形。

任何概念，不论它反映的对象（包括对象、对象的属性和对象间的关系）是什么，总是有它的内涵和外延。概念的内涵和外延之间存在着密切的联系，如果概念的内涵扩大，外延也就因之而缩小；反之，如果概念的内涵缩小，外延也就因之而扩大。例如，对“平行四边形”这个概念来说，如果从它的内涵中去掉“两组对边分别平行”这个属性，它的外延也就扩大成为所有四边形的集合；如果在它的内涵中加上“两邻边相等”这个属性，它的外延就缩小成为所有菱形的集合。

对一个概念是否有明确的理解，决定于对这个概念的内涵和外延两个方面是否有切实的掌握。弄清概念的内涵和外

延，就能进一步分清概念间的各种关系。

§ 3、各概念间的关系

两个概念间的关系，就是指它们的内涵和外延的关系，主要的有：

1、**从属关系**：是指一概念P的外延被包含于另一概念Q的外延内，且作为它的一部分的这种关系。也就是说，概念P对象集合是概念Q对象集合的子集（如图1）。这时，概念Q叫做P的种，概念P叫做Q的属。

种属关系从外延来说，即一般与特殊的关系，特殊被包含于一般之中；而它们的内涵（属性）则具有相反的关系，即普遍性与特殊性的关系。“普遍性即存在于特殊性之中”，即种概念所具有的一切属性，都无例外地为属概念所具有，当然特殊的属还具有它自身的特殊性质。例如，平行四边形和矩形，矩形的集合被包含于平行四边形的集合之中，矩形是特殊的平行四边形。正因如此，平行四边形的一切性质，也一定是矩形的性质，同时，矩形还具有它自身的一些特殊性质。

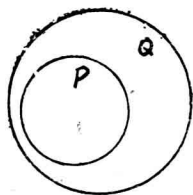


图 1

种和属的关系是指对象间的从属关系，是一般与特殊的关系，不应与构成该对象的整体与局部相混淆。例如三角形与直角三角形，是一般与特殊的关系；而三角形与三角形的边、三角形的角是整体与局部的关系，是某个对象与构成该对象的各个元素间的关系。

种和属的关系是相对的。同一个概念，对于不同的概念

来说，它可能是种概念，也可能是属概念。例如，平行四边形对矩形来说，矩形是属概念，平行四边形是种概念；但是，平行四边形对四边形来说，四边形是种概念，而平行四边形就是属概念了。

2、同一关系：是指有相同外延的两个概念的关系。即这两个概念的对象集合 A 与 B 是相等的（如图 2）。例如，等边三角形与等角三角形的集合，立方体与正六面体的集合等，它们所包含的对象是完全相同的，它们都分别有同一关系，只是从不同的内涵揭示出来而已。

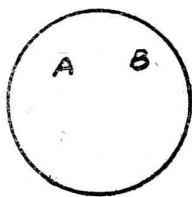


图 2

3、交叉关系：是指两概念的外延有部分重合的关系。即这两个概念的对象集合 A 与 B 存在着共同的对象——公共的子集合 C（如图 3）。例如，在矩形和菱形的集合中，都包含着正方形集合；等腰三角形与直角三角形的集合中，都包含着等腰直角三角形集合，它们都分别有交叉关系，而正方形、等腰直角三角形分别是它们的交集。

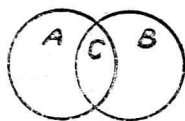


图 3

4、并列关系：是指从属于一个共同的种的各属之间的关系，即这些概念的对象集合 A、B、C、……都是某概念对象集合 P 的子集合（如图 4）。例如，梯形、平行四边形、筝形集合，都是四边形集合的子集合，它们的关系就

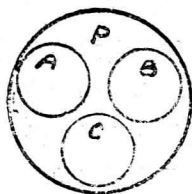


图 4

是并列关系。矩形和菱形都是从属平行四边形的，它们的关系也是并列关系；锐角三角形、直角三角形和钝角三角形都属于三角形，它们的关系也是并列关系。

5、反对关系：是指同属于一个共同的种的两个概念的一种关系，它们的内涵是相互反对的，它们的外延的总和小于种概念的外延。即两个概念的对象集合A和B都是集合P的子集，而集合A和B的并集是集合P的真子集(如图5)。例如，锐角三角形集合与钝角三角形集合，都是三角形集合的子集，它们的内涵是反对的，这两个集合的并集是三角形集合的真子集。由此可知，它们是反对关系。

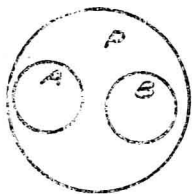


图5

6、矛盾关系：是指同属于一个共同的种的两个概念的另一种关系，它们的内涵是矛盾的（即一个概念的内涵否定了另一个概念的内涵），而它们的外延的总和等于邻近种的外延。即两概念对象集合A和B都是集合P的子集，而集合A和B的并集正好等于集合P(如图6)。例如，梯形与非梯形的四边形集合都是四边形的子集，而它们的并集正好等于四边形集合，因此是矛盾关系。

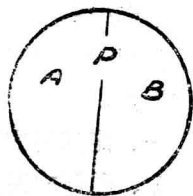
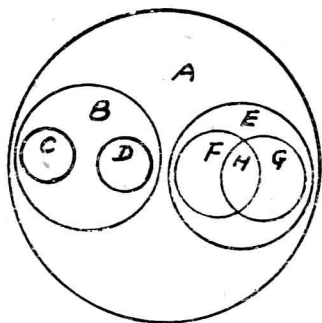


图6

分析各相关概念间的关系，有助于弄清各概念的联系和区别，有助于深入理解各概念的实质。例如，各种四边形的关系，若用图表(如图7)表示，就能一目了然。



注： 图中

A —— 四边形

B —— 梯形

C —— 等腰梯形

D —— 直角梯形

E —— 平行四边形

F —— 矩形

G —— 菱形

H —— 正方形

图
7

§ 4、概念的定義

給概念下定義就是揭示概念的本質屬性。由於定義揭示了概念的本質屬性，因此就明確了該概念所反映的對象與其他對象的區別；同時，從這個定義出發就可以推出該類對象的其他屬性。

數學學科引入新概念的基本途徑是通過定義。概念的定義就是用這門學科領域中的一些已知概念來敘述我們所要定義的概念。

一、**定義的方法** 在幾何學中常用的定義方法有：

1、**種屬式定義** 就是揭示被定義概念最鄰近的“種”概念和在這個“種”內它與其他“屬”概念的差別——屬差。這種定義的結構可表為如下公式：

被定義的概念 = 最鄰近的種 + 屬差

例如給“平行四邊形”下定義，首先確定它最鄰近的種概念——四邊形；然後再確定在這個種內與其他屬概念（如梯形、箏形等）的差別——兩組對邊分別平行。於是便得到