普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

谢季坚　刘承平

模糊数学方法及其应用（第四版）

获中国大学出版社图书奖首届优秀教材二等奖

- 强调“数学概念、方法”，重视“应用技术、模型”
- 严谨适度地阐述基本原理，通俗直观地介绍背景知识
- 联系实际，突出应用，典型实例结合软件计算
- 反复锤炼，精益求精，特点鲜明，多年长销不衰

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育"十二五"规划教材
普通高等院校数学精品教材

模糊数学方法及其应用

（第四版）

谢季坚　刘承平

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书讲述了模糊数学方法及其应用，主要内容包括模糊集合及其运算、模糊统计方法、模糊聚类分析、模糊模型识别、模糊决策(含层次分析法)、模糊线性规划、模糊控制以及它们在科学技术与经济管理中的应用等.

本书的编写兼顾了“数学概念、方法”与“应用技术、模型”两个方面，本书的特点是具有较好的通俗性、应用性和可操作性.

本书可作为大学本科生、研究生的教材或参考书，也可供广大科技工作者使用.

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学方法及其应用(第四版)/谢季坚　刘承平. 一武汉：华中科技大学出版社，2013. 2
ISBN 978-7-5609-8671-5

Ⅰ. 模…　Ⅱ. ①谢…　②刘…　Ⅲ. 模糊数学-高等学校-教材　Ⅳ. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 016067 号

模糊数学方法及其应用(第四版)　　谢季坚　刘承平

责任编辑：徐正达
封面设计：潘　群
责任校对：周　娟
责任监印：张正林
出版发行：华中科技大学出版社(中国・武汉)
　　　　　武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)81321915
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：武汉科源印刷设计有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：16. 25
字　　数：337 千字
版　　次：2013 年 2 月第 4 版第 1 次印刷
定　　价：28. 80 元

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

前　言

本书第一版由谢季坚教授编写，从第二版开始刘承平副教授参与编写，先后增加了模糊线性规划、模糊控制、层次分析法及部分算法的 MATLAB 源代码程序等内容.

近些年，有许多科技工作者将模糊数学方法应用到自己的研究领域，有许多应用模糊数学方法的优秀论文在正规期刊上公开发表. 这些都推动了模糊数学方法及其应用的发展. 我们在本教材的第四版中，对如何确定满意的分类做了一点探讨，在附录中增加了 MATLAB 编程简介，对原来的应用程序做了较大的修改，这是为了更方便读者阅读和加快程序运行速度，并新增了几个应用程序，同时更新了一些例子和习题.

由于模糊数学方法应用的灵活性，作者很难兼顾到对所有应用方法进行编程，因此特别增加了 MATLAB 编程简介. 要想创新，要么在自己的研究领域内有所突破，要么寻求能够解决问题的新计算方法. MATLAB 编程方法是最容易入门、计算能力最强的编程方法之一.

本书第三版获得中国大学出版社图书奖首届优秀教材二等奖.

本书具有通俗性、应用性和可操作性等特点，自 1993 年出版以来，印刷多次，长销不衰，受到广大读者的欢迎. 一些热心读者还给我们提出了许多修改意见，在此表示感谢，特别感谢中国人民解放军防化指挥工程学院基础部数学教研室孙建建老师. 本书虽然经过多次修订，但由于作者水平所限，难免还有缺点和错误，恳请读者批评指正.

本书的出版，得到华中科技大学出版社的热心支持和大力帮助，在此表示衷心的感谢！

编　者

2012 年 10 月 1 日于武汉

目　　录

第1章　模糊集的基本概念

模糊集(也称为模糊集合)是模糊数学的基础,模糊数学则是研究和处理模糊性现象的数学方法.本章着重介绍模糊集的基本概念、运算法则、基本定理及其简单的应用.

1.1　模糊数学概述

1965年,美国加利福尼亚大学控制论专家扎德(L. A. Zadeh)教授在《信息与控制》杂志上发表了一篇开创性论文《模糊集合》[1],这标志着模糊数学的诞生.扎德是世界公认的在系统理论及其应用领域贡献最大的人之一,被誉为“模糊集之父”[2,3].

与其他学科一样,模糊数学也是因实践的需要而产生的.在日常生活中,模糊概念(或现象)处处存在,例如厚、薄,快、慢,大、小,长、短,轻、重,高、低,稀、稠,贵、贱,强、弱,软、硬,锐、钝,深、浅,美、丑,白天、黑夜,早晨、中午、傍晚,黎明、黄昏,多云、晴天、阴天、雨天,中雨、暴雨、大暴雨,等等.在科学技术、经济管理领域中,模糊概念(或现象)也比比皆是,例如感冒、胃病、心脏病,红壤、黄壤、棕壤,蔬菜、水果,动物、植物、微生物,通货膨胀、经济繁荣、经济萧条,失业、就业,劳动密集型企业、知识密集型企业,信得过产品、合格品、次品,贫困、温饱、小康、富裕,等等.当代科技发展的趋势之一,就是各个学科领域都要求定量化、数学化,当然也迫切要求将模糊概念(或现象)定量化、数学化.这就促使人们必须寻找一种研究和处理模糊概念(或现象)的数学方法.

众所周知,经典数学是以精确性为特征的.然而,与精确性相悖的模糊性并不完全是消极的、没有价值的.甚至可以这样说,有时模糊性比精确性还要好.例如,要你去迎接一个“大胡子、高个子、长头发、戴宽边黑色眼镜的中年男人”,尽管这里只提供了一个精确信息——男人,而其他信息——大胡子、高个子、长头发、宽边黑色眼镜、中年等都是模糊的,但是,你将这些模糊概念经过头脑的综合分析判断,就可以找到这个人.如果这个问题用计算机精确地处理,那么,就要求将此人的准确年龄与身高,胡子、头发的准确长度与根数,眼镜边的宽度、黑色的程度等一一输入计算机,才可以找到这个人.如果这个人的头发中途掉了一根的话,计算机就可能找不到这个人了.由此可见,有时太精确了未必一定是好事.

模糊数学绝不是把数学变成模模糊糊的东西,它也具有数学的共性:条理分

明,一丝不苟,即使描述模糊概念(或现象),也会描述得清清楚楚.由扎德教授创立的模糊数学是继经典数学、统计数学之后,数学学科的一个新的发展方向.统计数学将数学的应用范围从必然现象领域扩大到偶然现象领域,模糊数学则把数学的应用范围从精确现象领域扩大到模糊现象领域.

在人类社会和各个科学领域中,人们所遇到的各种量大体上可以分成两大类,即确定性的与不确定性的,而不确定性又可分为随机性和模糊性.人们正是用经典数学、随机数学、模糊数学来分别研究客观世界中不同的量[4],其对应关系如下:

量
- 确定性 —— 经典数学
- 不确定性
  - 随机性 —— 随机数学
  - 模糊性 —— 模糊数学

在这种框架内,数学模型也可以分为三大类.

第一类是确定性数学模型.这类模型研究的对象具有确定性,对象之间具有必然的关系,最典型的就是用微分法、微分方程、差分方程所建立的数学模型.

第二类是随机性数学模型.这类模型研究的对象具有随机性,对象之间具有偶然的关系,如用概率分布方法、马尔可夫(Markov)链所建立的数学模型.

第三类是模糊性数学模型.这类模型所研究的对象与对象之间的关系具有模糊性.这就是本书所要讨论的模型.

为了弄清两种不确定性,下面介绍两种不确定性之间的区别.

随机性的不确定性,也就是概率的不确定性.例如,“明天有雨”、“掷一骰子出现 6 点”等,它们的发生是一种偶然现象,具有不确定性.在这里,事件本身是确定的,而事件的发生不确定.只要时间过去,到了明天,“明天有雨”是否发生就变成确定的了.“掷一骰子出现 6 点”,只要实际做一次实验,它就变成确定的了.而模糊性的不确定性,即使时间过去了,或者实际做了一次实验,它们仍然是不确定的.这主要是因为事件本身(如“年轻人”、“高个子”等)是不确定的,具有模糊性,是由概念、语言的模糊性产生的.

模糊数学从诞生至今,已经四十多年了.早在 1978 年,国际上第一本以模糊数学为主题的学术刊物《Fuzzy Sets and Systems》在欧洲创刊.模糊数学自 1976 年传入我国后得到了迅速发展:1980 年成立了中国模糊数学与模糊系统学会,1981 年华中工学院(现华中科技大学)创办了《模糊数学》杂志,1987 年国防科学技术大学创办了《模糊系统与数学》杂志.我国已经成为模糊数学研究的四大中心(美国、西欧、日本、中国)之一.北京师范大学汪培庄、四川大学刘应明等教授对模糊数学的研究取得了显著成绩.

模糊数学在实际中的应用几乎涉及国民经济的各个领域,尤其在科学技术、经

济管理、社会科学方面得到了广泛而又成功的应用. 比如,在生物学发展史上,由于科学技术的不断进步,人们发现在动物与植物之间存在着“中介状态”,于是又分出一类微生物. 将生物分成三类后,又发现还存在着“中介状态”,于是又有人主张将生物分为五类、六类. 这一现象用模糊集就可得到合理的解释. 再如,对某个领域的经济发展水平的评价,往往划分为富裕型、小康型、温饱型、贫困型,这些都是模糊的,只有通过模糊性数学模型才能得到合乎实际的评价.

特别值得一提的是,模糊理论在智能计算机的开发与应用上起到了重要作用. 20 世纪 80 年代以来,空调器、电冰箱、洗衣机、洗碗机等家用电器中已广泛采用了模糊控制技术. 日本在这方面已走在世界前列,我国也于 20 世纪 90 年代初在杭州生产了第一台模糊控制洗衣机. 由此看来,模糊数学已逐步进入寻常百姓家了.

1.2 模糊理论的数学基础

1.2.1 经典集

1. 集合及其表示

集合是现代数学的一个基础概念. 一些不同对象的全体称为集合,简称为集,常用大写英文字母 A,B,X,Y 等表示. 本书有时称集合为经典集合(经典集),这是为了区别于模糊集合(模糊集). 集合内的每个对象称为集合的元素,常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. “a 属于 A”记为 $a\in A$,“a 不属于 A”记为 $a\notin A$.

不含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$.

只含有限个元素的集合称为有限集,有限集所含元素的个数称为集合的基数. 包含无限个元素的集合称为无限集. 以集合作为元素所组成的集合称为集合族. 所谓论域,是指所论及对象的全体,它也是一个集合,也称为全集,常用大写英文字母 X,Y,U,V 等表示.

集合的表示法主要有两种.

1° 枚举法. 如由 20 以内的质数组成的集合可表示为

$$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\},$$

自然数集可表示为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

2° 描述法. 使 $P(x)$成立的一切 x 组成的集合可表示为$\{x\mid P(x)\}$. 如实数集可表示为$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,记为 $\mathbf{R}$;$B=\{x\mid x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$实际上是由元素 -1 与 1 组成的集合.

经典集具有两条最基本的属性:元素彼此相异,范围边界分明. 一个元素 x 与集合 A 的关系是,要么 x 属于 A,要么 x 不属于 A,二者必居其一.

例如,设论域 $U=\{$某班学生$\}$,把某班男生组成的集合记为 A,即 $A=\{$男生$\}$,那么,这个班的每个学生之间彼此不相同,而且可以判明每个学生是否属于 A. 如果以某班“高个子”学生为元素,就不能组成一个经典集,因为是否“高个子”无分明的界限.

2. 集合的包含

集合的包含概念是集合之间的一种重要关系.

定义 1.2.1 设有集合 A 和 B,若集合 A 的每个元素都属于集合 B,即 $x\in A \Rightarrow x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作“A 包含于 B 中”或“B 包含 A”.

显然 $A\subseteq A$. 空集 $\varnothing$ 是任意集合 A 的子集,即 $\varnothing\subseteq A$. 若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

定义 1.2.2 设有集合 A 和 B,若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A=B$.

定义 1.2.3 设有集合 U,对于任意集合 A,总有 $A\subseteq U$,则称 U 为全集.

全集是个具有相对性的概念. 例如,实数集对整数集、有理数集而言是全集,而整数集对偶数集、奇数集而言是全集.

定义 1.2.4 设有集合 A,A 的所有子集所组成的集合称为 A 的幂集,记为 $\mathscr{P}(A)$,即 $\mathscr{P}(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$.

例 1.2.1 设 $A=\{a,b\}$,则 A 的幂集为 $\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

由定义 1.2.4 知,幂集是集合族.

3. 集合的运算

定义 1.2.5 设 $A,B\in\mathscr{P}(U)$,U 是论域,规定:

$A\cup B \xlongequal{\text{def}} \{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$,称为 A 与 B 的并集;

$A\cap B \xlongequal{\text{def}} \{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$,称为 A 与 B 的交集;

$A^C \xlongequal{\text{def}} \{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$,称为 A 的余集*.

4. 集合运算(并、交、余)的性质

定理 1.2.1 设 $A,B,C\in\mathscr{P}(U)$,U 是论域,则有:

1° 幂等律 $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

2° 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

3° 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

4° 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

5° 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

---

* 国家标准规定 A 的余集用 $\complement A$ 表示,为了与大多数教材呼应,本书仍用 A^C 表示.

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

6° 0-1律 $A\cup U=U$, $A\cap U=A$, $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$;

7° 还原律 $(A^C)^C=A$;

8° 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$;

9° 排中律 $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$.

这些性质均可由并、交、余的定义直接推出. 上述两个集合的并、交运算可推广到任意多个集合的并、交运算.

5. 集合的直积

在日常生活中,有许多事物是成对出现的,且具有一定的顺序,例如上、下,左、右,平面上点的坐标等. 任意两个元素 x 与 y 配成一个有序的对 (x,y),称为 x 与 y 的序对. 有序是指当 $x\neq y$ 时,$(x,y)\neq(y,x)$,$(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x',y=y'$.

定义 1.2.6 设 X,Y 是两个集合,由 X 的元素与 Y 的元素配成的全体序对组成一个集合,称为 X 与 Y 的直积(或笛卡儿(Descartes)积),记为 $X\times Y$,即

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}.$$

例 1.2.2 设 $X=\{1,2\}$,$Y=\{0,2\}$,则

$$X\times Y=\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)\},$$
$$Y\times X=\{(0,1),(0,2),(2,1),(2,2)\}.$$

一般地,有
$$X\times Y\neq Y\times X.$$

1.2.2 映射与扩张

1. 映射

定义 1.2.7 设 X 与 Y 是两个非空集,如果存在一个对应规则 f,使得对于任意元素 $x\in X$,有唯一元素 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 的映射,记为

$$f:X\rightarrow Y,$$
$$x\mapsto f(x)=y\in Y.$$

y 称为 x 在映射 f 下的像,x 称为原像.

集合 X 称为映射 f 的定义域,记为 $D(f)$. 集合

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

称为映射 f 的值域,记为 $R(f)$. 一般地,$f(X)\subseteq Y$. 若 $f(X)=Y$,则称 f 是从 X 到 Y 上的映射或从 X 到 Y 的满映射.

映射概念是函数概念的推广. 微积分中定义在区间 $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$ 上的一元函数 $f(x)$,就是从 $[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射,即

$$f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R},$$
$$x\mapsto f(x)=y.$$

定义 1.2.8 如果映射 $f:X\rightarrow Y$,对于任意 $x_1,x_2\in X$,有 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq$

$f(x_2)$,则称 f 是从 X 到 Y 的 1—1 映射.如果 $f:X\to Y$ 是 1—1 的满映射,则称 f 为从 X 到 Y 的 1—1 对应.

例 1.2.3 设映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=\sin x$,则 f 不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的满映射,而是 $\mathbf{R}$ 到区间$[-1,1]$的满映射.

例 1.2.4 设 $C[a,b]$是定义在$[a,b]$上的实连续函数集.定义$C[a,b]$到 $\mathbf{R}$ 上的一个映射

$$f:\ \varphi(x)\to\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x,\ \varphi(x)\in C[a,b].$$

这是一个满映射,但不是 1—1 映射.

例 1.2.5 设 $X=\{a,b,c,d\}$,$Y=\{1,2,3,4\}$,f 是从 X 到 Y 的映射,$f=\{(a,1),(b,3),(c,4),(d,2)\}$,则 f 是满映射,又是 1—1 映射,所以 f 是从 X 到 Y 的 1—1 对应.

2. 集合的特征函数

定义 1.2.9 设 $A\in\mathcal{T}(U)$,U 是论域,具有如下性质的映射

$$\chi_A:U\to\{0,1\},$$

$$x\mapsto\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

$\chi_A(x)$称为集合 A 的特征函数(图 1.1).

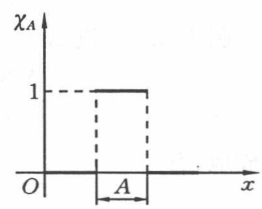

图 1.1

由定义 1.2.9 可知,集合 A 由特征函数 $\chi_A(x)$唯一确定.例如,论域 U 为实数集,则集合

$$A=\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}$$

的特征函数为

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

请读者画出此特征函数的图形.

由此看出,特征函数与集合是互相决定的,是一个事物从不同角度给出的描述.下面是特征函数与集合之间的几个基本关系:

1° $A=U\Leftrightarrow\chi_A(x)=1$,$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)=0$;

2° $A\subseteq B\in\mathcal{T}(U)\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$;

3° $A=B\in\mathcal{T}(U)\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x)$.

基本关系 3°表明,U 的任一子集 A 完全由它的特征函数确定.

特征函数还具有下列运算性质:

$$\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)\vee\chi_B(x),\quad \chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\wedge\chi_B(x),$$

$$\chi_{A^C}(x)=1-\chi_A(x).$$

此处"∨"、"∧"分别是取大、取小运算，即

$$a \vee b = \max(a,b), \quad a \wedge b = \min(a,b).$$

上述性质表明，应用特征函数同样可以方便地讨论集合间的关系和运算.

3. 映射的扩张

上述映射概念实际上是把点 x 映射为点 $y=f(x)$，但在实际中往往需要将点映射为集合(图1.2).

定义 1.2.10　设 $f:X\to Y, x\mapsto f(x)$，则称映射

$$f:X \to \mathscr{T}(Y),$$
$$x \mapsto f(x) = B \in \mathscr{T}(Y)$$

为 X 到 Y 的点集映射.

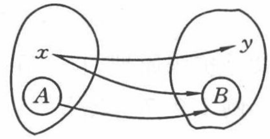

图 1.2

定义 1.2.11　设 $T:X\to Y, x\mapsto f(x)$，则称映射

$$T:\mathscr{T}(X) \to \mathscr{T}(Y),$$
$$A \mapsto T(A)$$

为 X 到 Y 的集合变换.

例 1.2.6　设 $X=\{a,b\}, Y=\{1,2,3\}$，则

$$\mathscr{T}(X)=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\},$$
$$\mathscr{T}(Y)=\{\varnothing, Y, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}.$$

令 $$f:X\to\mathscr{T}(Y), a\mapsto\{1\}, b\mapsto\{2,3\},$$
$$T:\mathscr{T}(X)\to\mathscr{T}(Y), \varnothing\mapsto\varnothing, \{a\}\mapsto\{1,2\}, \{b\}\mapsto\{1\}, X\mapsto Y,$$

则 f 为 X 到 Y 的点集映射，而 T 是 X 到 Y 的集合变换.

定义 1.2.12(经典扩张原理)　设映射 $f:X\to Y, x\mapsto f(x)=y$. 对于任意 $A\in\mathscr{T}(X)$，令

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\},$$

则集合 $f(A)\in\mathscr{T}(Y)$ 称为集合 A 在 f 下的像；对于任意 $B\in\mathscr{T}(Y)$，令

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\},$$

则集合 $f^{-1}(B)\in\mathscr{T}(X)$ 称为集合 B 在 f 下的原像(图 1.3).

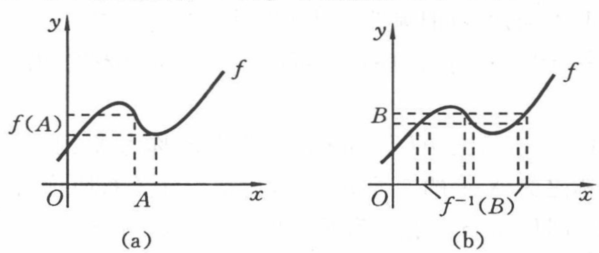

图 1.3

于是，映射 $f:X\to Y, x\mapsto f(x)=y$ 诱导出映射

$$f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y),$$
$$A\mapsto f(A)\in\mathcal{P}(Y),$$
$$f^{-1}:\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X),$$
$$B\mapsto f^{-1}(B)\in\mathcal{P}(X).$$

其特征函数分别为

$$\chi_{f(A)}(y)=\bigvee_{f(x)=y}\chi_A(x),\quad \chi_{f^{-1}(B)}(x)=\chi_B(f(x)).$$

这就是扩张原理,它实际上是一个定义.

例 1.2.7 设 $X=\{1,2\}$,$Y=\{1,3,4\}$,映射 $f:X\to Y$ 定义为 $f(x)=x^2$,则

$$\mathcal{P}(X)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},X\},$$
$$\mathcal{P}(Y)=\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\},Y\}.$$

在映射 f 下的扩张原理为

$$f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y),$$
$$A\mapsto f(A)=\{y\mid y=f(x)=x^2,x\in A\}.$$

例如 $\{x\}\mapsto f(\{x\})=\{y|y=f(x)=x^2,x\in\{x\}\}=\{f(x)\}=\{x^2\}$,

$$f(\varnothing)=\varnothing,\quad f(\{1\})=\{f(1)\}=\{1\},$$
$$f(\{2\})=\{f(2)\}=\{4\},\quad f(X)=\{f(1),f(2)\}=\{1,4\}\in\mathcal{P}(Y);$$
$$f^{-1}:\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X),$$
$$B\mapsto f^{-1}(B)=\{x|x=f^{-1}(y)=\sqrt{y},y\in B\},$$
$$f^{-1}(\varnothing)=\varnothing,\quad f^{-1}(\{1\})=\{f^{-1}(1)\}=\{1\},$$
$$f^{-1}(\{4\})=\{f^{-1}(4)\}=\{2\},\quad f^{-1}(\{1,4\})=\{1,2\}=X.$$

但 $f^{-1}(\{3\})$,$f^{-1}(\{3,4\})$,$f^{-1}(\{1,3\})$,$f^{-1}(Y)$ 在 f 下没有原像.因此,当 $B=\{3\},\{1,3\},\{3,4\},Y$ 时,f^{-1} 均不是 B 到 $f^{-1}(B)$ 的映射.

1.2.3 二元关系

1. 二元关系的概念

关系是一个基本概念.在日常生活中有"朋友"关系、"师生"关系等,在数学上有"大于"关系、"等于"关系等,而序对又可以表达两个对象之间的关系.于是,引进下面的定义.

定义 1.2.13 设 $X,Y\in\mathcal{P}(U)$,$X\times Y$ 的子集 R 称为 X 到 Y 的二元关系,特别地,当 $X=Y$ 时,称之为 X 上的二元关系.以后把二元关系简称为关系.

若 $(x,y)\in R$,则称 x 与 y 有关系 R,记为 xRy;若 $(x,y)\notin R$,则称 x 与 y 没有关系 R,记为 $x\overline{R}y$.R 的特征函数为

$$\chi_R(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } xRy \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\overline{R}y \text{ 时}.\end{cases}$$

例 1.2.8 设 $X=\{1,4,7,8\}$，$Y=\{2,3,6\}$，定义关系 $R=\{(x,y)\mid x<y,x\in X,y\in Y\}$，称 R 为"小于"关系. 于是

$$R=\{(1,2),(1,3),(1,6),(4,6)\}.$$

这表明"小于"关系 R 是直积 $X\times Y$ 的子集.

例 1.2.9 设 $X=\mathbf{R}$，则子集

$$R=\{(x,y)\mid (x,y)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R},y=x\}$$

是 $\mathbf{R}$ 上元素间的"相等"关系.

关系的性质主要有自反性、对称性和传递性.

定义 1.2.14 设 R 是 X 上的关系.

1° 对于任意 $x\in X$，若有 xRx，即 $\chi_R(x,x)=1$，则称 R 是自反的.

2° 对于任意 $x,y\in X$，若 $xRy\Rightarrow yRx$，即 $\chi_R(x,y)=\chi_R(y,x)$，则称 R 是对称的.

3° 对于任意 $x,y,z\in X$，若 $xRy,yRz\Rightarrow xRz$，即 $\chi_R(x,y)=1,\chi_R(y,z)=1\Rightarrow \chi_R(x,z)=1$，则称 R 是传递的.

例 1.2.10 设 $\mathbf{N}$ 为自然数集，$\mathbf{N}$ 上的关系"$<$"具有传递性，但不具有自反性和对称性.

例 1.2.11 设 $\mathcal{P}(X)$ 为 X 的幂集，$\mathcal{P}(X)$ 上的关系"$\subseteq$"具有自反性和传递性，但不具有对称性.

2. 关系的矩阵表示法

关系的表示方法很多，除了用直积的子集表示外，对于有限论域情形，用矩阵表示在运算上更为方便.

定义 1.2.15 设两个有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，R 是 X 到 Y 的二元关系，即

R	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}

，

其中
$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } x_iRy_j \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x_i\overline{R}y_j \text{ 时}.\end{cases}$$

称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 为 R 的关系矩阵，记为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{pmatrix}.$$

由定义 1.2.15 可知,关系矩阵中的元素或是 0 或是 1. 在数学上把诸元素只是 0 或 1 的矩阵称为布尔(Boole)矩阵. 因此,任何关系矩阵都是布尔矩阵.

例 1.2.12 例 1.2.8 中"<"关系 R 的关系矩阵为 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

3. 关系的合成

通俗地讲,若"兄妹"关系记为 R_1,"母子"关系记为 R_2,即 x 与 y 有"兄妹"关系 xR_1y,y 与 z 有"母子"关系 yR_2z,那么 x 与 z 有"舅甥"关系. 这就是关系 R_1 与 R_2 的合成,记为$R_1\circ R_2$.

定义 1.2.16 设 R_1 是 X 到 Y 的关系,R_2 是 Y 到 Z 的关系,则称 $R_1\circ R_2$ 为关系 R_1 与 R_2 的合成,表示为

$$R_1\circ R_2=\{(x,z)\mid \exists\, y\in Y,\text{使得}(x,y)\in R_1,(y,z)\in R_2\}.$$

$R_1\circ R_2$ 是直积 $X\times Z$ 的一个子集,其特征函数为

$$\chi_{R_1\circ R_2}(x,z)\xlongequal{\text{def}}\bigvee_{y\in Y}[\chi_{R_1}(x,y)\wedge\chi_{R_2}(y,z)].$$

例 1.2.13 设 $X=\{1,2,3,4\}$,$Y=\{2,3,4\}$,$Z=\{1,2,3\}$,R_1 是 X 到 Y 的关系,R_2 是 Y 到 Z 的关系,即

$$R_1=\{(x,y)\mid x+y=6\}=\{(2,4),(3,3),(4,2)\},$$
$$R_2=\{(y,z)\mid y-z=1\}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\},$$

则 R_1 与 R_2 的合成

$$R_1\circ R_2=\{(x,z)\mid x+z=5\}=\{(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

关系的合成也可以用矩阵来表示.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_s\}$,X 到 Y 的关系 R_1 的关系矩阵 $\boldsymbol{R}_1=(r_{ij})_{m\times n}$,$Y$ 到 Z 的关系 R_2 的关系矩阵 $\boldsymbol{R}_2=(p_{ij})_{n\times s}$,则 X 到 Z 的关系 $R_1\circ R_2$ 的关系矩阵

$$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2=(c_{ij})_{m\times s},$$

其中
$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge p_{kj}),\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s.$$

下面将例 1.2.13 用关系矩阵来表示. 设

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$