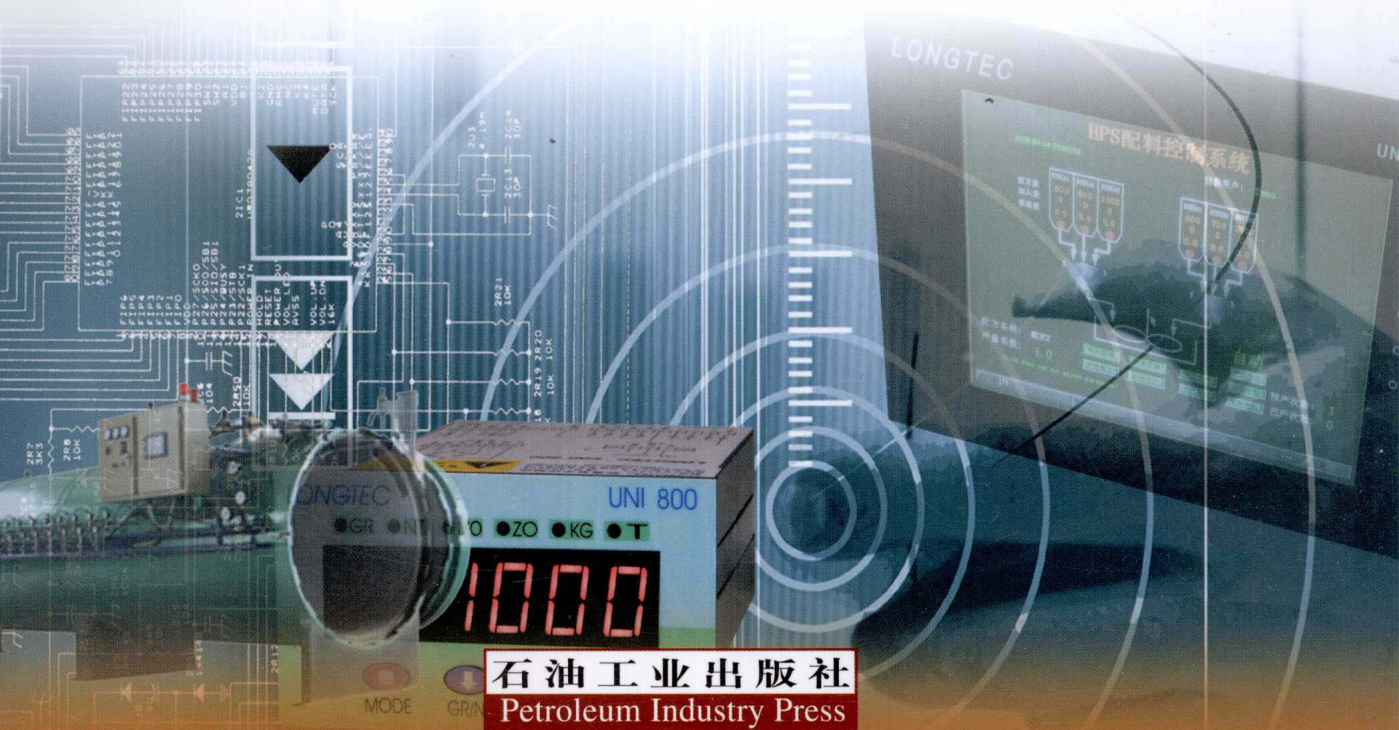




石油高等院校特色教材

自动控制理论

霍爱清 汤楠 主编

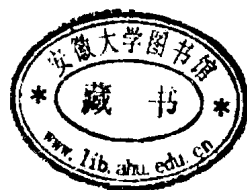


石油教材出版基金资助项目

石油高等院校特色教材

自动控制理论

霍爱清 汤 楠 主编



石油工业出版社

内 容 提 要

本书介绍了控制系统的一般概念及其物理系统的数学模型基本知识;系统地讨论了控制系统稳定性、动态特性、稳态误差、灵敏度及能控性和能观性等常用指标的基本分析方法;详细阐述和讨论了控制系统时域、频域、根轨迹及状态反馈等常用设计方法的原理和应用知识;讨论了采样系统和控制系统非线性问题。

本书系统性和实用性较强,注重理论联系实际,强调各知识点的应用实例及仿真技术的应用,可作为大专院校、电大、职大的自动化及相关专业的教材,也可作为各专业工程技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制理论 / 霍爱清, 汤楠主编.

北京: 石油工业出版社, 2012.12

(石油高等院校特色教材)

ISBN 978-7-5021-9241-9

I. 自…

II. ①霍…②汤…

III. 自动控制理论 - 高等学校 - 教材

IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 198039 号

出版发行: 石油工业出版社

(北京安定门外安华里 2 区 1 号 100011)

网 址: www.pip.cnpc.com.cn

编辑部: (010) 64251362 发行部: (010) 64523620

经 销: 全国新华书店

印 刷: 北京中石油彩色印刷有限责任公司

2012 年 12 月第 1 版 2012 年 12 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 开本: 1/16 印张: 26.5

字数: 681 千字

定价: 50.00 元

(如出现印装质量问题, 我社发行部负责调换)

版权所有, 翻印必究

前 言

围绕着自动控制系统分析与实际的基本理论知识,本书共分为7章。全书系统地阐述了控制理论中时域和频域分析与设计的基本理论和基本原理,内容涵盖了经典控制理论和现代控制理论的基本知识,并具有以下特点:

(1)本书遵循“以经典内容为主,以现代新知识、新设计为穿插,两者有机结合”的编写原则。从系统的建模开始就将经典与现代控制统一,以控制系统分析方法与设计方法为主线,力图概念清楚,原理明确,重点突出,知识脉络完整,并力求小而精,减少纯理论的数学原理推导内容,强调应用技术。

(2)以工业自动化应用技术为背景,系统地阐述工业自动化领域自动控制的原理和系统的设计方法,应用性强,具有生产过程控制特色,注重控制理论在生产中的应用,引入反映工业自动化控制领域的最新研究成果的一些成熟的新概念、建模工具及典型控制系统设计问题;增加了计算机模拟仿真技术在控制系统中的应用,使读者充分体会Matlab软件在控制系统分析和设计中的应用。

(3)从内容组织上,由浅入深、循序渐进,理论、实践并重,系统地阐述自动控制系统的分析方法与设计方法。编写风格上力求言简意赅,文字清晰流畅,对难于理解的概念和原理增加图表以帮助学生理解;语言表达上贴近应用,学生易于接受。每章备有习题,便于学生练习和自学。全书按时域分析、根轨迹分析、频域分析及状态空间法分析截然分开的编写方式,使学生容易建立系统的概念。

本书是在参考张子旭、栾佩琴、于敏和汤楠教授原有教材和讲义的基础上,重新组织相关任课教师,结合各位教师多年的教学和科研实践经验编写而成。本书第1章由汤楠编写,第2章及第3章3.1、3.2、3.5由解茜草编写,第4章及第6章由薛朝妹编写,第5章、第7章及第3章3.3、3.4由霍爱清编写。各章习题由相应的编者编写。谢国坤、张璐及戴晨参加了部分程序的调试,全书由霍爱清和汤楠统稿。

在本书编写过程中,得到了兄弟院校相关专业同行的热情帮助,在此一并表示衷心感谢。鉴于编者水平有限,书中不足之处在所难免,敬请广大读者和专家不吝批评指正,我们将不胜感激。

编者

2012年3月于西安

目 录

第1章 自动控制系统概述	1
1.1 引言	1
1.2 闭环控制系统的原理	2
1.3 自动控制系统的发展简史	4
1.4 自动控制系统的组成和常用术语	4
1.5 自动控制系统的类型	5
习题	6
第2章 数学基础与数学模型	8
2.1 数学基础	8
2.2 物理系统的微分方程描述	17
2.3 传递函数	19
2.4 方框图与信号流图	30
2.5 状态方程及差分方程	44
2.6 MATLAB的模型建立方法	47
习题	53
第3章 系统分析与设计基础	58
3.1 时域响应法基础	58
3.2 频域法基础	78
3.3 根轨迹法基础	103
3.4 状态空间法基础	116
3.5 MATLAB在系统分析与设计基础中的应用	140
习题	156
第4章 线性定常连续系统分析	162
4.1 稳定性分析	162
4.2 稳态误差分析	188
4.3 动态性能分析	201
4.4 能控性和能观性分析	216
4.5 MATLAB在线性连续定常系统分析中的应用	223
习题	238
第5章 线性连续定常系统的设计	249
5.1 引言	249
5.2 控制系统的性能指标与校正方式	250
5.3 基本控制器	253
5.4 频率域设计法	259

5.5 根轨迹设计法	272
5.6 综合设计法	280
5.7 状态空间法设计	284
5.8 MATLAB在系统设计中的应用	290
习题	302
第6章 离散控制系统	305
6.1 引言	305
6.2 Z变换与Z反变换	315
6.3 脉冲传递函数	325
6.4 离散系统的稳定性	336
6.5 离散控制系统稳态误差的计算	341
6.6 离散控制系统动态性能的分析	344
6.7 离散控制系统的设计	353
6.8 MATLAB在离散系统中的应用	360
习题	366
第7章 自动控制系统中的非线性问题	370
7.1 非线性控制系统的特点	370
7.2 非线性特性的线性化	372
7.3 典型本质非线性特性及其对控制系统的影响	374
7.4 描述函数法	377
7.5 相平面法	386
7.6 MATLAB在非线性系统中的应用	409
习题	413
参考文献	418

第1章 自动控制系统概述

1.1 引言

所谓自动控制就是要利用专门的控制装置,在没有人工的直接参与下,使被控对象的物理量自动地按照预定的规律运行和变化。自动化技术的发展和运用,不仅提高了生产效率和产品质量、改善了劳动条件,而且对国民经济和人类社会的进步也起到了非常重要的作用。自20世纪40年代自动化技术开始进入实际应用阶段以来,其应用领域日益广泛。自动控制理论的指导和自动控制技术的应用推动了生产过程和军事技术的现代化,同时也广泛应用于人类社会的经济等诸多领域。

一个典型的自动控制系统应该具有信息的获取、传输、处理及利用等多种功能。自动控制系统的研究涉及系统的建模、设计、分析和实现等多方面内容。其中主要包括:对物理上或方案上已经存在的自动控制系统的控制性能进行研究,称为系统分析;运用自动控制理论及相关工程知识,构成一定性能的控制系统,称为系统设计。

对于要进行分析的系统来说,由于系统已经存在,其性能并不因分析的方法不同而不同,所以系统分析的结果应具有唯一性。对于需要进行设计的系统,由于系统事先并不存在,为满足同样的性能要求,设计者可以构造出不同的系统,因此,设计结果应该不具有唯一性。

自动控制系统的研究方法,概言之可以分为理论性与实验性研究两大类。两种方法在实际应用中可以相互引证、相互参照和相互补充。作为控制理论课程的教材,本书将着重讲述控制系统的理论研究方法。理论性的方法是一种对系统模型进行数学计算和理论分析的方法,而这种以物理对象为模型化的研究方法正是控制论的主要方法之一。

自动控制系统分析与设计的方法有很多种,本书所讨论的都是其中比较成熟、比较实用的基本方法,例如,时域法、频域法、根轨迹法和状态空间法等。控制系统的理论研究中不可避免地需要运用到大量的工程数学方法,本书将在不影响理解的前提下尽量减少纯数学的推导,而把讨论的重点放在应用上。

控制系统是由若干相互关联的环节按一定的结构构成的。根据系统是否具有对被控物理量的检测能力,从系统结构特征上可以将自动控制系统分为开环控制系统(Open-loop control system)和闭环控制系统(Closed-loop control system,也称反馈控制系统)两大类。如图1.1.1所示的开环控制系统由于没有反馈回路,所以系统抗干扰能力差,使它的应用受到一定的局限。例如,在电动机的开环调速系统中,系统输出即被控量为电动机转速,系统通过控制器输出控制作为被控对象的电动机。如果没有干扰,电动机会按期望的速度运行。但是当系统受到其他干扰时,如负载、供电电压或其他参数的变化,都会

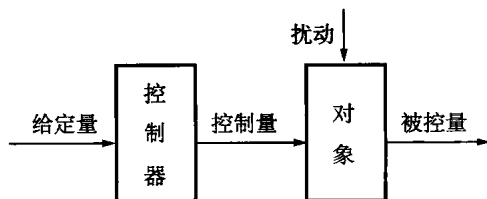


图1.1.1 开环控制系统原理框图

使电动机的转速偏离期望的给定值。一般说来,开环系统的分析与设计相对比较简单。但开环控制系统完全按照事先设置的给定实现控制,并不顾及被控量的实际值。它在系统内部参数和外部扰动影响下,不具备任何自动纠偏的能力,因此也就无法保证控制精度。所以开环系统适用于系统结构稳定、外部干扰较弱及系统工作过程明确、控制性能要求不高的场合。

1.2 闭环控制系统的原理

闭环控制系统与开环控制系统的不同之处在于它增加了对被控量的测量。典型的闭环控制系统如图1.2.1所示。通过反馈环节得到的被控物理量的实际值称为反馈量。由实际反馈量和给定量的实时比较运算,可以得到目前系统输出的实际偏差。闭环控制系统中的控制器以偏差量作为控制运算的依据,产生适当的被称为控制量的控制命令,使系统输出的被控量向减少偏差的方向发生变化,最终使被控量等于给定量,偏差量等于零。这种以负反馈为特点的控制系统可以自动地克服系统内部的各种扰动量,保持被控的参数与给定的期望值相同。

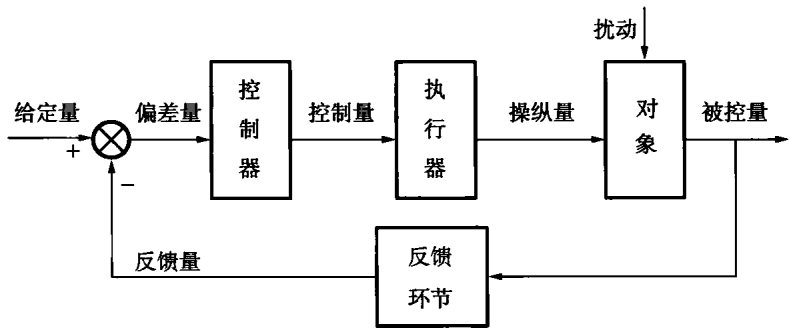


图1.2.1 闭环控制系统原理框图

[例1.2.1] 蒸汽机调速器。

瓦特为了解决蒸汽机的速度问题而制作的蒸汽机离心式调速器被认为是工业过程应用中的第一个自动控制系统。这种调速器的核心是一个与汽轮机轴相连的机械装置,其工作原理如图1.2.2所示。在基于金属飞球的调速器的控制下,进入蒸汽机的蒸汽流量可以根据给定的蒸汽机输出轴转速自动地进行调整。当负载减轻或蒸汽压力增加使转速升高时,由于离心力的增加,飞球的高度也会升高。飞球所连接的套环可通过机械结构带动控制阀芯下降,减少进入蒸汽机的蒸汽流量,也就减少了输出轴转速。反之,阀芯上升会使输出转速上

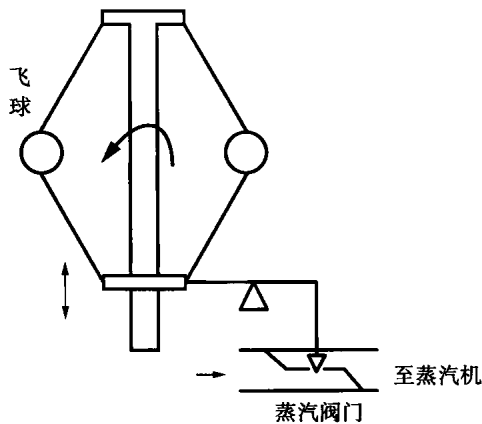


图1.2.2 蒸汽机调速器工作原理图

升。这样蒸汽机输出转速就可以自动克服负载和蒸汽方面的干扰,基本稳定在给定值上。

[例1.2.2] 热交换器温度控制系统。

热交换器温度控制系统如图1.2.3所示,被加热物料进入热交换器后,与加热蒸汽通过热交换过程温度得到升高。控制系统的目的就是控制物料的出料温度达到给定的温度值。当

通过温度传感器得知出料温度大于给定值时,控制器的控制作用就应该会使加热蒸汽的流量适当减少,使出料温度适当下降。反之,当出料温度小于给定值时,系统会产生增加出料温度的控制作用。这种作用主要控制运算及其参数调整。热交换器温度闭环控制系统,能自动地克服被加热物体温度、流量和加热蒸汽温度乃至环境温度变化所带来的干扰,确保作为系统输出的被控温度达到期望的给定值。

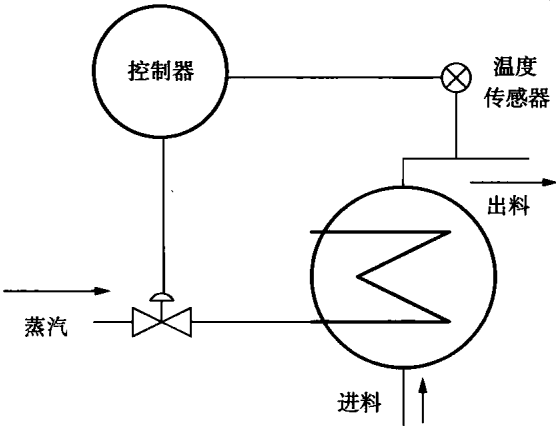


图1.2.3 热交换器温度控制系统原理示意图

[例1.2.3] 直流电动机转速控制系统。

直流电动机转速控制系统如图1.2.4所示。作为系统输出的电动机转速是随负载等因素变化而变化的,为了更好地对输出转速进行控制,可以通过一个测速发电机检测到实际输出转速。实际转速反馈到系统输入端与给定转速进行比较,当发现偏差时,控制器将控制电动机转速向减少偏差的方向变化,直至偏差为零。

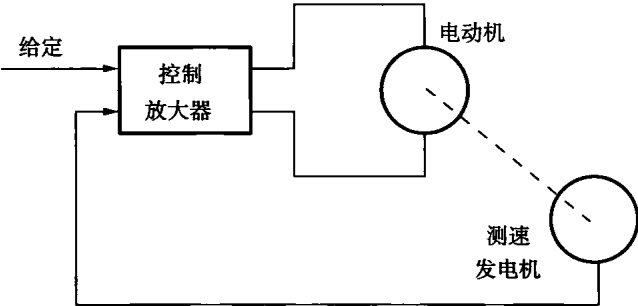


图1.2.4 直流电动机转速控制系统原理示意图

闭环控制系统需要通过偏差来进行控制,虽然可以达到自动克服系统内部各种干扰的控制目的,但是它的控制作用必须在内部或外部的变化影响被控制之后才能产生,是一种后处理的控制方式。此外,由于反馈的存在使系统的分析和综合过程变得比较复杂,控制算法及参数匹配的不同会对系统的控制结果产生很大的影响,因此闭环控制系统是自动控制理论中重点讨论的问题。

随着控制对象和控制要求的日益复杂,控制系统的结构也变得相对复杂起来。在上述开环和闭环控制系统典型结构的基础上,技术人员还可以结合具体的控制任务,以开环和闭环控制系统为基础,通过不同的改进方法,构造出各种不同的控制结构。

1.3 自动控制系统的发 展简史

利用自动控制技术代替人工的体力和脑力控制机器设备来完成期望的工作,千百年来一直是人类的夙愿。在我国古代就有过指南车和水运仪象台等许多成功的应用实例。在古代的西方也有过例如利用浮球调节器来控制液位高度等一些发明。

对自动控制的大量需求始于工业革命时期,瓦特(James Watt)在1788年发明的应用于蒸汽机的离心式调节器,采用了机械式的调节方法成功地实现了对蒸汽机转速的控制,使蒸汽机真正进入了实用阶段,推动了大工业的发展,被认为是自动控制应用发展中的第一个里程碑。

1868年马克斯威尔(Maxwell)针对调节系统中的振荡问题,用微分方程建立了一类调节器模型,提出了简单的稳定性代数判据。1895年劳斯(Routh)和霍尔维茨(Hurwitz)两人分别独立地将这一思想扩展到高阶微分方程所描述的更复杂系统中,提出了著名的劳斯—霍尔维茨稳定性判据。

随着社会的发展,人们控制系统性能的要求越来越高。乃魁斯特(Nyquist)在1932年提出了频域分析法,伊文斯(Evans)在1948年提出了根轨迹法,为自动控制系统研究提供了有效的分析工具,也为经典控制理论奠定了基础。

1948年维纳(Wiener)的《控制论》出版,标志着自动控制作为一门科学学科的正式诞生。我国著名学者钱学森将控制论应用于工程实践,他在1954年出版的《工程控制论》,为控制理论的发展和应用做出了卓越的贡献。

1960年前后,苏联数学家庞特里亚金(Pantriyagin)建立的极大值原理,美国应用数学家贝尔曼(Bellman)提出的动态规划,以及美国学者卡尔曼(Kalman)引入的状态空间法和卡尔曼滤波,推动了现代控制理论的形成。现代控制理论的本质是一种直接通过时间函数研究控制系统的方法,它不仅关心系统的输入和输出,更关注系统内部状态的信息和特征。它的内容包括了线性系统分析、系统辨识、最优控制、最佳估计和自适应控制等。

数字计算机的出现及其普及,为复杂控制算法的应用提供了条件,也促进了控制理论研究的发展,科学家对传统的控制理论与非线性分析、随机系统、统计学习、人工智能、认知科学等学科的结合产生了极大兴趣,为了适应不同技术领域和社会发展对控制科学提出的新要求,国内外控制科学界都在探索新的控制理论,以解决各类复杂系统的控制问题。近年来,越来越多的学者已意识到在传统控制中加入逻辑、推理和启发式知识的重要性,把传统控制理论与模糊逻辑、神经网络、遗传算法等人工智能技术相结合,充分利用人的控制知识对复杂系统进行智能化控制,逐渐形成了智能控制理论的较完整体系。

1.4 自动控制系统的组成和常用术语

1.4.1 控制系统的组成

各种反馈控制系统的用途虽然各不相同,但它们都具有按负反馈原理工作的基本特点。在如图1.2.1所示闭环控制系统的结构框图中,各方框均代表一个具体的设备及功能。所有有

向线段均代表一定的信息信号及其传输方向。一般说来,系统的主要组成部分包括:

(1)被控对象(Plant):控制系统所要控制的设备、部件或生产过程,也可称为过程(Process)。本书中的被控对象一般是指包括实际对象及执行机构在内的广义对象。

(2)反馈环节(Feedback unit):对系统输出被控量进行测量的传感器或变送器,即检测环节。

(3)比较器(Comparator):通过反馈的被控量和实际的给定量进行代数运算得到偏差值的运算部件。

(4)控制器(Controller):通过上述偏差计算出控制变化量的控制运算部件。

(5)执行器(Actuator):接收控制器输出的控制命令,从而改变作用在被控对象上的调节作用的装置。

1.4.2 控制系统的常用术语

对于图1.2.1所示的典型闭环控制系统,有以下一些常用技术术语:

(1)给定量:系统的输入量,也是预期输出被控量的希望值。

(2)被控量:被系统所控制的量,也就是系统的输出,它与输入量有一定的函数关系。

(3)反馈量:系统输出量经反馈环节反馈到输入端的量。

(4)偏差量:反应被控量希望值的给定量与反应被控量实际值的反馈量之差。

(5)控制量:控制器的输出,即控制运算结果对被控对象产生控制作用的实际控制命令。

(6)扰动量:也称干扰,可以影响系统输出的其他物理量,扰动量可以来自系统内部,也可以来自外部。

(7)输入量:泛指从系统外输入到系统内的信号,包括给定和扰动量,通常也直接把给定值称为输入值。

(8)误差:希望的输出量与实际的输出量之差。

(9)操纵量:执行器的输出,是一个可控制的用于调节被控量的调节作用。

1.5 自动控制系统的类型

对于不同的目的与用途,自动控制系统有着不同的类型。把具体的系统抽象出来,按照不同的角度也可以有着不同的分类方法。除了前面提到的按系统结构分类所讲到的开环控制系统、闭环控制系统以及在它们基础上综合改进而成的混合和复杂控制系统外,还可以按照下述常见方法对控制系统进行分类。

1.5.1 按输入信号性质分类

输入信号为定值的系统,称为定值控制系统,在石油化工等行业中也称为调节系统或恒值调节系统。这类系统工业中应用的比例比较高。例如,加热炉温度控制系统、造纸机纸张张力控制系统、锅炉水位控制系统、发电机转速控制系统等。在国防控制领域中如船载、车载兵器平台控制系统等例子。

输入信号为已知的时间函数变化的系统,称为程序控制系统。例如,机械加工中的热处理温度控制系统、仿形铣床刀具位置控制系统等。

输入信号为未知的时间函数变化的系统,称为随动控制系统,又称为伺服系统。这类系统的给定信号是事先不能确定且随时间变化的。例如,自动记录仪的记录笔位置控制系统、雷达的角度控制系统和火炮控制等。

不同输入信号的系统研究的重点就有所不同。对定值系统来说,重点在于如何减弱或消除各种扰动作用的影响。对于随动系统,重点在于如何使输出准确快速地跟踪输入的变化。

1.5.2 按输入输出信号的数目分类

按照输入输出信号的数目,可以将控制系统分为单入单出(SISO: Simple input simple output)系统和多人多出(MIMO: Multiple input multiple output)系统两类。单入单出系统可以看作是多入多出系统的一个特例,而多人多出系统的研究相对要复杂一些,由此在工业过程控制系统分析中,一般尽量在某种条件下将多人多出系统近似为单入单出系统来处理。

1.5.3 按系统中信号的形式分类

信号在控制系统中的时间变量取值可以是连续的也可以是离散的,时间离散信号的特点是其在某些不连续的特定时刻具有意义。

若控制系统中所有信号都是连续时间信号,则称其为连续控制系统。

如果系统中有一处或几处的信号是离散时间信号,则称其为离散系统。具有采样过程的离散控制系统又称为采样控制系统,而当离散时间信号是以数字信号的形式在系统中传递时,则又可以将其称为数字控制系统。在将数字计算机引入一个自动控制系统之后,该控制系统就成为数字控制系统了。

由于信号形式的不同,在系统的分析和设计中就需要使用不同的数学手段。

习 题

1.1 各举一个家用电器或日常生活中其他设备控制的例子,说明什么是开环控制?什么是闭环控制?

1.2 举例说明闭环控制系统主要由哪几部分构成?

1.3 查资料论述控制理论的新进展。

1.4 在瓦特的蒸汽机离心式调速系统中,如何改变调节作用的强弱?

1.5 判断下列结论正误:

a.() A closed-loop control system uses feedback signal and set point signal to produce controlling command.

b.() There should be, at least, one sensor in the open loop control system.

c.() The output of a closed or open loop control system is also the controlled value of the system.

d.() The temperature control system of a domestic refrigerator is a typical open loop control system.

- e.()The feedback phenomena exist both in nature and technology. The periodic population growth and reduction in the famous predator and prey interactions are an example of feedback occurring in nature.
- f.()There must exist suitable measurements in a closed—loop control system.
- g.()H. Nyquist formulated a mathematical model for the governor control.

第2章 数学基础与数学模型

在研究控制系统时,首先必须建立动态系统的数学模型。动态系统的数学模型是一组方程式,它精确地或至少相当好地表示了系统的动态特性。对于给定的系统,数学模型不是唯一的,一个系统可以用不同的方式表示,即一个系统可以具有多种数学模型。根据具体系统和具体条件的不同,一种数学模型可能比另一种更合适。例如,在单输入、单输出、线性、定常系统的瞬态响应或频率响应分析中,采用传递函数比较方便,而对于最佳控制问题,采用状态空间表达式可能更为方便。一旦建立了系统的数学模型,就可以采用各种分析方法和计算工具对系统进行分析 and 综合。

自动控制理论中常用到的数学模型有高阶微分方程、传递函数及状态空间表达式等,本章将分别进行介绍。

2.1 数学基础

2.1.1 微分方程

含有未知函数与其导数的方程式称为微分方程,代入微分方程后能使该方程转化为一个恒等式的函数则称为该微分方程的一个解。

n 阶线性定常系统微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dx^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = \\ b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

若有初始条件

$$x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0, \quad \cdots, \quad x^{(n-1)}(0)=x_0^{n-1} \quad (2.1.2)$$

高等数学中采用古典解法是将微分方程(2.1.1)在初始条件(2.1.2)下的解分为两个组成部分,即

$$x(t) = x_{zi}(t) + x_{zs}(t) \quad (2.1.3)$$

$x_{zi}(t)$ 是方程(2.1.1)相应的齐次方程(即令方程右端为零所得的方程)的通解,即零输入解, $x_{zs}(t)$ 为满足方程(2.1.1)的特解。

实际中求解微分方程(2.1.1)时,首先根据特征方程

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad (2.1.4)$$

来求解 $\lambda_i, i=1, \cdots, n$,若 λ_i 为单实根,则在通解中对应项为 $ce^{\lambda_i t}$,若有共轭复数根 $\lambda_{1,2}=\sigma \pm j\omega$,则在

通解中对应项为 $e^{\mu}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$, 对于 k 重实根 λ 则对应 $e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1})$, 于是, 就可以求出微分方程的齐次解。

微分方程的特解, 可应用待定系数法求得, 先由非齐次项的形式估计求解特解的形式, 然后将其代入原方程求出常数系数。例如, 若非齐次项具有形式为 $P_m(t)e^{\lambda t}$, 其中 $P_m(t)$ 为 t 的 m 次多项式, 则对应有以下形式的特解 $t^m Q_m(t)e^{\lambda t}$, 其中 $Q_m(t)$ 为与 $P_m(t)$ 同次的多项式, m 按 λ 是否为特征方程的单根、重根或非根分别为1、2、0。

因此, 求解一个线性非齐次微分方程可分为以下三步:

- (1) 求出齐次方程的通解;
- (2) 求出原方程的一个特解;
- (3) 非齐次方程的解为上述两步骤结果之和。

2.1.2 复变函数中的重要概念

1. 复数与复变函数

随着虚数 $j = \sqrt{-1}$ 的引入, 人们对数的研究由实数领域扩展到了复数。复数有实部和虚部两部分, 即 $s = \sigma + j\omega$, 对应于 s 平面上的一个点, 如图2.1.1所示。

复变函数 $F(s)$ 是复数 s 的函数, 它也是由一个实部和一个虚部组成, 即 $F(s) = F_x + jF_y$, 式中, F_x, F_y 都是实数, 如图2.1.2所示。

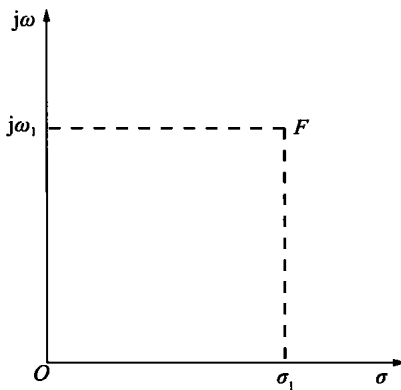


图2.1.1 s 平面和一个点

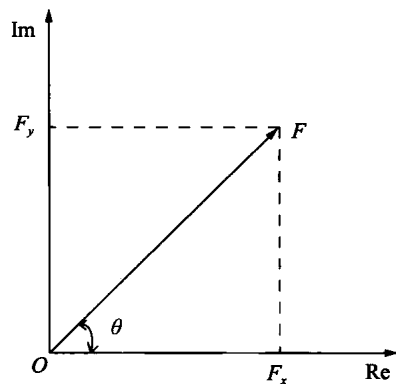


图2.1.2 复平面和一个点

$$F(s) \text{ 的幅值 (模)} \quad |F(s)| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.1.5)$$

$$F(s) \text{ 的角度} \quad \angle F(s) = \arctan(F_y / F_x) \quad (2.1.6)$$

2. 奇点的概念

在线性系统中遇到的复变函数 $F(s)$ 通常是 s 的单值函数, 即对于 s 的一个给定值应该唯一地确定一个 $F(s)$ 。如果在复平面上的某一域内有 $F(s)$ 及其导数存在, 那么称此复变函数在该区域内是解析的。在复平面上使函数 $F(s)$ 解析的点就称为普通点, 否则就称为奇点。

如果在奇点上函数 $F(s)$ 或其导数趋于无穷大, 则该奇点称为极点, 反之使 $F(s)$ 等于零的

点称为零点。例如,通过因式分解通常可以将一个分式多项式复变函数化成以下形式

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}$$

$G(s)$ 在 $s=-2$ 、 $s=-10$ 处具有零点,在 $s=0$ 、 $s=-1$ 、 $s=-5$ 处具有单极点,在 $s=-15$ 处具有双重极点。应当指出,当 $s \rightarrow \infty$ 时, $G(s)=0$,因为当 s 值很大时 $G(s) \approx \frac{K}{s^3}$,因此在 $s \rightarrow \infty$ 时, $G(s)$ 具有三重零点。如果将无穷远处的零点也包括在内,则 $G(s)$ 具有的极点数与零点数相同,即 $G(s)$ 具有5个零点($s=-2$ 、 $s=-10$ 、 $s \rightarrow \infty$ 、 $s \rightarrow \infty$ 、 $s \rightarrow \infty$)和5个极点($s=0$ 、 $s=-1$ 、 $s=-5$ 、 $s=-15$ 、 $s=-15$)。

3. 欧拉定理

$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的幂级数展开式分别为

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\ \sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

因此

$$\cos\theta + \sin j\theta = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \cdots$$

因为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

因此得到

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$$

这就是欧拉定理。利用欧拉定理,可以把正弦和余弦表示成指数函数的形式。注意到 $e^{-j\theta}$ 是 $e^{j\theta}$ 的共轭复数,并且

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

通过把这两个方程相加和相减,可以求得

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{j2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

2.1.3 拉氏变换及其基本定理

拉氏变换是一种求解微分方程的简便运算方法,也是研究和设计系统时用的很多的一种

工具。

1. 拉氏变换定义

$f(t)$ 是时间 t 的函数, 并且当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$, $f(t)$ 的拉氏变换为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

求拉氏变换可以运用定义式进行, 这里推导几个常用函数的拉氏变换。

$$\text{指数函数 } f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$$

则

$$F(s) = \mathcal{L}[Ae^{-at}] = \int_0^{\infty} Ae^{-at}e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{A}{s+a}$$

$$\text{阶跃函数 } f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[A] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s}$$

$$(1) \text{ 斜坡函数 } f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[At] = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt = At \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{Ae^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 正弦函数 } f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\sin \omega t \text{ 可以写成 } \sin \omega t = \frac{1}{j2} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

因此

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[A \sin \omega t] = \frac{A}{j2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{A}{j2} \frac{1}{s-j\omega} - \frac{A}{j2} \frac{1}{s+j\omega} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

类似地, $A \cos \omega t$ 的拉氏变换可以导出如下

$$\mathcal{L}[A \cos \omega t] = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

工程上一般利用拉氏变换表通过查表法进行拉氏变换。

2. 拉普拉斯变换对照表

工程上常用的拉氏变换方法是查表法, 表 2.1.1 给出了一些常用时间函数的拉普拉斯变