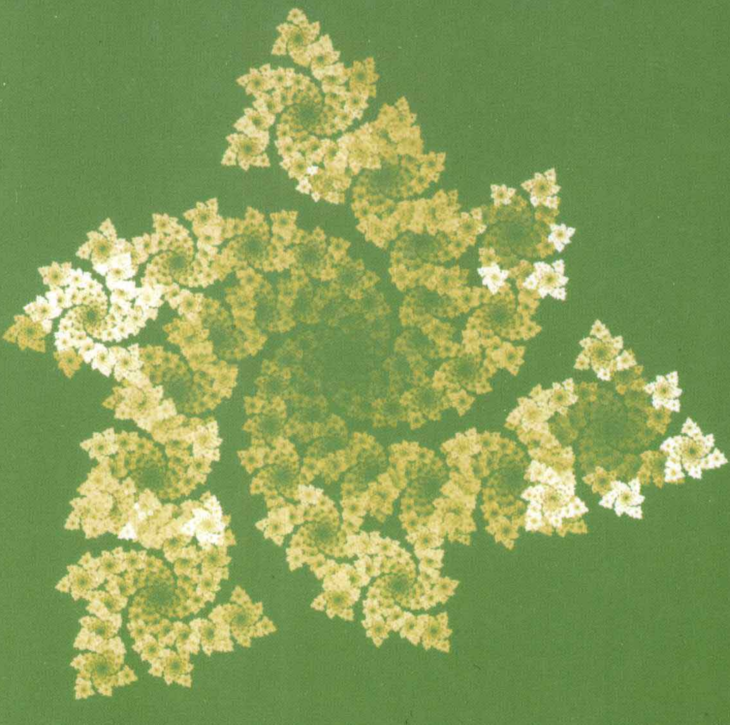
映射迭代与混沌动力系统

廖公夫　王立冬　范钦杰　著



科学出版社

映射迭代与混沌动力系统

廖公夫　王立冬　范钦杰　著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书介绍映射迭代可能发生的动力性质，特别是可能发生的混沌性态. 全书共分七章，前三章包含动力系统中若干基本概念、拓扑熵以及符号动力系统严格的数学描述，也包含少许遍历理论和分形几何等数学分支中的内容. 后四章陈述的主要是国内外学者及作者近年来在混沌的刻画、区间映射、Feigenbaum 映射、超空间映射等几个方面所取得的研究成果.

本书可供高等院校数学学科高年级学生、研究生和青年教师阅读，也可供从事混沌理论和应用研究的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

映射迭代与混沌动力系统/廖公夫，王立冬，范钦杰著. —北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-036253-7

Ⅰ. ①映… Ⅱ. ①廖… ②王… ③范… Ⅲ. ①映射－迭代法 ②混沌－动力系统(数学) Ⅳ. ①O189 ②O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 310426 号

责任编辑：刘凤娟 尹彦芳／责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬／封面设计：耕者设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2013 年 1 月第一次印刷 印张：13 3/4
字数：261 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

映射迭代所涉及的中心问题归结为动力系统渐近性态的研究, 或者说归结为空间中的点经多次迭代后具有怎样的未来的探究. 20 世纪 60 年代以前, 确定论是科学研究的主导思想, 人们认为当数学模型确定后, 只要有精确的初值, 就可以预知未来. 但是随着气象学、生态学、天体力学等自然学科中许多自然现象的发现, 学者们逐渐意识到随机性和不可确定性的重要. 1963 年, 后来被誉为 "混沌之父" 的气象学家 Lorenz 在研究大气对流现象时引进了 Lorenz 方程, 他发现在一定条件下, 该方程会出现混沌解. 同一时期, Kolmogorov, Arnold 和 Moser 建立了分析力学领域中的 KAM 理论, 这一理论对接近可积的 Hamilton 系统解的性质给出了一些重要的结论, 从而在定理条件不适用时, Hamilton 系统可能出现混沌. 1967 年, Smale 在研究结构稳定性理论时, 构造了著名的反例 ——Smale 马蹄映射, 该映射限制在一个不变集上与双边符号动力系统拓扑共轭并因此可能出现非常复杂的渐近性态.

然而, 在相当长一段时间内, 数学界并没有一个明确的混沌概念. 直到 1975 年, Li 和 Yorke 才在他们的题为 *Period three implies chaos* 的文章中第一次对混沌给出了严格的数学定义. 他们说: 如果区间上的连续映射 f 有一个 3 周期点, 则该映射一定是混沌的, 即存在一个不可数集合 D , 使得 D 中的任何不同两点 x, y 满足

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0,$$

其中, $d(\cdot,\cdot)$ 表示两点之间的距离. 后来在此定义下的混沌被称作 Li-Yorke 混沌, 它广泛地应用于各种离散系统的研究当中.

称度量空间 (X, d) 上的连续自映射 f 对初值敏感依赖, 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意的 $x \in X$ 以及 x 的任何邻域 U, 总能够找到 $y \in U$ 和 $n \geqslant 0$ 满足 $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$. 1986 年, Devaney[32] 以初值敏感依赖为核心内容定义了混沌. 他称映射 f 是混沌的, 如果满足以下三条:

(1) f 是拓扑传递的.

(2) f 的周期点在 X 中稠密.

(3) f 对初值敏感依赖.

人们习惯上把满足上述三条的映射称为 Devaney 混沌. Banks 等[30], Silverman[45] 证明了传递且周期点稠密的非周期映射对初值敏感依赖, 从而说明了第三

条在定义中是多余的. 实际上 Glasner 和 Weiss 在文献 [40] 中证明了一个更强的结果: 传递且几乎周期点稠密的非极小映射对初值敏感依赖.

1994 年 Schweizer-Smítal 提出分布混沌的概念. 称度量空间 (X,d) 上的连续自映射为分布混沌, 如果存在一个不可数集合 D , 使得 D 中的任何不同两点 x,y 满足: 对某 $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\#\{i|0\leqslant i\leqslant k-1, d(f^i(x),f^i(y))<\varepsilon\}=0,$$

且对任意 $t>0$,

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\#\{i|0\leqslant i\leqslant k-1, d(f^i(x),f^i(y))<t\}=1.$$

最初分布混沌被称作强混沌, 那是因为它确实是一个强于 Li-Yorke 混沌的概念. 虽说分布混沌与 Li-Yorke 混沌一样都是用两点迭代距离的变化来刻画系统的复杂性, 但前者明显地具有统计力学思想.

上述三种混沌的发生条件, 它们之间的关系, 以及它们与拓扑混合、拓扑弱混合、正拓扑熵等经典的刻画系统复杂性概念之间的关系将列为本书的重要内容. 在混沌的研究中, 还出现了诸如 ω 混沌[41]、Kato 混沌[124]、Ruelle-Takens 混沌[125]、分布 II 型混沌与分布 III 型混沌[37] 等多种不同的混沌刻画. 由于篇幅所限, 对于这些概念以及与其相关的内容我们只好忍痛割爱了.

自 21 世纪初开始, 一些学者开始对 (X,f) 诱导的一类集值映射进行探索. 2003 年, Román-Flores 比较了紧致系统和由该系统诱导的一类超空间系统的传递性问题, 证明了这类超空间系统的传递性蕴涵基空间系统的传递性, 反之不成立, 进而提出了关于混沌方面的基本问题: 基空间系统 Devaney 混沌是否蕴涵其诱导的超空间系统也 Devaney 混沌? 反之, 超空间系统 Devaney 混沌是否一定蕴涵基空间系统 Devaney 混沌? 从而开始了对个体混沌和群体混沌之间的关系的探讨. 由于这一问题在生物物种、人口统计、数值模拟以及吸引子的研究等方面有很好的研究背景, 因而在短时间内就引起了众多学者的兴趣, Román-Flores 的问题得到了满意的回答: 基空间系统 Devaney 混沌与超空间系统 Devaney 混沌互不蕴涵. 与此相关的结果还有: 基空间系统上周期点稠密蕴涵其诱导的超空间系统周期点稠密; 超空间系统上的传递性和弱混合性都等价基空间系统上的弱混合性, 并且这两个系统的强混合性等价; 超空间系统有正拓扑熵蕴涵基空间系统也如此, 但反之不成立, 等等.

本书的目的就是要介绍近 20 余年来, 包括作者所在研究集体在内的国内外学者对于一般度量空间上的映射、符号空间上的映射、区间映射、Feigenbaum 映射以及超空间映射等几个方面所取得的部分研究成果. 书中涉及遍历性、分形、吸引

子、进位映射、代换系统, 拓扑熵、混沌、搓揉序列等流行的概念. 我们希望本书能够在由映射迭代引起的各种动力性态的刻画方法、发生各种混沌性态的条件、不同混沌概念之间的关系等方面对读者起到抛砖引玉的作用.

书中具体内容安排如下:

第 1 章介绍动力系统中的若干基本概念, 把受到普遍重视的拓扑熵概念及有关结果放在第 2 章. 第 3 章是符号空间上的映射, 它既包含了符号空间上的移位映射, 也包含着符号空间上的进位映射, 这与传统符号动力系统略有不同. 混沌的三种不同描述以及它们之间的关系放在第 4 章. 第 5 章的区间映射, 第 6 章的 Feigenbaum 映射和第 7 章的超空间上的映射均是作为映射的特别情形加以介绍, 它们各自具有独特的动力性质.

本书的初稿完成于 2008 年 3 月, 那时第一作者正在大连民族学院做特聘教授, 书中有些近期发表的工作则是后来陆续加入进去的. 初稿在吉林大学、大连民族学院以及吉林师范大学各自举办的动力系统讨论班上报告过, 在此期间许多疏漏与打印错误得到了纠正. 作者谨向对本书提出过改进意见的教师和研究生表示衷心的感谢, 对大连民族学院和吉林师范大学为出版本书给予的资金支持表示衷心的感谢.

作 者

2011 年 10 月 7 日于长春

符　号　表

$\mathbf{N}$ 或 $\mathbf{Z}^+$	全体正整数集
$\mathbf{Z}$	全体整数集
$\mathbf{R}$	全体实数集
$\mathrm{orb}(x)$ 或 $\mathrm{O}(x,f)$	x 的轨道
$\omega(x,f)$ 或 $\omega(x)$	x 的 ω 极限集
$\Lambda(f)$	f 的 ω 极限集
$P(f)$	f 的周期点集
$pp(f)$	f 的周期点的周期集合
$A(f)$	f 的几乎周期点集
$R(f)$	f 的回归点集
$\Omega(f)$	f 的非游荡集
$\mathrm{S}\Omega(f)$	f 的强非游荡集
$\mathrm{CR}(f)$	f 的链回归点集
$\mathcal{B}(X)$	X 的 Borel 子集的 σ 代数
$M(X,T)$	T 的全体不变测度集合
$\mathcal{H}^s(E)$	E 的 s 维 Hausdorff 测度
dim	Hausdorff 维数
$\mathcal{K}(X)$	X 的所有非空紧子集的集合
$H(E,F)$ 或 $H_d(E,F)$	E 和 F 的 Hausdorff 度量
$h(f)$	f 的拓扑熵
(Σ_k,ρ) 或 Σ_k	(具有 k 个符号的) 单边符号空间
$\omega[j,k]$	符号段 $\omega_j\omega_{j+1}\cdots\omega_{j+k-1}$
$\sigma:\Sigma_k\to\Sigma_k$	Σ_k 上的移位映射
Σ_k^+	具有加法运算的符号空间
$\tau:\Sigma_k^+\to\Sigma_k^+$	Σ_k^+ 上的进位映射
$[A]$	符号段 A 上的柱形
$L_A(B)$	符号段 A 在 B 中的出现数
$\theta_n(W)$	出现在 W 中长度为 n 的符号段数
DC	分布混沌
$B_\varepsilon(x)$ 或 $B(x,\varepsilon)$	x 的半径为 ε 的球形邻域
diam A	A 的直径
2^∞ 型	周期全是 2 的方幂的区间映射

$E(f)$	f 的 Milnor 吸引子
F 映射	Feigenbaum 映射
$\mathcal{W}_p$	$[0,1]$ 上 p 阶非单谷 F 映射的集合
$\mathcal{V}_p$	$[0,1]$ 上 p 阶单谷 F 映射的集合

目　　录

第1章　基本概念

1.1　映射迭代与动力系统

设 X 为非空集合, $f: X \to X$ 为映射. 对任何 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots$. 我们把这一过程称作映射 f 的迭代. 本书中涉及的是度量空间上连续映射的迭代.

定义 1.1.1　*设 X 为度量空间, G 为时间拓扑半群 (亦即, $G \in \{\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}^+, \mathbf{Z}^+\}$). 如果 $F: X \times G \to X$ 连续且满足: 对任意 $x \in X$, 以及任意 $t, s \in G$,*

(1) $F(x, 0) = x$;

(2) $F(x, t+s) = F(F(x,t), s)$,

则称 F 为 X 上的 (拓扑) **动力系统**或**流**; *相应于 G 取 $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}^+, \mathbf{Z}^+$ 的不同情形, 我们分别称 F 为*连续型动力系统**、**离散动力系统**、**连续半动力系统**和**离散半动力系统**.

简要地说, 动力系统就是随时间演变的系统.

设 X 为度量空间, $f: X \to X$ 连续. 对任意 $x \in X$, 令 $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x), \cdots$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)), \cdots$, 则 f 确定了 X 上一个离散半动力系统, 特别当 f 是同胚时, 它确定 X 上一个离散动力系统. 正因为如此, 我们常称映射 f 或 (X, f) 为一个动力系统, 有时也将 f 简单地称作系统. 当 X 紧致时称 (X, f) 为**紧致系统**或**紧系统**.

以下如无特别说明总假设 f 为度量空间 (X, d) 上的连续映射.

例 1.1.1　设 $f(x) = 1 - |1 - 2x|, x \in [0, 1]$, 则 f 为单位闭区间的连续自映射, 因此是一紧系统. 由于其图像形状很像帐篷, 所以也称之为**帐篷映射**.

例 1.1.2　设 S^1 为复平面上的单位圆周, f 为 S^1 上的无理旋转, 亦即对任何 $z \in S^1$, $f(z) = z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda}$, 其中 λ 为一无理数. 易见 f 连续, 因此为一紧系统.

定义 1.1.2　*设 (X, f) 为动力系统, Y 为 X 的非空子集满足 $f(Y) \subset Y$, 则称 Y 为 f 的*不变子集*或说 Y 在 f 之下不变; 特别地, 若 $f(Y) = Y$, 则称 Y 为 f 的*强不变子集*. f 在不变子集 Y 上的限制 $f|_Y$ 也是动力系统, 称作 f 的*子系统**. 如果 $Y \neq X$, 则称 $f|_Y$ 为 f 的**真子系统**.

例 1.1.3　设 $I = [0, 2]$, $f: I \to I$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |1 - 2x|, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

不难验证 f 连续而且 $f([0,1]) = [1,2]$, $f([1,2]) = [0,1]$. 因此 $f|_{[0,1]}$ 和 $f|_{[1,2]}$ 都不是 f 的子系统. 现令 $g = f^2$, 则 g 也是 I 上的连续映射. 经计算可知当 $x \in [0,1]$, $g(x) = |1-2x| \in [0,1]$. 因此 $g|_{[0,1]}$ 是 g 的一个真子系统.

定义 1.1.3　设 (X,f) 为动力系统, $x \in X$. 称集合 $\{x, f(x), \cdots, f^n(x), \cdots\}$ 为 x 在 f 之下的**轨道**, 在不致引起混淆的情况下, 也简记作$\mathrm{O}(x,f)$ 或$\mathrm{orb}(x)$.

例 1.1.4　给定 $x \in X$. 由于易见 $f(\mathrm{orb}(x)) \subset \mathrm{orb}(x)$, 因此 $f(\overline{\mathrm{orb}(x)}) \subset \overline{\mathrm{orb}(x)}$. 于是

$$f|_{\overline{\mathrm{orb}(x)}} : \overline{\mathrm{orb}(x)} \to \overline{\mathrm{orb}(x)}$$

是 f 的子系统.

在大量实际问题中, 给定初始状态 x 后, 人们希望知道当 n 充分大时 $f^n(x)$ 的状态如何, 亦即当 $n \to \infty$ 时 $f^n(x)$ 的极限状态怎样. 这归结为轨道渐近性质的研究.

轨道的渐近性质是动力系统研究中的核心内容.

1.2　ω 极 限 集

设 (X,f) 为紧系统, $x \in X$. 本节讨论的 ω 极限集就是前面所说的极限状态, 具体定义如下:

定义 1.2.1　称 $y \in X$ 为 x 的**ω 极限点**, 如果存在正整数的子序列 $\{n_i\}$, 使当 $n_i \to \infty$, $f^{n_i}(x) \to y$. x 的所有 ω 极限点的集合叫做 x 的**ω 极限集**, 记作 $\omega(x,f)$ 或简单地, $\omega(x)$.

$$\Lambda(f) = \bigcup_{x \in X} \omega(x)$$

称作 f 的 ω 极限集.

命题 1.2.1　(1) $\omega(x,f) \neq \varnothing$;

(2) $\overline{\omega(x,f)} = \omega(x,f)$, 即 $\omega(x,f)$ 是 X 的闭子集.

证明　(1) 成立是由于 X 紧致.

(2) 据定义

$$\omega(x,f) = \bigcap_{n \geqslant 0} \overline{\mathrm{orb}(f^n(x))}.$$

由于对每个 n, $\overline{\mathrm{orb}(f^n(x))}$ 是闭集, 故 $\omega(x,f)$ 是闭集.

命题 1.2.2　(1) $\omega(x,f)$ 是 f 的强不变子集, 亦即 $f(\omega(x,f)) = \omega(x,f)$;

(2) 对任何 $i > 0$, $\omega(x,f) = \omega(f^i(x), f)$.

证明　(1) 显然 $f(\omega(x,f)) \subset \omega(x,f)$. 为证明等式成立, 我们证明相反的包含关系也成立, 为此设 $z \in \omega(x,f)$. 存在 $n_i \to \infty$ 使得 $f^{n_i}(x) \to z$. 设 $\{f^{n_{i_j}-1}(x)\}$ 为

无穷序列 $\{f^{n_i-1}(x)\}$ 的收敛子序列. 令 $y=\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x)$, 则 $y\in\omega(x,f)$. 据 f 的连续性,

$$f(y)=\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(x)=\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)=z.$$

这证明 $\omega(x,f)\subset f(\omega(x,f))$.

(2) 设 $i>0$. 若 $y\in\omega(f^i(x),f)$, 则存在 $n_j\to\infty$ 使 $f^{n_j}(f^i(x))\to y$, 亦即 $f^{n_j+i}(x)\to y$. 从而 $y\in\omega(x,f)$, 进而 $\omega(f^i(x),f)\subset\omega(x,f)$. 与论断 (1) 后半段证明类似地可以推出 $\omega(x,f)\subset\omega(f^i(x),f)$, 因此 (2) 成立. □

引理 1.2.1 设 n_i 为正整数的子序列, 则对任何 $n>0$, 存在 r, $0\leqslant r<n$ 以及 n_i 的子序列 n_{i_j} 和非负整数列 $\{q_j\}$ 使得 $n_{i_j}=nq_j+r$.

证明 对每个 n_i, 存在整数 $p_i\geqslant 0$ 及 $0\leqslant r_i<n$ 使 $n_i=np_i+r_i$. 由于 r_i 只取有限多个数, 故必有某个 r, $0\leqslant r<n$, 在 r_i 中出现无穷多次, 亦即存在 $i_j\to\infty$ 使 $r_{i_1}=r_{i_2}=\cdots=r$. 从而有 $n_{i_j}=np_{i_j}+r$. 令 $q_j=p_{i_j}$, 则 $n_{i_j}=nq_j+r$. □

命题 1.2.3 对任何 $n>0$,

(1) $\omega(x,f)=\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(f^i(x),f^n)$;

(2) 对 $i=0,1,\cdots,n-2$,

$$f(\omega(f^i(x),f^n))=\omega(f^{i+1}(x),f^n) \text{ 且 } f(\omega(f^{n-1}(x),f^n))=\omega(x,f^n).$$

证明 (1) $\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(f^i(x),f^n)\subset\omega(x,f)$ 是显然的. 为完成本论断的证明, 只需证明反向包含关系也成立. 设 $y\in\omega(x,f)$, 则存在 $n_i\to\infty$ 使 $f^{n_i}(x)\to y$. 据引理 1.2.1, 存在 $\{n_i\}$ 的子序列 n_{i_j}, 序列 $\{q_j\}$ 以及 $0\leqslant r<n$ 使得 $n_{i_j}=nq_j+r$. 从而 $y\in\omega(f^r(x),f^n)$, 进而 $\omega(x,f)\subset\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(f^i(x),f^n)$.

(2) 的证明与命题 1.2.2 的 (1) 类似, 请读者自行验证.

推论 1.2.1 设 $y\in\omega(x,f)$, 则对任何 $n>0$, 存在 $l>0$, 使得 $f^l(y)\in\omega(x,f^n)$.

证明 若 $y\in\omega(x,f)$, 则由命题 1.2.3(1), 存在 $0\leqslant i\leqslant n-1$, 使得 $y\in\omega(f^i(x),f^n)$. 令 $l=n-i$, 则 $l>0$. 由命题 1.2.3(2),

$$f^l(y)\in f^l(\omega(f^i(x),f^n))=\omega(f^n(x),f^n)=\omega(x,f^n).$$

命题 1.2.4 设 $n>0$, 则 $x\in\omega(x,f)$ 当且仅当 $x\in\omega(x,f^n)$.

证明 充分性显然. 下证必要性. 设 $x\in\omega(x,f)$, U_0 为 x 的开邻域. 据定义, 存在 $n_i\to\infty$ 使 $f^{n_i}(x)\to x$. 由引理 1.2.1 存在 n_i 的子序列 n_{i_j} 以及整数 r, $0\leqslant r<n$, 使对每个 j, 存在非负整数 q_j 满足 $n_{i_j}=nq_j+r$. 令 $m_j=n_{i_j}$. 显然当 $j\to\infty$, $f^{m_j}(x)\to x$. 存在 m_{j_1} 使 $f^{m_{j_1}}(x)\in U_0$. 据 $f^{m_{j_1}}$ 的连续性, 存在 x 的开邻

域 $U_1 \subset U_0$ 使 $f^{m_{j_1}}(U_1) \subset U_0$; 又存在 m_{j_2} 使 $f^{m_{j_2}}(x) \in U_1, \cdots$, 如此下去, 经有限步后我们得到了包含 x 的开邻域 $U_0, U_1, \cdots, U_{n-1}$ 以及 n 个整数 $m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_n}$ 满足条件

(1) $U_{n-1} \subset U_{n-2} \subset \cdots \subset U_0$;

(2) $f^{m_{j_k}}(U_k) \subset U_{k-1}, k = 1, 2, \cdots, n-1$;

(3) $f^{m_{j_k}}(x) \in U_{k-1}, k = 1, 2, \cdots, n$.

于是便有 $f^{m_{j_1}+m_{j_2}+\cdots+m_{j_n}}(x) \in U_0$. 由于 $m_{j_1} + m_{j_2} + \cdots + m_{j_n} = 0$(模 n), 因此 $x \in \omega(x, f^n)$. □

ω 极限集还具有如下性质.

命题 1.2.5　设 $x \in X, L = \omega(x, f)$, F 为 L 的非空闭子集使得 $F \neq L$, 则

$$F \cap \overline{f(L-F)} \neq \varnothing.$$

证明　若 F 和 $\overline{f(L-F)}$ 不相交, 则存在 X 的开集 U_1 和 V, 使得

$$\overline{f(L-F)} \subset U_1, F \subset V \text{ 且 } \overline{U_1} \cap \overline{V} = \varnothing.$$

令 $U = f^{-1}(U_1)$. 不难验证 $L - F \subset U$. 由于

$$f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)} = \overline{f(f^{-1}(U_1))} \subset \overline{U_1},$$

因此

$$\overline{V} \cap f(\overline{U}) \subset \overline{U_1} \cap \overline{V} = \varnothing. \tag{1.2.1}$$

因

$$\omega(x, f) = L = (L-F) \cup F \subset U \cup V,$$

故对一切大的 n, $f^n(x) \in U \cup V$. 易见 $f^n(x) \in U$ 和 $f^n(x) \in V$ 均对无限多个 n 成立, 由此可知存在无穷序列 $n_1 < n_2 < \cdots$ 使得 $f^{n_i}(x) \in U$, $f^{n_i+1}(x) \in V$. 设 y 是序列 $f^{n_i}(x)$ 某收敛子序列的极限, 则 $y \in \overline{U}$ 且 $f(y) \in \overline{V}$, 这与式 (1.2.1) 矛盾. □

下述推论 1.2.2 是明显的, 它刻画了 ω 极限集的"不变连通性".

推论 1.2.2　对任何 $x \in X$, $\omega(x, f)$ 不能表成 f 的非空不交的两个不变闭集的并.

1.3　回　归　性

我们已经知道探讨系统的渐近性质归结为对该系统 ω 极限集的研究, 因而有必要剖析 ω 极限集中的点可能存在的性态.

设 $x \in X$.

定义 1.3.1 若存在 $n>0$, 使 $f^n(x)=x$, 则称 x 为 f 的**周期点**, 而把使得 $f^n(x)=x$ 成立的最小正整数称作 x 的**周期**, 周期为 n 的周期点简称 n 周期点.

f 的全体周期点的集合记作 $P(f)$. 周期为 1 的周期点称为**不动点**. 全体不动点的集合记作 $F(f)$.

设 $x\in X$. 若存在 $p\in P(f)$, 使得当 $n\to\infty$, $d(f^n(x),\ f^n(p))\to 0$, 则称 x 是 f 的**渐近周期点**.

命题 1.3.1 对任何 $x\in X, \omega(x,f)$ 为有限集当且仅当它是一周期轨道.

证明 设 $L=\omega(x,f)$. 因 $f(L)=L$, 故若 L 有限它必包含一周期轨道 C. 若 $C\neq L$, 则 $L-C$ 为非空闭集, 且有

$$(L-C)\cap\overline{f(C)}=(L-C)\cap C=\varnothing.$$

这与命题 1.2.5 矛盾, 从而必要性成立.

充分性是显然的.

例 1.3.1 设 $n\geqslant 1$, f 为 n 维闭球体到自身的连续映射, 则由Brouwer不动点定理, f 必存在不动点, 因此 $P(f)\neq\varnothing$. 而例 1.1.2 中给出的圆周的无理旋转没有周期点.

定义 1.3.2 若 $x\in\omega(x,f)$, 则称 x 为 f 的**回归点**.

f 的全体回归点的集合记作 $R(f)$. 下面的包含关系是明显的:

$$F(f)\subset P(f)\subset R(f).$$

不难证明 $F(f)$, $P(f)$, $R(f)$ 都是 f 的不变子集.

命题 1.3.2 (1) $F(f)\subset F(f^n)$;

(2) $P(f^n)=P(f)$;

(3) $R(f^n)=R(f)$.

证明 (1), (2) 显然. (3) 是命题 1.2.4 的推论. □

有那样一种回归点, 它不是周期的但和周期点有类似的统计性质, 其定义如下:

定义 1.3.3 称 x 是 f 的**几乎周期点**, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在整数 $N>0$, 使得对任何 $q\geqslant 0$, 存在整数 r, $q<r\leqslant q+N$ 满足 $d(f^r(x),x)<\varepsilon$.

f 的全体几乎周期点的集合记作 $A(f)$. 易见

$$P(f)\subset A(f)\subset R(f),$$

且 $f(A(f))\subset A(f)$.

定义 1.3.4 称 $M\subset X$ 为 (相对于 f 的)**极小集**, 如果 M 是 f 的非空不变闭集且 M 中不存在 f 的非空不变的真子集. 如果 X 本身是极小的, 则称 f 为**极小映射**.

命题 1.3.3 紧系统总存在极小集.

证明 设 (X,f) 是紧系统, $\mathcal{M}$ 为由 f 的所有非空不变闭集构成的集族. 由于 $X \in \mathcal{M}$, 故 $\mathcal{M} \neq \varnothing$. 在包含关系 "$\subset$" 之下 $\mathcal{M}$ 为一偏序集. 设 $\mathcal{M}'$ 为 $\mathcal{M}$ 的全序子集, 令 $M_0 = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{M}'} M$. 则 $M_0 \in \mathcal{M}$ 且对任何 $M \in \mathcal{M}'$, $M_0 \subset M$. 因此 M_0 是 $\mathcal{M}'$ 的一个下界. 据 Zorn 引理, $\mathcal{M}$ 有极小元. 显然每个极小元都是 f 的极小集.

命题 1.3.4 设 M 为 X 的非空闭子集且 $f(M) \subset M$, 则 M 极小当且仅当对任何 $x \in M$, $\overline{\mathrm{orb}(x)} = M$.

证明 必要性. 设 M 极小, $x \in M$. 由于 $f(M) \subset M$, 故 $\mathrm{orb}(x) \subset M$. 又 M 是闭集所以 $\overline{\mathrm{orb}(x)} \subset M$. 若 $\overline{\mathrm{orb}(x)} \neq M$, 则 $\overline{\mathrm{orb}(x)}$ 是含在 M 中的 f 的非空闭的不变真子集, 与 M 极小矛盾. 因此 $\overline{\mathrm{orb}(x)} = M$.

充分性. 若 M 不是极小, 则存在 M 的非空闭的真子集 E 使 $f(E) \subset E$. 任取 $x \in E$, 有 $\overline{\mathrm{orb}(x)} \subset E$, 故 $\overline{\mathrm{orb}(x)} \neq M$. 这证明了充分性.

命题 1.3.5 $x \in A(f)$ 当且仅当 $x \in \omega(x,f)$ 且 $\omega(x,f)$ 是极小的.

证明 设 $x \in A(f)$. 显然有 $x \in \omega(x,f)$. 假设 $\omega(x,f)$ 不是极小的. 据命题 1.3.3, 存在 $y \in \omega(x,f)$ 使 $\overline{\mathrm{orb}(y)}$ 是 $\omega(x,f)$ 的真子集. 易见 $x \notin \overline{\mathrm{orb}(y)}$. 令 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}d(x,\overline{\mathrm{orb}(y)})$. 则 $\varepsilon > 0$. 据定义 1.3.3, 存在 $N > 0$ 使对任意 $q \geqslant 0$. 存在 $q < r \leqslant q+N$ 满足 $d(x,f^r(x)) < \varepsilon$. 据 f 的一致连续性, 存在 $\delta > 0$, 使对任何 $z \in X$, 当 $d(x,z) < \delta$ 时, $d(f^i(x),f^i(z)) < \varepsilon$ 对每个 $i = 1,2,\cdots,N$ 成立. 由于存在 $l > 0$ 使 $d(f^l(x),y) < \delta$, 又存在 $0 < h \leqslant N$ 使 $d(x,f^{l+h}(x)) < \varepsilon$, 因此有

$$d(x,f^h(y)) \leqslant d(x,f^{l+h}(x)) + d(f^{l+h}(x),f^h(y)) < 2\varepsilon = d(x,\overline{\mathrm{orb}(y)}),$$

矛盾. 于是 $\omega(x,f)$ 必是极小集.

下设 $x \in \omega(x,f)$ 且 $\omega(x,f)$ 极小. 用反证法. 假设 $x \notin A(f)$. 据定义 1.3.3, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对每个 $n > 0$, 存在 $q(n) \geqslant 0$ 使对每个 $i = 1,2,\cdots,n$, $d(x,f^{q+i}(x)) \geqslant \varepsilon$. 令 $x_n = f^{q(n)}(x)$, 则当 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时, $d(x,f^i(x_n)) \geqslant \varepsilon$. 不妨设 $d(x,x_n) < \varepsilon$. 序列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_j}\}$. 设 $y = \lim\limits_{j\to\infty}(x_{n_j})$, 则 $y \in \omega(x,f)$. 由 $\omega(x,f)$ 的极小性及命题 1.3.3, 存在 $m > 0$ 使 $d(x,f^m(y)) < \varepsilon/2$. 存在 $\delta > 0$ 使当 $d(z,y) < \delta$, $d(f^m(z),f^m(y)) < \varepsilon/2$. 因此当 $d(z,y) < \delta$ 时, $d(f^m(z),x) < \varepsilon$. 存在 $n_j > m$ 使 $d(x_{n_j},y) < \delta$. 于是 $d(f^m(x_{n_j}),x) < \varepsilon$. 这与 x_{n_j} 所设矛盾, 因此 $x \in A(f)$.

命题 1.3.6 对任何 $k > 0$, $x \in A(f)$ 当且仅当 $x \in A(f^k)$.

证明 充分性. 设 $x \in A(f^k)$. 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$ 使得对任何 $q \geqslant 0$, 存在整数 r, $q < r \leqslant q+N_1$ 满足 $d((f^k)^r(x),x) < \varepsilon$. 令 $N = kN_1$. 对任何 $q \geqslant 0$, 存在整数 l, $0 \leqslant l < k$ 使得 $q-l = 0$(模 k). 令 $q' = q-l$, 则 $q+N \geqslant q+N-l = q'+kN_1$. 存在 r, $q'/k < r \leqslant q'/k+N_1$, 使 $d((f^k)^r(x),x) = d(f^{kr}(x),x) < \varepsilon$. 注意到 $q < rk \leqslant q+N$

我们有 $x \in A(f)$.

必要性. 设 $x \in A(f)$, $k > 0$. 用 N_r 表示模 k 为 r 的所有正整数的集合. 对 x 的任何邻域 U, 不妨设存在某 r, $1 \leqslant r \leqslant k-1$, 使对无限多 $n \in N_r$, $f^n(x) \in U$. 否则, 将存在 x 的某邻域 U, 使对一切充分大的 $n \in N_k$, $f^n(x) \in U$. 不难证明这时一定有 $x \in A(f^k)$.

设 U_0 为 x 的任何开邻域, 仿照命题 1.2.4 的证明可知存在正整数 $n_1, \cdots, n_{k-1} \in N_r$ 以及 x 的开邻域 $U_{k-1} \subset \cdots \subset U_1 \subset U_0$, 使 $f^{n_i}(x) \in U_{i-1}$ 且 $f^{n_i}(U_i) \subset U_{i-1}$.

由 $x \in A(f)$ 知存在 $m_i \to \infty$(m_i 未必属于 N_r), 使得 $f^{m_i}(x) \in U_{k-1}$ 且

$$\sup(m_{i+1} - m_i) < \infty.$$

先假定 k 为素数. 这时对每个 m_i, k 个互不同余的整数

$$m_i,\ m_i + n_{k-1},\ \cdots, m_i + n_{k-1} + n_{k-2} + \cdots + n_2 + n_1$$

中恰有一个模 k 同余于 0, 记之为 M_i. 易见 $f^{M_i}(x) \in U_0$. 必要时按递增顺序重新排列序列 $\{M_i\}$ 还有 $\sup(M_{i+1} - M_i) < \infty$. 于是易见, 当 k 是素数时 $x \in A(f^k)$ 成立.

对任何正整数 k, 存在有限个素数 $q_1, \cdots, q_n$ 使 $k = q_1 \cdots q_n$. 若对 $1 \leqslant s < n$ 已经证明 $x \in A(f^{q_1 \cdots q_s})$, 则因 q_{s+1} 是素数, 故还有 $x \in A(f^{q_1 \cdots q_{s+1}})$. 据归纳法, $x \in A(f^k)$.

1.4 链回归性

关于系统渐近性质的研究方式可以分为两种, 一种是从已知的数学模型出发作定性研究, 另一种是利用计算机的实验手段作数值分析. 由于计算过程中不可避免地会产生误差使得原本是周期的点经计算所得的结果却未必是周期的. 为确切描述此类现象, 人们提出如下新的概念 —— 链回归点.

定义 1.4.1 称 x 为 f 的**链回归点**, 如果对任何 $\varepsilon > 0$, 存在有限个点 $x_0, x_1, \cdots, x_m \in X$, 使得 $x_0 = x_m = x$ 且 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$. f 的链回归点构成的集合记作 $\mathrm{CR}(f)$.

命题 1.4.1 $\mathrm{CR}(f)$ 是不变闭集, 亦即 $\mathrm{CR}(f) = \overline{\mathrm{CR}(f)}$ 且 $f(\mathrm{CR}(f)) \subset \mathrm{CR}(f)$.

证明 设 x 是 $\mathrm{CR}(f)$ 的聚点. 对给定的 $\varepsilon > 0$, 由 f 的连续性, 存在 $0 < \delta < \varepsilon/2$, 使对任何 $z \in X$, 当 $d(x, z) < \delta$ 时, $d(f(x), f(z)) < \varepsilon/2$. 对这个 δ 可取 $y \in \mathrm{CR}(f)$ 使 $d(x, y) < \delta$. 据链回归点的定义, 存在 $y_0, y_1, \cdots, y_m \in X$ 使 $y_0 = y_m = y$ 以及 $d(f(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon/2$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$. 令 $x_0 = x, x_1 = y_1, \cdots, x_{m-1} = y_{m-1}, x_m = x$, 则有

$$d(f(x_0), x_1) = d(f(x), y_1) \leqslant d(f(x), f(y)) + d(f(y_0), y_1) < \varepsilon,$$