高中数学

（上册）

主　编　冯士腾
策　划　全国考试·竞赛命题研究组

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

全国考试·竞赛试用教材

科学技术文献出版社

优秀畅销书——科学技术文献出版社最新奉献

新编 奥林匹克基础知识及素质教育丛书

在教材的基础上提高　在提高的基础上飞跃

全国著名品牌：　十年磨一剑

名校权威新编：　真诚新奉献

考试竞赛指导：　透彻而全面

辅助学生学习：　提高在当年

高中数学（上、下册）	26.00元
高中物理（上、下册）	35.00元
高中化学（上、下册）	38.00元
高中生物	21.00元
计算机（上、下册）	24.00元

考试竞赛
高分冲刺

注：邮费按书款总价另加20%

☎ 邮购热线:(010)68515544-2172

ISBN 7-5023-3224-3

9 787502 332242 >

ISBN 7-5023-3224-3/G

定价:26.00元（上册12.00元 下

全国考试·竞赛试用教材

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

高中数学

（上册）

主　编　冯士腾

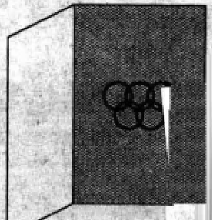
编　著　冯士腾　李方烈

付小平　祝厚元

彭　林　王小丹

李　彬　印志建

策　划　全国考试·竞赛命题研究组



科学技术文献

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

图书在版编目(CIP)数据

高中数学(上、下册)/冯士腾主编 .-北京:科学技术文献出版社,2000.4

(新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书)

ISBN 7-5023-3224-3

Ⅰ.高… Ⅱ.冯… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.~~G633~~.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(99)第 38981 号

出　版　者:科学技术文献出版社
图书发行部:北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部:北京市西苑南一院东 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091
邮购部电话:(010)68515544-2953,(010)68515544-2172
图书编务部电话:(010)62878310,(010)62878317(传真)
图书发行部电话:(010)68514009,(010)68514035(传真)
E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn
策划编辑:王亚琪　王　琦
责任编辑:蒋　驰
责任校对:梁文彦
责任出版:周永京
封面设计:吕永杰
发　行　者:科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者:三河市富华印刷包装有限公司
版(印)次:2000 年 4 月第 1 版第 3 次印刷
开　本:850×1168　32 开
字　数:238 千
印　张:8.875
印　数:15001~20000 册
定　价:26.00 元(上册 12.00 元　下册 14.00 元)

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是以高中数学知识为主线，为高中数学课外活动编写的教材。

全书分为上下两册，每册又分为基础篇与提高篇。基础篇内容与高中数学教材同步，与课堂教学实际联系密切，并适当补充了参加高考及数学竞赛的必备知识。提高篇以高中数学教学大纲为依据，内容覆盖了高中数学竞赛的主要内容。通过对典型例题的分析，向学生介绍了数学竞赛中常用的数学思想方法，以及其在解题中灵活、多变的应用，以帮助学生提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为数学竞赛辅导读物，也可供教师、高考学生、高中学生参考阅读。

我们所有的努力都是为了使您增长知识和才干

科学技术文献出版社是国家科学技术部所属的综合性出版机构，主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物类图书。

前 言

近些年来，世界范围内的学科奥林匹克竞赛方兴未艾。我国自参赛以来，不断取得优异成绩。1997 年，我国参加在阿根廷布宜诺斯艾利斯举办的第 37 届世界数学奥林匹克竞赛，6 名选手均获金牌，并取得了团体第一名的好成绩。学生参加各学科的奥林匹克竞赛活动，不但为国家争得了荣誉，也已成为他们丰富学习内容、增长知识、提高各门功课学习成绩的重要方式之一。

为了帮助广大中小学生完整、准确、全面地掌握各门功课的学习内容，在日常的学习和参加奥林匹克竞赛活动中取得好的成绩，同时为了配合目前中小学素质教育，我们邀请了京内外著名奥校具有多年教学与辅导经验的权威老师，编写了这套《新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书》。

参加本丛书编写工作的老师，全部来自于教学第一线，具有扎实的基础理论功底和丰富的教学实践经验。他们结合自己多年教学、科研和奥校辅导的经验，在总结各类奥林匹克竞赛教学讲义、习题解答及辅导材料的基础上，博采众家之长，形成了本丛书独具特色的风格和特点：

(1)学科门类齐全。全套丛书共 18 分册，涵盖数学、物理、化学、生物、计算机 5 个学科，跨越小学、初中、高中三个阶段，是目前此类图书中覆盖学科最广、教学内容最全、实用性最强的奥林匹克竞赛系列丛书之一。

(2)普及与提高并重。各册书紧密配合本年级的教学进度,选择基础性强、应用性广、具有代表性的教学内容作为专题,进行重点讲解,旨在提高大多数学生的学习水平。同时又根据各学科竞赛的实际需要,选择针对性强的专题,以点带面,重点讲解。

(3)科学准确,结构合理。各分册按照学科特点进行科学编排,内容繁简适当。对于教学中的重大疑难问题,分析透彻,注重科学性和准确性。重点、难点部分举一反三,力求使学生在理解的基础上,学会灵活运用。

(4)新颖独特,趣味性强。各分册力求做到选题典型、新颖有趣,例题讲解富有启发性,注意培养学生独立思考的能力。注重从学习方法、分析思路和解题技巧上,全方位、多角度地培养学生对各种知识的综合运用能力。

为便于学生掌握各门功课的学习要领,各分册除对基础知识进行系统讲解外,还配备有一定数量的练习,并附有提示及答案,供同学们根据自己的实际情况有选择地使用。

我们真诚地希望本套丛书能对同学们参加奥林匹克竞赛和各类学科竞赛有所裨益,能有助于我国中小学生全面提高各门功课的学习成绩。书中如有错漏或不当之处,欢迎读者批评指正。

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

主要作者简介

吴文虎	中国计算机学会普及委员会主任 国际信息学奥林匹克中国队总教练 清华大学计算机系教授
吕　品	全国中小学计算机教材审查委员会委员 北京信息学奥林匹克学校副校长 中学特级教师
刘　尧	北京教育学院化学教研室主任、教授
陆　禾	北京14中化学特级教师 北京市有突出贡献的专家
黄儒兰	北京教育局化学教研室主任 中学特级教师
冯士滕	北京宣武区教育学会秘书长 中学特级教师
李方烈	北京宣武区中学数学教研室主任 中学特级教师
赵欣如	北京师范大学生物系教授 中国生物奥林匹克竞赛委员会主任委员
曹保义	北京师范大学二附中副校长 生物教研组组长 中学高级教师

高建军　湖南长沙一中生物教研组组长
中学高级教师

石长地　首都师范大学研究生处教师
数学奥林匹克专业研究生毕业
教育学硕士

贺贤孝　辽宁师范大学数学系教授
辽宁数学教育学会副会长

杨　骞　辽宁师范大学数学系副教授
大连市奥林匹克学校校长

由　崚　北京市宣武区中学教研室主任

秦家达　北京市 66 中物理教研组组长
中学高级教师

高玉镶　北京师范大学附中物理高级教师

马凌风　北京市 15 中物理教研组组长
中学高级教师

王健子　北京市 15 中物理高级教师

第二讲　二次函数与方程、不等式

形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的函数,叫做二次函数.其定义域为 R,值域:当 $a>0$ 时,为$[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$,有最小值,当 $a<0$ 时,为$(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}]$,有最大值.

二次函数的图像是一条抛物线,其顶点坐标是$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$,对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$.

$a>0$ 时,抛物线开口向上,并向上无限延伸,图像在对称轴左侧是下降的,即 $x\in(-\infty,-\frac{b}{2a}]$时,$y$ 是减函数;图像在对称轴右侧是上升的,即 $x\in[-\frac{b}{2a},+\infty)$时,$y$ 是增函数,当 $a<0$ 时,抛物线开口向下,且向下无限延伸,在对称轴左侧,图像是上升的,即 $x\in(-\infty,-\frac{b}{2a}]$时,$y$ 是增函数;在对称轴右侧,图像是下降的,即 $x\in[-\frac{b}{2a}+\infty)$时,$y$ 是减函数.

比较二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$、一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或<0),结合二次函数的图像,我们可以利用二次函数的性质来解一元二次方程和不等式的有关问题,反之,也可以利用方程及不等式的有关知识,来讨论二次函数的有关问题.

1. 二次函数图像与 x 轴的位置关系

设二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$,二

从而 $M \subset P$.

说明:(1)本题的关键是,如何将表达集合 M 和 P 的解析式间关系寻求出来,并从中找出特殊元素.(2)若将题目中自然数集 N 改为整数集 Z,则 $M=P$.

【例 2】 设集合 $A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant a\}$,$B=\{y \mid y=2x+3, x \in A\}$,$c=\{z \mid z=x^2, x \in A\}$,且 $C \subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

分析:A、B、C、均是数集,由于含字母 a,故集合 C 的确定需要分类讨论.

解:$\because A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant a\}$

$\therefore \quad B=\{y \mid y=2x+3, x \in A\}=[-1, 2a+3]$

$c=\{z \mid z=x^2, x \in A\}$的意义是二次函数 $y=x^2$ 在$[-2, a]$上的函数值的集合,需要分

(1)当 $a \geqslant 2$ 时,$c=[0, a^2]$

(2)当 $0 \leqslant a<2$ 时,$c=[0,4]$

(3)当 $-2 \leqslant a<0$ 时,$c=[a^2, 4]$

由 $C \subseteq B$ 可知:(1)时 $a^2 \leqslant 2a+3$ $\quad \therefore 2 \leqslant a \leqslant 3$,(2)时$\frac{1}{2} \leqslant a<2$,(3)时 $4 \leqslant 2a+3$ 解得 $a \geqslant \frac{1}{2}$与$-2 \leqslant a<0$ 矛盾.

$\therefore$实数 a 的取值范围是$[2,3] \cup [\frac{1}{2}, 2)=[\frac{1}{2}, 3]$

说明:(1)二次函数在给定区间上的值域的确定,是一个重要的知识点.(2)在讨论中,要特别注意分类的依据,及是否不重不漏.

【例 3】 已知集合 $A=\{(x, y) \mid |x|+|y|=a, a>0\}$,$B=\{(x, y) \mid (|x|-1)(|y|-1)=0\}$.若 $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,求 a 的值.

分析:由已知条件知,$A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,故 $A \cap B$ 中有且只有 8 个元素,所要解决的是,当 a 为何值时,这 8 个点恰构成正八边形.

解:$\because |x|+|y|=a$ 及$(|x|-1)(|y|-1)=0$ 都是绝对值方

程，

∴其图形关于 x 轴、y 轴、原点均对称.

在第一象限内，A 中点满足 $x+y=a>0$，B 中点 $x=1(y>0)$ 或 $y=1,(x>0)$.

∴$A\cap B$ 在第一象限内的元素是 $(1,a-1)$ 和 $(a-1,1)$.

由对称性可知 $A\cap B$ 中 8 个元素在平面上的位置，如图 1-1.

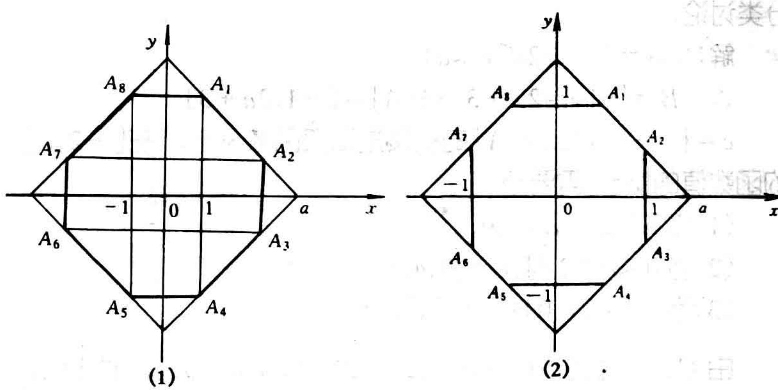


图 1-1

可知当 $|A_1A_8|=|A_1A_2|$ 时，8 个点构成正八边形.

(1) $A_1(1,a-1)$ 时，$A_2(a-1,1)$，$A_8(-1,a-1)$，由 $|A_1A_2|=|A_1A_8|$ 解得 $a=2\pm\sqrt{2}$，由 $a-1>0$，舍去 $a=2-\sqrt{2}$.

(2) $A_1(a-1,1)$ 时，$A_2(1,a-1)$，$A_8(1-a,1)$，由 $|A_1A_2|=|A_1A_8|$，解得 $a=\pm\sqrt{2}$，由 $a-1>0$ 知，舍去 $a=-\sqrt{2}$.

∴$a=2+\sqrt{2}$ 或 $a=\sqrt{2}$ 时，符合条件.

说明：由所给曲(直)线方程，来研究其性质；借助几何特征求解代数问题，使“数”“形”得以有机地结合，是数学中的常见方法.

☞ 【例 4】 已知集合 $A=\{x\mid x^3-7x^2+14x-8=0\}$，$B=\{x\mid x^3+2x^2-c^2x-2c^2=0,c\geqslant 0\}$.

(1)求出集合 A 和 B.

(2)以集合 $A\cup B$ 的元素作为二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根,试在 $y=x^2+px+q$ 的最小值中,求出它最大的和最小的值.

☞ **分析**:A、B 是一元三次方程,由观察可知 $1\in A$,$-2\in B$,从而化为一元二次方程,可解,而 p,q 是随根的变化而变化的,故可由韦达定理,表示 $y=x^2+px+q$ 的最小值,再进行讨论.

☞ **解**:(1)$\because x^3-7x^2+14x-8=0$ 可分解为$(x-1)(x-2)(x-4)=0$,$\therefore A=\{1,2,4\}$.

又$\because x^3+2x^2-c^2x-2c^2=(x+2)(x+c)(x-c)=0$,

$\therefore B=\{-2,c,-c\}$

(2)设方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根为 α,β,则 $y=x^2+px+q$ 的最小值为$M=-\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{4}$.

当 $\alpha=\beta$ 时,$M_{\max}=0$,M 的最小值当$|\alpha-\beta|$为最大时达到.

$\because A\cup B$ 中的元素为 $1,2,4,-2,-c,c$,

且 $c>0$,

$\therefore$(1)$c\geqslant 4$ 时,两根中最大值为 c,最小值为 $-c$,从而 M 的最小值为 $-c^2$.

(2)$2<c<4$ 时,两根中最大值为 4,最小值为 $-c$,从而 M 的最小值为$-\dfrac{(c-4)^2}{4}$.

(3)$0\leqslant c\leqslant 2$ 时,两根中最大值为 4,最小值为 -2,从而 M 的最小值为 -9.

☞ **【例 5】** 求集合 $M=\{1,2,3,\cdots,100\}$的所有子集的元素之和的和(规定 Φ 的元素之和为 0).

☞ **分析**:利用退回最简原则,考虑两个元素时,$p=\{1,2\}$,其子集为$\{1\}$,$\{2\}$,$\{1,2\}$,$\varnothing$,其中每个元素出现两次.考虑三个元素时,$Q=\{1,2,3\}$,其子集为 $\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}\{1,2,3\}$,其中每个元素出现四次.依此类推,M 集合共有 2^{100}个子集,每个元素出现次数为$\dfrac{1}{2}\times 2^{100}=2^{99}$,于是 M 中所有子集的元素个数之

和为 $2^{99}(1+2+3+\cdots+100)=5050\cdot 2^{99}$.

☞ **解**:如果考虑 M 中含 k 元素的子集的个数,则集合 $M'=\{x|x\in M$ 且 $x\neq k\}$ 的元素个数为 99 个,M' 的子集共有 2^{99} 个.当把 k 加到这 2^{99} 个子集中去,就有 M 的 2^{99} 个子集包含元素 k,即 k 出现在 M 的 2^{99} 个子集中,从而 M 的所有子集的元素之和为:$2^{99}\times(1+2+3+\cdots+100)=5050\times 2^{99}$.

若 $M=\{1,2,3,\cdots,n\}$,$(n\in N)$时,可得 M 的所有子集的元素之和为:$2^{n-1}\times(1+2+3+\cdots+n)=2^{n-2}\cdot n\cdot(n+1)$.

☞ **【例 6】** 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$,集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$则$\overline{M\cup N}$等于(　　).

(A)$\varnothing$　　　　(B)$\{(2,3)\}$

(C)$(2,3)$　　　　(D)$\{(x,y)|y=x+1\}$

☞ **分析**:利用数形结合的思想,将问题转化为直角坐标平面上的点集问题来讨论.

☞ **解**:由$\frac{y-3}{x-2}=1$ 得 $y=x+1$,$x\neq 2$.M 集合表示直线 $y=x+1$ 上除去(2,3)的点.集合 N 表示平面内除去直线 $y=x+1$ 上的所有点.则 $M\cup N$ 表示除(2,3)点之外的所有点.

$\therefore \overline{M\cup N}$中只含(2,3)点,选 B.

☞ **【例 7】** 在坐标平面上,纵横坐标都是整数的点叫做整点,我们用 I 表示所有直线的集合,M 表示恰好通过一个整点的直线的集合,N 表示不通过任何整点的直线的集合,P 表示通过无穷多个整点的直线的集合,那么表达式

(1)$M\cup N\cup P=I$　　　　(2)$N\neq\varnothing$

(3)$M\neq\varnothing$　　　　(4)$P\neq\varnothing$

之中,正确的表达式的个数是多少?

☞ **分析**:对(2),直线 $x=\sqrt{2}$ 不通过任何整点,$\therefore N\neq\varnothing$ 成立;对(3),直线 $y=\sqrt{2}x$ 只通过一个整点(0,0),$\therefore M\neq\varnothing$;对(4),直线 $y=x$ 通过无数个整点,$\therefore P\neq\varnothing$.对(1),只需证通过两个整点的直线

必通过无数个整点,即可知(1)也正确.

证明:设(a,b),(c,d)是 l 上的两个整点,$(a,b,c,d\in Z)$.

(1)若 $a=c$,则 l 的方程是$x=a$,此时 $l\in P$.

(2)若 $a\neq c$,则 l 的方程是$y=\dfrac{d-b}{c-a}(x-a)+b$.当 $x-a=(c-a)\cdot n$,$n\in Z$ 时,$y=n(d-b)+b$.

从而 $l\in P$,于是 $M\cup N\cup P\supseteq I$,又显然

$I\supseteq M\cup N\cup P$,$\therefore M\cup N\cup P=I$.

正确的表达式有 4 个 .

【例 8】 对集合 $A=\{1,2,3,\cdots,1998\}$及其每一个非空子集,定义一个唯一确定的"交替和"如下:按照递减的次序重新排列该子集,然后从最大的数开始,交替地减或加后继的数所得的结果 . 例如,集合$\{1,2,4,7,10\}$的"交替和"是 $10-7+4-2+1=6$,集合$\{7,10\}$的"交替和"是 $10-7=3$,集合$\{5\}$的"交替和"是 5,等等,试求 A 的所有子集的"交替和"的总和.

分析:A 的非空子集共有 $2^{1998}-1$ 个,显然,要想逐个计算"交替和"然后相加是不可能的.必须分析"交替和"的特点,故可用从特殊到一般的方法.如$\{1,2,3,4\}$的非空子集共 15 个,其交替和分别为:$\{1\}$ 1,$\{2\}$ 2,$\{3\}$ 3,$\{4\}$ 4,$\{1,2\}$ $2-1$,$\{1,3\}$ $3-1$,$\{1,4\}$ $4-1$,$\{2,3\}$ $3-2$,$\{2,4\}$ $4-2$,$\{3,4\}$ $4-3$,$\{1,2,3\}$ $3-2+1$,$\{1,2,4\}$ $4-2+1$,$\{1,3,4\}$ $4-3+1$,$\{2,3,4\}$ $4-3+2$,$\{1,2,3,4\}$ $4-3+2-1$,从以上写出的"交替和"可以发现,除$\{4\}$外,可以把$\{1,2,3,4\}$的子集分为两类:一类中包含 4,另一类不包含 4,并且构成这样的对应:设 A_i 是$\{1,2,3,4\}$中一个不含 4 的子集,令 A_i 与$\{4\}\cup A_i$ 相对应,显然这两个集合的"交替和"的和为 4,由于这样的对应有 7 对,再加上$\{4\}$的"交替和"为 4,$\therefore\{1,2,3,4\}$的所有子集的"交替和"为 32.

解:集合 $A=\{1,2,3,\cdots,1998\}$的子集中,除了集合$\{1998\}$,还有 $2^{1998}-2$ 个非空子集.将其分为两类,第一类是含 1998 的子集,第

二类是不含 1998 的子集，这两类所含的子集个数相同. 因为如果 A_i 是第二类中的，则必有 $A_i\cup\{1998\}$ 是第一类中的集合；如果 B_j 是第一类中的集合，则 B_j 中除 1998 外，还应用 $1,2,\cdots,1997$ 中的做其元素，即 B_j 中去掉 1998 外不是非空，且是第二类中的. 于是把"成对的"集合的"交替和"求出来，都为 1998，从而可得 A 的所有子集的"交替和"为 $\frac{1}{2}(2^{1998}-2)\times1998+1998=2^{1997}\times1998$.

说明：本题中，"退到最简"，从特殊到一般的思想及分类思想、映射对应思想都有体现，要注意学习.

训练题 1

1. 选择题

(1)从 $A\cup B=A\cup C$ 中能够推出(　　)

(A) $B=C$　　(B) $A\cap B=A\cap C$

(C) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$　　(D) $\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$

(2)已知 $P=\{x\mid x=3k,k\in Z\}$，$Q=\{x\mid x=3k+1,k\in Z\}$，$S=\{x\mid x=3k-1,k\in Z\}$，若 $a\in P$，$b\in Q$，$c\in S$，则有

(A) $a+b-c\in P$　　(B) $a+b-c\in Q$

(C) $a+b-c\in S$　　(D) $a+b-c\in P\cup Q$

(3)已知 $x\in R$，$y\in R^+$，$A=\{x^2+x+1,-x,-x-1\}$，$B=\{-y,-\frac{y}{2},y+1\}$，若 $A=B$，则 x^2+y^2 的值是(　　)

(A) 5 (B) 4 (C) 25 (D) 10

(4) I 为全集，集合 A、B 满足 $A\cup B=I$，那么，① $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，② $A\cap\overline{B}=\overline{B}$，③ $A\cup\overline{B}=A$，④ $B\supseteq\overline{A}$ 四个关系中，正确的个数为(　　)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 填空题

(1)已知 A、B、M、N 的非空集合，$A\cap B=\varnothing$，$M=\{A$ 的真子